

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2022.03.012

# 基于 TODIM 和 PROMETHEE II 的概率不确定语言双边匹配决策方法

朱远芳, 汪新凡, 周浪

(湖南工业大学 理学院, 湖南 株洲 412007)

**摘要:** 针对概率不确定语言环境下的双边匹配决策问题, 提出一种基于 TODIM 和 PROMETHEE II 的双边匹配决策方法。首先, 根据 TODIM 方法计算各方主体间的损益值, 进而计算各方主体间的优势度; 再将优势度作为 PROMETHEE II 方法中的优先函数计算各方主体的流入量、流出量和净流量; 接下来根据净流量计算各方主体对另一方主体的匹配满意度。在此基础上, 构建双方主体满意度之和最大化且考虑双边匹配方案公平性的多目标匹配优化模型, 并通过使用线性加权方法将多目标优化模型转化为单目标优化模型, 利用 LINGO11.0 软件包进行求解, 得到公平双边匹配方案。最后, 通过政企双边匹配算例分析, 验证了所提出匹配决策方法的可行性和有效性。

**关键词:** 双边匹配; 概率不确定语言术语集; TODIM 方法; PROMETHEE II 方法; 优化模型

**中图分类号:** N945.25; O29 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-9833(2022)03-0084-11

**引文格式:** 朱远芳, 汪新凡, 周浪. 基于 TODIM 和 PROMETHEE II 的概率不确定语言双边匹配决策方法 [J]. 湖南工业大学学报, 2022, 36(3): 84-94.

## Bilateral Matching Decision Making Method of Probabilistic Uncertain Linguistic Information Based on TODIM and PROMETHEE II

ZHU Yuanfang, WANG Xinfan, ZHOU Lang

(College of Science, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China)

**Abstract:** In view of bilateral matching decision making problems in probabilistic uncertain linguistic information, a bilateral matching decision making method based on TODIM and PROMETHEE II has thus been proposed. Firstly, according to TODIM method, a calculation has been made of the profit and loss value among all parties, followed by a further calculation of the dominance among all parties. Then, the inflows, outflows and net flows of all principal parties can be calculated by using the dominance degrees as the priority functions in PROMETHEE II method. Furthermore, the matching satisfaction degree of each subject to the other subject is calculated according to the net flows. On this basis, a multi-objective matching optimization model is constructed to maximize the sum of subject satisfaction with the fairness of bilateral matching scheme taken into consideration. The multi-objective optimization

**收稿日期:** 2021-07-24

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目 (71801090); 教育部人文社会科学规划基金资助项目 (19YJA630071); 湖南省哲学社会科学基金资助重点项目 (18ZDB009); 湖南省自然科学基金资助项目 (2020JJ4264, 2021JJ30225); 湖南省教育厅优秀青年基金资助项目 (20B180)

**作者简介:** 朱远芳 (1995-), 女, 贵州遵义人, 湖南工业大学硕士生, 主要研究方向为双边匹配决策,  
E-mail: 481313499@qq.com

**通信作者:** 汪新凡 (1966-), 男, 湖南安化人, 湖南工业大学教授, 博士, 硕士生导师, 主要研究方向为模糊决策, 随机决策, 双边匹配, E-mail: zzwxfydm@126.com

model is transformed into a single objective optimization model by using linear weighting method, and a fair bilateral matching scheme is obtained by using LINGO11.0 and other software packages. Finally, the feasibility and effectiveness of the proposed matching decision method can be verified by an example of bilateral matching between governments and enterprises.

**Keywords:** bilateral matching; probabilistic uncertain linguistic glossary; TODIM; PROMETHEE II; optimization model

## 1 研究背景

双边匹配决策研究起源于 D. Gale 等<sup>[1]</sup>对婚姻匹配问题<sup>[2]</sup>的研究, 具有广泛的实际应用背景, 如人力资源管理中人员与岗位的匹配<sup>[3]</sup>、二手房交易过程中买方与卖方的匹配<sup>[4]</sup>、投资决策过程中投资者与企业的匹配<sup>[5]</sup>等。正因为如此, 对于双边匹配决策问题的研究, 不仅具有重要的理论意义, 而且具有广泛的应用价值。

在双边匹配决策的实际过程中, 由于客观事物的复杂性和人类认知的有限性, 双方主体很难给出精确的评价价值, 而用语言术语集<sup>[6]</sup>来表达评价信息相对容易且符合实际。目前, 有关语言术语集的双边匹配决策理论与方法研究得到了学者们的关注<sup>[7-10]</sup>。在许多复杂的决策问题中, 决策者仅用单一的语言术语常常难以表达自己犹豫不决的定性意见, 为了解决这类问题, R. M. Rodriguez 等<sup>[11]</sup>提出用犹豫模糊语言术语集来表达评价信息。在有关犹豫模糊语言术语集的研究中, 一般都默认决策者提供的语言术语具有同等重要性, 但事实上, 决策者可能会对语言术语评价价值具有不同的倾向性, 因而这些语言术语可能有不同的重要性程度。为刻画语言术语的不同重要性程度, Pang Q. 等<sup>[12]</sup>提出用概率语言术语集来表达评价信息。概率语言术语集既能反映决策者利用模糊语言表达对于方案或者准则的犹豫性和模糊性, 还可以反映每个语言术语的概率分布信息, 在表达评价信息时比犹豫模糊语言术语集更加精细, 其研究也被扩展到各个领域之中<sup>[13-14]</sup>。在概率语言术语集相关概念的基础上, Lin M. W. 等<sup>[15]</sup>定义了概率不确定语言术语集 (probabilistic uncertain linguistic term sets, PULTS)。相比于概率语言术语集, PULTS 更为精细地反映了定性评价信息的模糊性、犹豫性和不确定性, 表征出犹豫不确定性语言信息的概率特征, 体现出特定对象所具有不确定语言评价价值的不同重要性程度, 从而所表达的决策信息更为详细、合理, 使得在此基础上做出的决策更符合实际、更具有可信性和可行性。然而, 目前关于 PULTS 的双边匹配决

策研究尚未见报道。

交互式多属性决策 (TODIM) 方法是基于前景理论提出的一种交互式多准则决策方法, 其特点是考虑了决策者的心理行为特征, 比基于效用理论提出的决策方法更符合实际。其思路如下: 首先, 计算每个方案或准则的损益值, 然后通过方案间的两两比较构建优势度函数; 在此基础上, 计算每个方案相对于所有方案的总体优势度, 并依据总体优势度的大小对其进行排序。与前景理论不同, TODIM 方法涉及的参数较少, 计算更简便, 且不用事先确定参照点。例如, R. A. Krohling 等<sup>[16]</sup>提出了基于直觉模糊数的 TODIM 决策方法; 王坚强等<sup>[17]</sup>将传统的 TODIM 方法扩展到属性值为多值中智数的环境中; 张笛等<sup>[18]</sup>提出了一种基于直觉模糊偏好信息的 TODIM 双边公平满意匹配方法。但是, 目前将 TODIM 方法应用于 PULTS 决策的研究也尚未见报道。

PROMETHEE (preference ranking organization method for enrichment evaluation) 方法, 是基于方案的两两比较的一种多目标决策方法, 其主要包括 PROMETHEE I 和 PROMETHEE II 等方法。其中, PROMETHEE II 方法由于定义了方案的净流量, 可得到所有方案的完全序列, 其思路如下: 对于所有方案下的每一准则, 由决策者按照自己的偏好为其选择或定义偏好函数, 再以偏好函数和准则权重系数来计算两个方案之间的优势度, 并以此求出每一方案的流入量、流出量和净流量, 然后根据优势关系对方案进行排序。与已有的排序方法相比, 该方法思路清晰并且简单易懂。目前, 该方法已经被扩展到直觉语言决策<sup>[19]</sup>、犹豫模糊语言决策<sup>[20-22]</sup>及概率语言决策<sup>[23-25]</sup>的研究中。但是, 目前将 PROMETHEE II 方法应用于 PULTS 决策的研究也尚未见报道。

基于以上分析, 本文拟针对具有概率不确定语言信息的双边匹配决策问题, 将 TODIM 方法和 PROMETHEE II 方法结合起来, 综合利用它们的优势, 提出一种基于 TODIM 与 PROMETHEE II 的概率不确定语言双边匹配决策方法, 并进行算例分析, 以期为解决准则值为概率不确定语言的双边匹配决

策问题提供理论参考。

## 2 预备知识

### 2.1 双边匹配

双边匹配决策问题涉及双方主体, 设  $A$  方主体集合为  $A=\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ ,  $m \geq 2$ , 其中  $A_i$  表示第  $i$  个  $A$  方主体,  $i=1, 2, \dots, m$ ;  $B$  方主体集合为  $B=\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ ,  $n \geq 2$ , 其中  $B_j$  表示第  $j$  个  $B$  方主体,  $j=1, 2, \dots, n$ 。记  $I=\{1, 2, \dots, m\}$ ,  $J=\{1, 2, \dots, n\}$ 。

**定义 1**<sup>[26-27]</sup> 双边匹配定义为映射  $\mu: A \cup B \rightarrow A \cup B$ , 且对于  $\forall A_i \in A, \forall B_j \in B$ ,  $\mu$  满足如下条件:

- 1)  $\mu(A_i) \in B \cup \{A_i\}$ ,  $\mu(A_i) = A_i$ , 则  $A_i$  没有匹配对象;
- 2)  $\mu(B_j) \in A \cup \{B_j\}$ ,  $\mu(B_j) = B_j$ , 则  $B_j$  没有匹配对象;
- 3)  $\mu(A_i) = B_j$  当且仅当  $\mu(B_j) = A_i$ , 此时称  $(A_i, B_j)$  为根据  $\mu$  匹配确定的一个匹配对, 并称根据双边匹配  $\mu$  确定的匹配对的集合为匹配方案集, 记为  $F$ 。

### 2.2 双边匹配的满意性和公平性

设  $x_{ij}(i \in I, j \in J)$  是 0~1 变量:  $x_{ij}=0$  表示主体  $A_i$  与主体  $B_j$  不匹配,  $x_{ij}=1$  表示主体  $A_i$  与主体  $B_j$  匹配;  $\alpha_{ij}$  为  $A$  方主体  $A_i$  对  $B$  方主体  $B_j$  的满意度,  $\beta_{ij}$  为  $B$  方主体  $B_j$  对  $A$  方主体  $A_i$  的满意度。

**定义 2**<sup>[18]</sup> 若  $\mu \in F$ , 且满足  $f(\mu) = \max\{f(\mu_t) | t=1, 2, \dots, t\}$ , 则:

- 1) 当  $f(\mu_t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_{ij}$  时, 称  $\mu$  是  $A$  方主体满意的匹配方案;

- 2) 当  $f(\mu_t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_{ij}$  时, 称  $\mu$  是  $B$  方主体满意的匹配方案;

- 3) 当  $f(\mu_t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) x_{ij}$  时, 称  $\mu$  是双边主体都满意的匹配方案。

**定义 3**<sup>[18]</sup> 若  $\mu \in F$ , 且满足  $g(\mu) = \max\{g(\mu_t) | t=1, 2, \dots, t\}$ , 其中当  $g(\mu_t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij} - \beta_{ij}| x_{ij}$  时, 则称  $\mu$  是双边公平匹配方案, 称  $g(\mu_t)$  为双边匹配公平度。

### 2.3 PULTS 及其相关概念

语言术语集<sup>[28]</sup> 是一个由奇数个语言术语组成的集合, 通常记为  $S=\{s_i | i=0, 1, 2, \dots, 2\lambda\}$ 。其中,  $\lambda$  为正整数, 且满足以下两个特征:

- 1) 有序性。如果  $L > U$ , 则  $s_L > s_U$ 。
- 2) 互补性。如果  $L = U = 2\lambda$ , 则  $s_L = \text{neg}(s_U)$ 。

**定义 4**<sup>[29]</sup> 设  $s_L, s_U \in S$ ,  $L \leq U$ , 则称

1)  $S[L, U] = [s_L, s_U]$  为不确定语言变量;

2)  $\tilde{S} = \{S_{[L, U]} | [L, U] \subset [0, 2\lambda]\}$  为不确定语言术语集。

**定义 5**<sup>[15]</sup> 设

$$\varepsilon(P) = \left\{ \left[ \left[ s_{L^k}, s_{U^k} \right], P^k \right] \mid P^k \geq 0, \right. \\ \left. L^k, U^k = 0, 1, \dots, 2\lambda, k=1, 2, \dots, \#\varepsilon(P), \sum_{k=1}^{\#\varepsilon(P)} P^k \leq 1 \right\},$$

其中,  $[s_{L^k}, s_{U^k}]$  为不确定语言变量, 且  $s_{L^k} \leq s_{U^k}$ ,  $\#\varepsilon(P)$  为  $\varepsilon(P)$  中元素的个数,  $P^k$  为  $[s_{L^k}, s_{U^k}]$  的概率信息, 则称  $\varepsilon(P)$  为概率不确定语言术语集 (PULTS)。

当  $\sum_{k=1}^{\#\varepsilon(P)} P^k = 0$  时, 表示没有给出概率评价信息; 当

$\sum_{k=1}^{\#\varepsilon(P)} P^k = 1$  时, 表示提供了完整的概率评价信息; 当

$0 < \sum_{k=1}^{\#\varepsilon(P)} P^k < 1$  时, 表示只提供了部分的概率评价信息。

**定义 6**<sup>[15]</sup> 设  $\varepsilon(P)$  为一给定的 PULTS, 且满足

$0 < \sum_{k=1}^{\#\varepsilon(P)} P^k < 1$ , 则可将  $\varepsilon(P)$  进行规范化, 即转化为

$$\bar{\varepsilon}(P) = \left\{ \left[ \left[ s_{L^k}, s_{U^k} \right], \bar{P}^k \right] \mid k=1, 2, \dots, \#\varepsilon(P) \right\},$$

其中  $\bar{P}^k = P^k / \sum_{k=1}^{\#\varepsilon(P)} P^k$ 。

**定义 7**<sup>[15]</sup> 设

$$\varepsilon(P) = \left\{ \left[ \left[ s_{L^k}, s_{U^k} \right], P^k \right] \mid P^k \geq 0, \right.$$

$$\left. L^k, U^k = 0, 1, \dots, 2\lambda, k=1, 2, \dots, \#\varepsilon(P), \sum_{k=1}^{\#\varepsilon(P)} P^k \leq 1 \right\}$$

为一给定的 PULTS, 令

$$E(\varepsilon(P)) = \bar{r}, \quad V(\varepsilon(P)) = \sigma,$$

其中

$$\bar{r} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\#\varepsilon(P)} P^k} \cdot \sum_{k=1}^{\#\varepsilon(P)} \frac{P^k L^k + P^k U^k}{2}, \quad (1)$$

$$\sigma = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\#\varepsilon(P)} P^k} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{\#\varepsilon(P)} P^k \cdot \left( \frac{L^k + U^k}{2} - \bar{r} \right)^2}, \quad (2)$$

则称  $E(\varepsilon(P))$  为  $\varepsilon(P)$  的得分函数,  $V(\varepsilon(P))$  为  $\varepsilon(P)$  的精确函数。

利用得分函数  $E(\varepsilon(P))$  和精确函数  $V(\varepsilon(P))$ , 可以对 PULTS 进行比较和排序。

定义 8<sup>[15]</sup> 给定两个 PULTS  $\varepsilon_1(P)$  和  $\varepsilon_2(P)$ , 则有:

- 1) 如果  $E(\varepsilon_1(P)) > E(\varepsilon_2(P))$ , 则  $\varepsilon_1(P) > \varepsilon_2(P)$ ;
- 2) 如果  $E(\varepsilon_1(P)) < E(\varepsilon_2(P))$ , 则  $\varepsilon_1(P) < \varepsilon_2(P)$ ;
- 3) 如果  $E(\varepsilon_1(P)) = E(\varepsilon_2(P))$ , 则
  - i) 如果  $V(\varepsilon_1(P)) > V(\varepsilon_2(P))$ , 则  $\varepsilon_1(P) < \varepsilon_2(P)$ ;
  - ii) 如果  $V(\varepsilon_1(P)) = V(\varepsilon_2(P))$ , 则  $\varepsilon_1(P) = \varepsilon_2(P)$ ;
  - iii) 如果  $V(\varepsilon_1(P)) < V(\varepsilon_2(P))$ , 则  $\varepsilon_1(P) > \varepsilon_2(P)$ .

### 3 PULTS 信息双边匹配决策方法

#### 3.1 问题描述

本研究考虑概率不确定语言信息下的双边匹配决策问题。令  $C^1 = \{C_1^1, C_2^1, \dots, C_s^1\}$  是  $A$  方主体  $A_i (i \in I)$  对  $B$  方主体  $B_j (j \in J)$  进行评价的准则集,  $C_q^1 (q \in Q = \{1, 2, \dots, s\})$  表示  $A$  方主体对  $B$  方主体进行评价的第  $q$  个准则; 令  $C^2 = \{C_1^2, C_2^2, \dots, C_h^2\}$  是  $B$  方主体  $B_j$  对  $A$  方主体  $A_i$  进行评价的准则集,  $C_\rho^2 (\rho \in H = \{1, 2, \dots, h\})$  表示  $B$  方主体对  $A$  方主体进行评价的第  $\rho$  个准则。设

$$\varepsilon_{qij}(P) = \left\{ \left[ \left[ s_{L_{qij}}^k, s_{U_{qij}}^k \right], P_{qij}^k \right] \mid k = 1, 2, \dots, \# \varepsilon_{qij}(P) \right\}$$

$$\left( s_{L_{qij}}^k \leq s_{U_{qij}}^k, 0 < \sum_{k=1}^{\# \varepsilon_{qij}(P)} P_{qij}^k \leq 1, i \in I, j \in J, q \in Q \right)$$

是  $A$  方主体  $A_i$  对  $B$  方主体  $B_j$  针对评价准则  $C_q^1$  给出的概率不确定语言信息,

$$\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P) = \left\{ \left[ \left[ \tilde{s}_{L_{\rho ij}}^k, \tilde{s}_{U_{\rho ij}}^k \right], \tilde{P}_{\rho ij}^k \right] \mid k = 1, 2, \dots, \# \tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P) \right\}$$

$$\left( \tilde{s}_{L_{\rho ij}}^k \leq \tilde{s}_{U_{\rho ij}}^k, 0 < \sum_{k=1}^{\# \tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P)} \tilde{P}_{\rho ij}^k \leq 1, i \in I, j \in J, \rho \in H \right)$$

是  $B$  方主体  $B_j$  对  $A$  方主体  $A_i$  针对评价准则  $C_\rho^2$  给出的概率不确定语言信息。

针对上面描述的双边匹配决策问题, 如何利用双方主体给出的对另一方主体的概率不确定语言信息  $\varepsilon_{qij}(P)$  和  $\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P)$ , 考虑双边匹配满意性和公平性, 构建匹配优化模型, 获取有效的双边匹配方案, 这是本文需要解决的问题。

#### 3.2 方法与步骤

针对上述需要解决的问题, 本文将 TODIM 方法与 PROMETHEE II 方法结合, 利用 TODIM 方法计算各主体间的优势度, 以优势度值作为 PROMETHEE II 方法中的优先函数计算净流量, 并以此构建各主体的综合准则满意度。在此基础上, 构建考虑满意性和公平性的双边匹配优化模型, 进而获取双边匹配方案。

主要步骤如下。

1) 根据  $A$  方主体  $A_i$  给出的  $B$  方主体  $B_j$  在评价准则  $C_q^1$  下的概率不确定语言信息  $\varepsilon_{qij}(P) (i \in I, j \in J, q \in Q)$ , 利用式 (3) 和式 (4) 计算得分函数  $E(\varepsilon_{qij}(P))$  和精确函数  $V(\varepsilon_{qij}(P))$ , 并构建得分函数和精确函数矩阵  $L_q = \left[ \left[ E(\varepsilon_{qij}(P)), V(\varepsilon_{qij}(P)) \right] \right]_{m \times n}$ , 其中

$$E(\varepsilon_{qij}(P)) = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\# \varepsilon_{qij}(P)} P_{qij}^k} \cdot \sum_{k=1}^{\# \varepsilon_{qij}(P)} \frac{P_{qij}^k L_{qij}^k + P_{qij}^k U_{qij}^k}{2}, \quad (3)$$

$$V(\varepsilon_{qij}(P)) = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\# \varepsilon_{qij}(P)} P_{qij}^k} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{\# \varepsilon_{qij}(P)} P_{qij}^k \cdot \left( \frac{L_{qij}^k + U_{qij}^k}{2} - E(\varepsilon_{qij}(P)) \right)^2}. \quad (4)$$

类似地, 根据  $B$  方主体  $B_j$  给出的  $A$  方主体  $A_i$  在评价准则  $C_\rho^2$  下的 PULTS 信息  $E(\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P)) (i \in I, j \in J, \rho \in H)$ , 利用式 (5) 和式 (6) 计算得分函数  $E(\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P))$  和精确函数  $V(\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P))$ , 并构建得分函数和精确函数矩阵  $\tilde{L}_\rho = \left[ E(\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P)), V(\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P)) \right]_{m \times n}$ , 其中

$$E(\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P)) = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\# \tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P)} \tilde{P}_{\rho ij}^k} \cdot \sum_{k=1}^{\# \tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P)} \frac{\tilde{P}_{\rho ij}^k \tilde{L}_{\rho ij}^k + \tilde{P}_{\rho ij}^k \tilde{U}_{\rho ij}^k}{2}, \quad (5)$$

$$V(\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P)) = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\# \tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P)} \tilde{P}_{\rho ij}^k} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{\# \tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P)} \tilde{P}_{\rho ij}^k \cdot \left( \frac{\tilde{L}_{\rho ij}^k + \tilde{U}_{\rho ij}^k}{2} - E(\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P)) \right)^2}. \quad (6)$$

2) 利用式 (7), 在评价指标  $C_q^1 (q = 1, 2, \dots, s)$  下计算主体  $B_j$  与  $B_k$  的偏差  $d(\varepsilon_{qij}(P), \varepsilon_{qik}(P))$ , 构建偏差矩阵  $U_k = \left[ d(\varepsilon_{qij}(P), \varepsilon_{qik}(P)) \right]_{m \times n}$ , 其中

$$d(\varepsilon_{qij}(P), \varepsilon_{qik}(P)) = \begin{cases} \left| E(\varepsilon_{qij}(P)) - E(\varepsilon_{qik}(P)) \right|, & \varepsilon_{qij}(P) \neq \varepsilon_{qik}(P); \\ \left| V(\varepsilon_{qij}(P)) - V(\varepsilon_{qik}(P)) \right|, & \varepsilon_{qij}(P) = \varepsilon_{qik}(P). \end{cases} \quad (7)$$

类似地, 可以利用式 (8) 在评价指标  $C_\rho^2 (\rho = 1, 2, \dots, h)$  下计算主体  $A_i$  与  $A_l$  的偏差  $d(\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P), \tilde{\varepsilon}_{\rho lj}(P))$ , 构建偏差矩阵  $\tilde{U}_k = \left[ d(\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P), \tilde{\varepsilon}_{\rho lj}(P)) \right]_{m \times n}$ , 其中

$$d(\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P), \tilde{\varepsilon}_{\rho lj}(P)) = \begin{cases} |E(\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P)) - E(\tilde{\varepsilon}_{\rho lj}(P))|, & \tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P) \neq \tilde{\varepsilon}_{\rho lj}(P); \\ |V(\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P)) - V(\tilde{\varepsilon}_{\rho lj}(P))|, & \tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P) = \tilde{\varepsilon}_{\rho lj}(P). \end{cases} \quad (8)$$

3) 利用式(9)计算概率不确定语言评价信息  $\varepsilon_{qij}(P)$  相对于  $\varepsilon_{qik}(P)$  的损益值  $H(\varepsilon_{qij}(P), \varepsilon_{qik}(P))$ , 构建损益值矩阵  $V_k = [H(\varepsilon_{qij}(P), \varepsilon_{qik}(P))]_{m \times n}$ , 其中

$$H(\varepsilon_{qij}(P), \varepsilon_{qik}(P)) = \begin{cases} d(\varepsilon_{qij}(P), \varepsilon_{qik}(P)), & \varepsilon_{qij}(P) \geq \varepsilon_{qik}(P); \\ -d(\varepsilon_{qij}(P), \varepsilon_{qik}(P)), & \varepsilon_{qij}(P) < \varepsilon_{qik}(P). \end{cases} \quad (9)$$

当  $\varepsilon_{qij}(P) \geq \varepsilon_{qik}(P)$  时,  $H(\varepsilon_{qij}(P), \varepsilon_{qik}(P))$  表示收益; 当  $\varepsilon_{qij}(P) < \varepsilon_{qik}(P)$  时,  $H(\varepsilon_{qij}(P), \varepsilon_{qik}(P))$  表示损失。

类似地, 利用公式(10), 计算概率不确定语言评价信息  $\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P)$  相对于  $\tilde{\varepsilon}_{\rho lj}(P)$  的损益值  $H(\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P), \tilde{\varepsilon}_{\rho lj}(P))$ , 构建损益值矩阵

$$\tilde{V}_k = [H(\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P), \tilde{\varepsilon}_{\rho lj}(P))]_{m \times n},$$

其中

$$H(\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P), \tilde{\varepsilon}_{\rho lj}(P)) = \begin{cases} d(\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P), \tilde{\varepsilon}_{\rho lj}(P)), & \tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P) \geq \tilde{\varepsilon}_{\rho lj}(P); \\ -d(\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P), \tilde{\varepsilon}_{\rho lj}(P)), & \tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P) < \tilde{\varepsilon}_{\rho lj}(P). \end{cases} \quad (10)$$

当  $\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P) \geq \tilde{\varepsilon}_{\rho lk}(P)$  时,  $H(\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P), \tilde{\varepsilon}_{\rho lk}(P))$  表示收益; 而当  $\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P) < \tilde{\varepsilon}_{\rho lk}(P)$  时,  $H(\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P), \tilde{\varepsilon}_{\rho lk}(P))$  表示损失。

4) 利用式(11)和式(12)计算主体  $B_j$  相对于  $B_k$  的优势度  $\delta_i(B_j, B_k)$  和主体  $B_k$  相对于  $B_j$  的优势度  $\delta_i(B_k, B_j)$ , 构建优势度矩阵  $W_1 = [\delta_i(B_j, B_k)]_{m \times n}$  和  $W_2 = [\delta_i(B_k, B_j)]_{m \times n}$ , 式中

$$\delta_i(B_j, B_k) = \sum_{q=1}^s \varphi_{qi}(B_j, B_k), \quad (11)$$

$$\delta_i(B_k, B_j) = \sum_{q=1}^s \varphi_{qi}(B_k, B_j), \quad (12)$$

其中,

$$\varphi_{qi}(B_j, B_k) = \begin{cases} \sqrt{H(\varepsilon_{qij}(P), \varepsilon_{qik}(P))}, & \varepsilon_{qij}(P) \geq \varepsilon_{qik}(P); \\ -\frac{1}{\theta} \sqrt{-H(\varepsilon_{qij}(P), \varepsilon_{qik}(P))}, & \varepsilon_{qij}(P) < \varepsilon_{qik}(P); \end{cases} \quad (13)$$

$$\varphi_{qi}(B_k, B_j) = \begin{cases} \sqrt{H(\varepsilon_{qik}(P), \varepsilon_{qij}(P))}, & \varepsilon_{qik}(P) \geq \varepsilon_{qij}(P); \\ -\frac{1}{\theta} \sqrt{-H(\varepsilon_{qik}(P), \varepsilon_{qij}(P))}, & \varepsilon_{qik}(P) < \varepsilon_{qij}(P); \end{cases} \quad (14)$$

且  $\theta (\theta > 0)$  是损失衰减系数, 表示主体  $A_i$  和  $B_j$  的损失规避程度,  $\theta$  越小表明主体  $A_i$  和主体  $B_j$  的损失规避程度越大。

类似地, 利用式(15)和式(16)计算主体  $A_i$  相对于主体  $A_l$  的优势度  $\delta_j(A_i, A_l)$  和主体  $A_l$  相对于主体  $A_i$  的优势度  $\delta_j(A_l, A_i)$ , 构建如下优势度矩阵  $\tilde{W}_1 = [\delta_j(A_i, A_l)]_{m \times n}$  和  $\tilde{W}_2 = [\delta_j(A_l, A_i)]_{m \times n}$ , 式中

$$\delta_j(A_i, A_l) = \sum_{\rho=1}^h \varphi_{\rho j}(A_i, A_l); \quad (15)$$

$$\delta_j(A_l, A_i) = \sum_{\rho=1}^h \varphi_{\rho j}(A_l, A_i); \quad (16)$$

其中,

$$\varphi_{\rho j}(A_i, A_l) = \begin{cases} \sqrt{H(\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P), \tilde{\varepsilon}_{\rho lj}(P))}, & \tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P) \geq \tilde{\varepsilon}_{\rho lj}(P); \\ -\frac{1}{\theta} \sqrt{-H(\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P), \tilde{\varepsilon}_{\rho lj}(P))}, & \tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P) < \tilde{\varepsilon}_{\rho lj}(P); \end{cases} \quad (17)$$

$$\varphi_{\rho j}(A_l, A_i) = \begin{cases} \sqrt{H(\tilde{\varepsilon}_{\rho lj}(P), \tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P))}, & \tilde{\varepsilon}_{\rho lj}(P) \geq \tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P); \\ -\frac{1}{\theta} \sqrt{-H(\tilde{\varepsilon}_{\rho lj}(P), \tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P))}, & \tilde{\varepsilon}_{\rho lj}(P) < \tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P). \end{cases} \quad (18)$$

5) 利用式(19)和式(20)计算主体  $B_j$  的流入量  $\varphi_i^+(B_j)$  与流出量  $\varphi_i^-(B_j)$ , 其中:

$$\varphi_i^+(B_j) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n \delta_i(B_j, B_k), \quad (19)$$

$$\varphi_i^-(B_j) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n \delta_i(B_k, B_j). \quad (20)$$

类似地, 利用式(21)和式(22), 计算主体  $A_i$  的流入量  $\varphi_j^+(A_i)$  与流出量  $\varphi_j^-(A_i)$ , 其中

$$\varphi_j^+(A_i) = \frac{1}{m-1} \sum_{k=2}^m \delta_j(A_i, A_k), \quad (21)$$

$$\varphi_j^-(A_i) = \frac{1}{m-1} \sum_{k=2}^m \delta_j(A_k, A_i). \quad (22)$$

6) 根据每个主体的流入量与流出量, 利用式(23)计算出主体  $B_j$  的净流量  $\varphi_i(B_j)$ , 构建如下净流量值矩阵:

$$Q = [\varphi_i(B_j)]_{m \times n},$$

其中

$$\varphi_i(B_j) = \varphi_i^+(B_j) - \varphi_i^-(B_j). \quad (23)$$

类似地, 利用式 (24) 计算出主体  $A_i$  的净流量  $\varphi_j(B_j)$ , 构建如下净流量值矩阵:

$$\tilde{Q} = [\varphi_j(A_i)]_{m \times n},$$

其中

$$\varphi_j(A_i) = \varphi_j^+(A_i) - \varphi_j^-(A_i). \quad (24)$$

7) 利用式 (25), 根据主体  $B_j$  的净流量值计算综合准则满意度  $\alpha_{ij}$ , 构建如下满意度矩阵:

$$R = [\alpha_{ij}]_{m \times n},$$

其中  $\alpha_{ij} \in [0, 1]$ , 且

$$\alpha_{ij} = \frac{\varphi_i(B_j) - \min_{j \in J} \varphi_i(B_j)}{\max_{j \in J} \varphi_i(B_j) - \min_{j \in J} \varphi_i(B_j)}. \quad (25)$$

$\alpha_{ij}$  反映了主体  $A_i$  对主体  $B_j$  的满意度, 其值越大越好。

类似地, 利用式 (26), 根据主体  $A_i$  的净流量值计算综合准则满意度  $\beta_{ij}$ , 构建如下满意度矩阵:

$$\tilde{R} = [\beta_{ij}]_{m \times n},$$

其中  $\beta_{ij} \in [0, 1]$ , 且

$$\beta_{ij} = \frac{\varphi_j(A_i) - \min_{i \in I} \varphi_j(A_i)}{\max_{i \in I} \varphi_j(A_i) - \min_{i \in I} \varphi_j(A_i)}. \quad (26)$$

综合准则满意度  $B_j$  的值越大, 表明主体  $B_j$  对主体  $A_i$  的满意度越大。

### 3.3 双边匹配模型

引入 0~1 变量  $x_{ij}$ , 当  $A_i$  与  $B_j$  匹配时,  $x_{ij}$  等于 1, 否则等于 0。根据上述问题的特点, 构建如下双边匹配多目标优化模型 M1。

(M1):

$$\max Z_1 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_{ij}, \quad (27)$$

$$\max Z_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_{ij}, \quad (28)$$

$$\min Z_3 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij} - \beta_{ij}| x_{ij}, \quad (29)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (30)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad (31)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \min\{m, n\}, \quad x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, j \in J. \quad (32)$$

在上述模型中, 式 (27) 表示使  $A$  方主体的总体满意度最大化; 式 (28) 表示使  $B$  方主体的总体满意度最大化; 式 (29) 表示尽量满足双边匹配的公平性; 式 (30) 表示  $A$  方主体中的每一个必须与  $B$  方主体中的某一个匹配; 式 (31) 表示  $B$  方主体中

的每一个与  $A$  方主体中的某一个或自身匹配; 式 (32) 表示双边匹配数量约束的条件。

### 3.4 模型求解

对于模型 M1 中的目标函数, 其量纲量级均一致, 故采用线性加权和法, 将其转化为如下单目标规划模型 M2。

(M2):

$$\max Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\omega_1 \alpha_{ij} + \omega_2 \beta_{ij} - \omega_3 |\alpha_{ij} - \beta_{ij}|) x_{ij}, \quad (33)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (34)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (35)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \min\{m, n\}, \quad x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, j \in J, \quad (36)$$

其中:  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  分别为目标函数  $Z_1, Z_2, Z_3$  的权重系数, 且满足  $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1, \omega_1, \omega_2, \omega_3 > 0$ 。对于单目标线性规划模型 M2, 可以利用 R 语言、Lingo、Matlab 等软件进行求解。

### 3.5 具体步骤

综上, 可知基于 TODIM 和 PROMETHEE II 的概率不确定语言双边匹配决策方法的具体步骤如下。

**Step 1** 根据双方主体给出的 PULTS 信息  $\varepsilon_{qj}(P)$  ( $i \in I, j \in J, q \in Q$ ) 和  $\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P)$  ( $i \in I, j \in J, \rho \in H$ ), 利用式 (3) ~ (6), 构建如下得分函数和精确函数矩阵:

$$L_q = [E(\tilde{\varepsilon}_{qij}(P)), V(\tilde{\varepsilon}_{qij}(P))]_{m \times n};$$

$$\tilde{L}_\rho = [E(\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P)), V(\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P))]_{m \times n}.$$

**Step 2** 利用式 (7) (8) 构建如下偏差矩阵:

$$U_q = [d(\varepsilon_{qij}(P), \varepsilon_{qik}(P))]_{m \times n};$$

$$\tilde{U}_\rho = [d(\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P), \tilde{\varepsilon}_{\rho lj}(P))]_{m \times n}.$$

**Step 3** 利用式 (9) (10) 构建如下损益值矩阵:

$$V_q = [H(\varepsilon_{qij}(P), \varepsilon_{qik}(P))]_{m \times n};$$

$$\tilde{V}_\rho = [H(\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P), \tilde{\varepsilon}_{\rho lj}(P))]_{m \times n}.$$

**Step 4** 利用式 (11) ~ (18) 构建如下优势度矩阵:

$$W_1 = [\delta_i(B_j, B_k)]_{m \times n}, \quad W_2 = [\delta_i(B_k, B_j)]_{m \times n};$$

$$\tilde{W}_1 = [\delta_j(A_i, A_i)]_{m \times n}, \quad \tilde{W}_2 = [\delta_j(A_i, A_i)]_{m \times n}.$$

**Step 5** 利用式 (19) ~ (24) 构建如下净流量值矩阵:

$$Q = [\varphi_i(B_j)]_{m \times n}, \quad \tilde{Q} = [\varphi_j(A_i)]_{m \times n}.$$

**Step 6** 利用式(25)(26)构建如下满意度矩阵:

$$R = [\alpha_{ij}]_{m \times n}, \tilde{R} = [\beta_{ij}]_{m \times n}。$$

**Step 7** 利用模型 M1 构建双边匹配多目标优化模型。

**Step 8** 将模型 M1 转化为模型 M2, 求解模型 M2, 获得双边匹配结果。

## 4 算例分析

### 4.1 政企双边匹配问题

为了缓解基础设施融资压力, 政府越来越多地鼓励民营企业参与公共投资项目。因此, PPP (Public-Private-Partnership) 项目已成为政府当前基础设施建设的首选。由于该合作通常有较长的合同期, 这使得参与者之间的关系比其他采购系统更加复杂, PPP 模式的核心是通过政府和民营企业之间的合作来促进基础设施和公共服务。PPP 项目的合作伙伴选择已从单一的最低价格赢得机制转变为多标准的决策机制, 主要集中在项目风险分担机制、运作过程、资本结构选择等方面。民营企业的选择是建立良好 PPP 的关键。建立合作关系应以双方互利的情况为基础, 而不是以民营企业的单方面选择为基础。PPP 通常被认为是一种双赢机制, 代表了公共部门和民营企业的资源和努力, 同时也被认为是改变政府管理职能和实现治理现

代化的有效途径。PPP 项目的对接涉及政府和企业之间的双向选择, 从而形成长期稳定的合作伙伴关系, 最终使双方的满意度最大化。此外, 由于政府和企业之间存在利益冲突, 除了要使双方满意度最大化, 还要尽可能使双方满意度的偏差最小, 避免出现一方主体的满意度较高而另一方主体的满意度较低这种不公平现象。因此, 双边匹配决策过程不仅应充分考虑政府和企业双方的满意性, 还要兼顾匹配的公平性, 以促进双方不仅达成合作而且实现双赢。

TS 是一家政府采购服务机构, 其有 3 个政府部门 ( $A_1, A_2, A_3$ ) 与 3 家承包公司 ( $B_1, B_2, B_3$ ) 需要进行双向选择, 该中介机构根据收到的 PPP 项目中政府和企业双方提供的信息, 对其进行一对一双边匹配, 以使双方主体得到满意的匹配对象, 获得最优的匹配决策方案。3 个政府部门依据技术能力  $C_1^1$ 、专业资格  $C_2^1$ 、管理经验  $C_3^1$  共 3 个评价指标, 对 3 家承包公司进行评价, 并给出相应的概率不确定语言评价信息, 具体如表 1~3 所示。3 家承包公司依据政府可信度  $C_1^2$  和投资回收率  $C_2^2$  等 2 个评价指标, 对 3 个政府部门进行评价, 并且给出相应的概率不确定语言评价信息, 具体如表 4 和表 5 所示。这里使用  $\tau=6$  的语言评价集, 即  $S=\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ , 其中  $s_0$  为极差,  $s_1$  为差,  $s_2$  为较差,  $s_3$  为一般,  $s_4$  为好,  $s_5$  为较好,  $s_6$  为极好。

表 1 在评价指标  $C_1^1$  下主体  $A_i$  对  $B_j$  的评价信息  $\varepsilon_{ij}(P)$

Table 1 Evaluation information  $\varepsilon_{ij}(P)$  of subject  $B_j$  by  $A_i$  under evaluation index  $C_1^1$

$C_1^1$	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$A_1$	$\{[s_1, s_2], 0.4\} \{[s_2, s_3], 0.3\}$	$\{[s_4, s_5], 0.4\} \{[s_5, s_6], 0.2\}$	$\{[s_3, s_4], 0.5\} \{[s_4, s_5], 0.3\}$
$A_2$	$\{[s_1, s_2], 0.5\} \{[s_2, s_3], 0.4\}$	$\{[s_4, s_5], 0.4\} \{[s_5, s_6], 0.3\}$	$\{[s_3, s_4], 0.3\} \{[s_4, s_5], 0.5\}$
$A_3$	$\{[s_1, s_2], 0.4\} \{[s_2, s_3], 0.5\}$	$\{[s_5, s_6], 0.5\} \{[s_6, s_7], 0.2\}$	$\{[s_4, s_5], 0.3\} \{[s_5, s_6], 0.4\}$

表 2 在评价指标  $C_2^1$  下主体  $A_i$  对  $B_j$  的评价信息  $\varepsilon_{2ij}(P)$

Table 2 Evaluation information  $\varepsilon_{2ij}(P)$  of subject  $B_j$  by  $A_i$  under evaluation index  $C_2^1$

$C_2^1$	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$A_1$	$\{[s_1, s_2], 0.3\} \{[s_2, s_3], 0.4\}$	$\{[s_1, s_2], 0.4\} \{[s_2, s_3], 0.5\}$	$\{[s_2, s_3], 0.5\} \{[s_3, s_4], 0.3\}$
$A_2$	$\{[s_3, s_4], 0.4\} \{[s_5, s_6], 0.3\}$	$\{[s_3, s_4], 0.5\} \{[s_4, s_5], 0.3\}$	$\{[s_3, s_4], 0.4\} \{[s_4, s_5], 0.5\}$
$A_3$	$\{[s_2, s_3], 0.4\} \{[s_3, s_4], 0.5\}$	$\{[s_3, s_4], 0.5\} \{[s_4, s_5], 0.3\}$	$\{[s_2, s_3], 0.5\} \{[s_3, s_4], 0.3\}$

表 3 在评价指标  $C_3^1$  下主体  $A_i$  对  $B_j$  的评价信息  $\varepsilon_{3ij}(P)$

Table 3 Evaluation information  $\varepsilon_{3ij}(P)$  of subject  $B_j$  by  $A_i$  under evaluation index  $C_3^1$

$C_3^1$	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$A_1$	$\{[s_2, s_3], 0.4\} \{[s_3, s_4], 0.5\}$	$\{[s_1, s_2], 0.4\} \{[s_2, s_3], 0.3\}$	$\{[s_3, s_4], 0.4\} \{[s_4, s_5], 0.3\}$
$A_2$	$\{[s_3, s_4], 0.4\} \{[s_4, s_5], 0.3\}$	$\{[s_1, s_2], 0.4\} \{[s_2, s_3], 0.5\}$	$\{[s_3, s_4], 0.3\} \{[s_4, s_5], 0.5\}$
$A_3$	$\{[s_2, s_3], 0.3\} \{[s_3, s_4], 0.4\}$	$\{[s_1, s_2], 0.3\} \{[s_2, s_3], 0.4\}$	$\{[s_2, s_3], 0.3\} \{[s_3, s_4], 0.5\}$

表4 在评价指标  $C_1^2$  下主体  $B_j$  对  $A_i$  的评价信息  $\tilde{\varepsilon}_{ij}(P)$

Table 4 Evaluation information  $\tilde{\varepsilon}_{ij}(P)$  of subject  $A_i$  by  $B_j$  under evaluation index  $C_1^2$

$C_1^2$	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$A_1$	$\{[s_3, s_4], 0.5\}$	$\{[s_4, s_5], 0.4\}$	$\{[s_2, s_3], 0.3\}$
$A_2$	$\{[s_1, s_2], 0.3\}$	$\{[s_2, s_3], 0.5\}$	$\{[s_3, s_4], 0.3\}$
$A_3$	$\{[s_2, s_3], 0.4\}$	$\{[s_4, s_5], 0.3\}$	$\{[s_3, s_4], 0.4\}$

表5 在评价指标  $C_2^2$  下主体  $B_j$  对  $A_i$  的评价信息  $\tilde{\varepsilon}_{2ij}(P)$

Table 5 Evaluation information  $\tilde{\varepsilon}_{2ij}(P)$  of subject  $A_i$  by  $B_j$  under evaluation index  $C_2^2$

$C_2^2$	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$A_1$	$\{[s_2, s_3], 0.3\}$	$\{[s_3, s_4], 0.5\}$	$\{[s_2, s_3], 0.4\}$
$A_2$	$\{[s_1, s_2], 0.4\}$	$\{[s_2, s_3], 0.5\}$	$\{[s_3, s_4], 0.3\}$
$A_3$	$\{[s_3, s_4], 0.4\}$	$\{[s_4, s_5], 0.3\}$	$\{[s_3, s_4], 0.3\}$

4.2 决策步骤

步骤1 利用式(3)和式(4)构建得分函数

矩阵  $L_q = [E(\tilde{\varepsilon}_{qij}(P))]_{m \times n}$  (如表6所示) 和  $\tilde{L}_\rho = [E(\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P))]_{m \times n}$  (如表7所示)。

表6 得分函数矩阵  $L_q = [E(\tilde{\varepsilon}_{qij}(P))]_{m \times n}$

Table 6 Score function matrix  $L_q = [E(\tilde{\varepsilon}_{qij}(P))]_{m \times n}$

$L_q$	$C_1^1$			$C_2^1$			$C_3^1$		
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$A_1$	1.93	4.83	3.88	2.07	2.06	2.88	3.06	1.93	3.93
$A_2$	1.94	4.93	4.13	3.93	3.88	4.06	3.93	2.06	4.13
$A_3$	2.06	5.79	5.07	3.06	3.88	2.88	3.07	2.07	3.13

表7 得分函数矩阵  $\tilde{L}_\rho = [E(\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P))]_{m \times n}$

Table 7 Score function matrix  $\tilde{L}_\rho = [E(\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P))]_{m \times n}$

$\tilde{L}_\rho$	$C_1^2$			$C_2^2$		
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_1$	$A_2$	$A_3$
$B_1$	3.94	2.13	3.36	3.13	2.06	3.93
$B_2$	3.93	2.93	3.88	3.93	2.13	4.88
$B_3$	3.13	2.83	3.07	3.06	2.93	4.13

步骤2 利用式(7)和式(8)构建偏差矩阵

$U_q = [d(\varepsilon_{qij}(P), \varepsilon_{qik}(P))]_{m \times n}$  (如表8所示) 和  $\tilde{U}_\rho = [d(\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P), \tilde{\varepsilon}_{\rho lj}(P))]_{m \times n}$  (如表9所示)。

表8 偏差矩阵  $U_q = [d(\varepsilon_{qij}(P), \varepsilon_{qik}(P))]_{m \times n}$

Table 8 Deviation matrix  $U_q = [d(\varepsilon_{qij}(P), \varepsilon_{qik}(P))]_{m \times n}$

$U_q$	$C_1^1$			$C_2^1$			$C_3^1$		
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$A_1$	2.90	1.95	0.95	0.01	0.81	0.82	1.13	0.87	2.00
$A_2$	2.99	2.19	0.80	0.05	0.13	0.18	1.87	0.20	2.07
$A_3$	3.73	3.01	0.72	0.82	0.18	1.00	1.00	0.06	1.06

表9 偏差矩阵  $\tilde{U}_\rho = [d(\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P), \tilde{\varepsilon}_{\rho lj}(P))]_{m \times n}$

Table 9 Deviation matrix  $\tilde{U}_\rho = [d(\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P), \tilde{\varepsilon}_{\rho lj}(P))]_{m \times n}$

$\tilde{U}_\rho$	$C_1^2$			$C_2^2$		
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_1$	$A_2$	$A_3$
$B_1$	1.81	0.58	1.23	1.07	0.80	1.87
$B_2$	1.00	0.05	0.95	1.80	0.95	2.75
$B_3$	0.30	0.06	0.24	0.13	1.07	1.20

步骤3 利用式(9)和式(10)构建损益值矩

阵  $V_q = [H(\varepsilon_{qij}(P), \varepsilon_{qik}(P))]_{m \times n}$  (如表10所示) 和  $\tilde{V}_\rho = [H(\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P), \tilde{\varepsilon}_{\rho lj}(P))]_{m \times n}$  (如表11所示)。

表10 损益值矩阵  $V_q = [H(\varepsilon_{qij}(P), \varepsilon_{qik}(P))]_{m \times n}$

Table 10 Profit and loss matrix  $V_q = [H(\varepsilon_{qij}(P), \varepsilon_{qik}(P))]_{m \times n}$

$V_q$	$C_1^1$			$C_2^1$			$C_3^1$		
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$A_1$	-2.90	-1.95	0.95	0.01	-0.81	-0.82	1.13	-0.87	-2.00
$A_2$	-2.99	-2.19	0.80	0.05	-0.13	-0.18	1.87	-0.20	-2.07
$A_3$	-3.73	-3.01	0.72	-0.82	0.18	1.00	1.00	-0.06	-1.06

表11 损益值矩阵  $\tilde{V}_\rho = [H(\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P), \tilde{\varepsilon}_{\rho lj}(P))]_{m \times n}$

Table 11 Profit and loss matrix  $\tilde{V}_\rho = [H(\tilde{\varepsilon}_{\rho ij}(P), \tilde{\varepsilon}_{\rho lj}(P))]_{m \times n}$

$\tilde{V}_\rho$	$C_1^2$			$C_2^2$		
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_1$	$A_2$	$A_3$
$B_1$	1.81	0.58	-1.23	1.07	-0.80	-1.87
$B_2$	1.00	0.05	-0.95	1.80	-0.95	-2.75
$B_3$	0.30	0.06	-0.24	0.13	-1.07	-1.20

步骤4 利用式(11)~(18)构建优势度矩阵

$W_1 = [\delta_i(B_j, B_k)]_{m \times n}$ 、 $W_2 = [\delta_i(B_k, B_j)]_{m \times n}$  (如表12所示)、 $\tilde{W}_1 = [\delta_j(A_i, A_l)]_{m \times n}$  和  $\tilde{W}_2 = [\delta_j(A_l, A_i)]_{m \times n}$  (如表13所示)。



表 12 优势度矩阵  $W_1 = [\delta_i(B_j, B_k)]_{m \times n}$  和  $W_2 = [\delta_i(B_k, B_j)]_{m \times n}$

Table 12 Dominance degree matrix  $W_1 = [\delta_i(B_j, B_k)]_{m \times n}$  and  $W_2 = [\delta_i(B_k, B_j)]_{m \times n}$

$W_1/W_2$	$(B_1, B_2)$	$(B_1, B_3)$	$(B_2, B_3)$	$(B_2, B_1)$	$(B_3, B_1)$	$(B_3, B_2)$
$A_1$	-0.54	-3.23	-1.35	0.54	3.23	0.86
$A_2$	-0.14	-2.29	-0.97	0.14	2.29	1.55
$A_3$	-1.84	-1.55	-1.18	1.84	1.55	0.82

表 13 优势度矩阵  $\tilde{W}_1 = [\delta_j(A_i, A_i)]_{m \times n}$  和  $\tilde{W}_2 = [\delta_j(A_i, A_i)]_{m \times n}$

Table 13 Dominance degree matrix  $\tilde{W}_1 = [\delta_j(A_i, A_i)]_{m \times n}$  and  $\tilde{W}_2 = [\delta_j(A_i, A_i)]_{m \times n}$

$\tilde{W}_1/\tilde{W}_2$	$(A_1, A_2)$	$(A_1, A_3)$	$(A_2, A_3)$	$(A_2, A_1)$	$(A_3, A_1)$	$(A_3, A_2)$
$B_1$	2.38	-0.13	-2.48	-2.38	0.13	2.48
$B_2$	2.34	-1.19	-2.63	-2.34	1.19	2.63
$B_3$	0.91	-1.27	-1.59	-0.91	1.27	1.59

步骤 5 利用式 (19) ~ (24) 构建净流量值矩阵

$$Q = [\varphi_i(B_j)]_{m \times n} \text{ 和 } \tilde{Q} = [\varphi_j(A_i)]_{m \times n} \text{ (见表 14 和 15)。$$

表 14 净流量值矩阵  $Q = [\varphi_i(B_j)]_{m \times n}$

Table 14 Net flow value matrix  $Q = [\varphi_i(B_j)]_{m \times n}$

$Q$	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$A_1$	-3.78	-1.11	-0.25
$A_2$	-2.62	-1.27	0.29
$A_3$	-4.32	-0.39	0.39

表 15 净流量值矩阵  $\tilde{Q} = [\varphi_j(A_i)]_{m \times n}$

Table 15 Net flow value matrix  $\tilde{Q} = [\varphi_j(A_i)]_{m \times n}$

$\tilde{Q}$	$A_1$	$A_2$	$A_3$
$B_1$	2.26	-2.48	2.48
$B_2$	1.16	-2.64	2.64
$B_3$	-0.36	-1.60	1.60

步骤 6 利用式 (25) 和式 (26) 构建满意度矩阵

$$R = [\alpha_{ij}]_{m \times n} \text{ 和 } \tilde{R} = [\beta_{ij}]_{m \times n} \text{ (见表 16 和 17)。$$

表 16 满意度矩阵  $R = [\alpha_{ij}]_{m \times n}$

Table 16 Satisfaction degree matrix  $R = [\alpha_{ij}]_{m \times n}$

$R$	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$A_1$	0.11	0.68	0.86
$A_2$	0.36	0.65	0.98
$A_3$	0.00	0.20	1.00

表 17 满意度矩阵  $\tilde{R} = [\beta_{ij}]_{m \times n}$

Table 17 Satisfaction degree matrix  $\tilde{R} = [\beta_{ij}]_{m \times n}$

$\tilde{R}$	$A_1$	$A_2$	$A_3$
$B_1$	0.93	0.03	0.97
$B_2$	0.72	0.00	1.00
$B_3$	0.43	0.20	0.80

步骤 7 使用线性加权和法将多目标优化模型 M1 转化为模型 M2。为便于下文进行对比, 取  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1/3$ , 并且使用软件 Lingo11.0 求解, 可得  $x_{13} = x_{21} = x_{32} = 1$ , 其余  $x_{ij} = 0$ 。即政府部门  $A_1$  与承包公司  $B_3$  匹配; 政府部门  $A_2$  与承包公司  $B_1$  匹配; 政府部门  $A_3$  与承包公司  $B_2$  匹配。

### 4.3 对比分析

分别用 TODIM 方法、PROMETHEE II 方法、文献 [30][31] 的方法及 TODIM-PROMETHEE II 法 (不考虑公平性) 对上述双边匹配问题进行求解, 不同方法下得到的匹配方案见表 18。

表 18 不同方法得到的匹配方案

Table 18 Matching schemes obtained by different methods

匹配决策方法	双边匹配方案 $\mu$
TODIM 方法	$\{(A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3)\}$
PROMETHEE II 方法	$\{(A_1, B_1), (A_2, B_3), (A_3, B_2)\}$
文献 [30] 的方法	$\{(A_1, B_3), (A_2, B_1), (A_3, B_2)\}$
文献 [31] 的方法	$\{(A_1, B_3), (A_2, B_1), (A_3, B_2)\}$
TODIM-PROMETHEE II 法 (不考虑公平性)	$\{(A_1, B_2), (A_2, B_1), (A_3, B_3)\}$
本文方法	$\{(A_1, B_3), (A_2, B_1), (A_3, B_2)\}$

由表 18 可知, 利用文献 [30][31] 的方法 (文献 [30] 通过构建以最大化得分函数分值为目标的多目标双边匹配模型, 进而得到最优的双边匹配结果; 文献 [31] 通过构建以最大化规范化前景矩阵为目标的多目标双边匹配模型, 进而得到最优的双边匹配结果) 得到的匹配结果与本文方法的匹配结果一致, 但这两种方法都没有考虑主体有限理性, 且文献 [31] 中利用累积前景理论涉及的参数更多, 较为复杂。而利用 TODIM 方法、PROMETHEE II 方法以及 TODIM-PROMETHEE II 方法 (不考虑公平性) 求解得到的匹配结果与本文方法的匹配结果并不完全一致。这是因为, TODIM 方法虽然考虑了主体有限理性, 但对决策属性间级别优先关系缺少考虑, 可能会使得最终匹配结果存在差异; PROMETHEE II 方法没有考虑主体有限理性, 相应地会导致最终匹配结果存在不准确和满意问题; TODIM-PROMETHEE II 法在没有考虑公平性的情形下, 缺少使得双方主体满意度偏差最小这一条件, 不足以降低双方主体间的利益冲突, 进而也会使得匹配结果可能存在差异。

本文方法在考虑公平性的情形下, 通过将 TODIM 方法和 PROMETHEE II 方法结合, 扬长避短, 既考虑了主体有限理性心理行为, 又避免了 PROMETHEE II 方法在计算净流量的过程中因为偏好函数选取不恰当而造成最终的决策结果出现不

够精确的可能。概率不确定语言术语集与 TODIM 方法结合是将决策者有限理性纳入决策的考虑范围,概率不确定语言术语集与 PROMETHEE II 方法结合考虑了决策属性之间的级别优先关系的情况。此外,公平性的考虑也避免了获得的双边匹配结果出现一方主体的满意度较高,而另一方主体的满意度较低的不公平匹配现象。因此,本文提出的考虑公平性的 TODIM-PROMETHEE II 方法更具有说服力,更适用于现实生活中的决策问题。

## 5 结语

针对概率不确定语言信息双边匹配决策问题,本文将 TODIM 方法和 PROMETHEE II 方法相结合,提出了一种基于 TODIM-PROMETHEE II 的双边匹配决策方法。TODIM 方法考虑了主体的有限理性,但也存在缺陷,即准则之间存在互补性,对于被选择的一方主体而言,它的某个或者某些极好的准则评价价值可弥补它的另外一个或者另外一些评价准则的缺陷,相应地就会导致决策结果的不准确和不同意;PROMETHEE II 方法由于定义了方案的净流量,可得到所有方案的完全序。故本文方法发扬了两者的优点。此外,本文所提出的匹配决策方法思路清晰,具有较强的可操作性和实用性,为匹配决策问题研究提供了一条新途径。

### 参考文献:

- [1] GALE D, SHAPLEY L S. College Admissions and the Stability of Marriage[J]. The American Mathematical Monthly, 1962, 69(1): 9-15.
- [2] IRVING R W, MANLOVE D F, SCOTT S. The Stable Marriage Problem with Master Preference Lists[J]. Discrete Applied Mathematics, 2008, 156(15): 2959-2977.
- [3] YU D J, XU Z S. Intuitionistic Fuzzy Two-Sided Matching Model and Its Application to Personnel-Position Matching Problems[J]. Journal of the Operational Research Society, 2020, 71(2): 312-321.
- [4] 梁海明, 姜艳萍. 二手房组合交易匹配决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2015, 35(2): 358-367.  
LIANG Haiming, JIANG Yanping. Decision-Making Method on Second-Hand House Combination Matching[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2015, 35(2): 358-367.
- [5] 万树平, 李登峰. 具有不同类型信息的风险投资商与投资企业多指标双边匹配决策方法[J]. 中国管理科学, 2014, 22(2): 40-47.  
WAN Shuping, LI Dengfeng. Decision Making Method for Multi-Attribute Two-Sided Matching Problem Between Venture Capitalists and Investment Enterprises with Different Kinds of Information[J]. Chinese Journal of Management Science, 2014, 22(2): 40-47.
- [6] HERRERA F, MARTINEZ L. A 2-Tuple Fuzzy Linguistic Representation Model for Computing with Words[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2000, 8(6): 746-752.
- [7] 陈希, 樊治平. 组织中员工与岗位匹配的两阶段测评与选择方法[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2009, 30(9): 1337-1340.  
CHEN Xi, FAN Zhiping. Two-Phase Evaluation and Selection to Match Employees with Their Positions in an Organization[J]. Journal of Northeastern University (Natural Science), 2009, 30(9): 1337-1340.
- [8] 陈希, 樊治平. 知识服务中基于语言关联性信息的双边匹配决策方法[J]. 系统工程, 2012, 30(5): 68-74.  
CHEN Xi, FAN Zhiping. A Method for Two-Sided Matching Decision Making in Knowledge Service Based on Linguistic Correlated Information[J]. Systems Engineering, 2012, 30(5): 68-74.
- [9] 乐琦. 基于两粒度语言评价信息的双边匹配决策[J]. 运筹与管理, 2016, 25(1): 100-104.  
YUE Qi. Two-Sided Matching Decision with Two-Granularity Linguistic Evaluation Information[J]. Operations Research and Management Science, 2016, 25(1): 100-104.
- [10] 张笛, 朱帮助. 基于语言偏好信息的满意公平稳定双边匹配方法[J]. 系统工程理论与实践, 2019, 39(9): 2412-2420.  
ZHANG Di, ZHU Bangzhu. Satisfied, Fair and Stable Two-Sided Matching Method Based on Linguistic Preference Information[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2019, 39(9): 2412-2420.
- [11] RODRIGUEZ R M, MARTINEZ L, HERRERA F. Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets for Decision Making[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2012, 20(1): 109-119.
- [12] PANG Q, WANG H, XU Z S. Probabilistic Linguistic Term Sets in Multi-Attribute Group Decision Making[J]. Information Sciences, 2016, 369: 128-143.
- [13] LI B, ZHANG Y X, XU Z S. The Medical Treatment Service Matching Based on the Probabilistic Linguistic Term Sets with Unknown Attribute Weights[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2020, 22(5): 1487-1505.
- [14] 赵萌, 沈鑫圆, 何玉锋, 等. 基于概率语言熵和交叉熵的多准则决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2018, 38(10): 2679-2689.  
ZHAO Meng, SHEN Xinyuan, HE Yufeng, et al. Probabilistic Linguistic Entropy and Cross-Entropy

- Measures for Multiple Criteria Decision Making[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2018, 38(10): 2679-2689.
- [15] LIN M W, XU Z S, ZHAI Y L, et al. Multi-Attribute Group Decision-Making Under Probabilistic Uncertain Linguistic Environment[J]. Journal of the Operational Research Society, 2017, 69(2): 157-170.
- [16] KROHLING R A, PACHECO A G C, SIVIERO A L T. IF-TODIM: an Intuitionistic Fuzzy TODIM to Multi-Criteria Decision Making[J]. Knowledge-Based Systems, 2013, 53: 142-146.
- [17] 王坚强, 李新娥. 基于多值中智集 TODIM 方法[J]. 控制与决策, 2015, 30(6): 1139-1142.  
WANG Jianqiang, LI Xin'e. TODIM Method with Multi-Valued Neutrosophic Sets[J]. Control and Decision, 2015, 30(6): 1139-1142.
- [18] 张笛, 孙涛, 耿成轩, 等. 基于 TODIM 的直觉模糊双边公平满意匹配方法[J]. 控制与决策, 2019, 34(6): 1338-1344.  
ZHANG Di, SUN Tao, GENG Chengxuan, et al. Method for Intuitionistic Fuzzy Two-Sided Fair and Satisfied Matching Based on TODIM[J]. Control and Decision, 2019, 34(6): 1338-1344.
- [19] 刘宁元. 基于 PROMETHEE 方法的直觉语言多属性群决策方法[J]. 统计与决策, 2019, 35(2): 49-53.  
LIU Ningyuan. Intuitionistic Language Multi-Attribute Group Decision Making Method Based on PROMETHEE Method[J]. Statistics and Decision, 2019, 35(2): 49-53.
- [20] 谭倩云, 冯向前, 张华荣. 基于可能度的犹豫模糊语言 PROMETHEE 方法[J]. 统计与决策, 2016(9): 82-85.  
TAN Qianyun, FENG Xiangqian, ZHANG Huarong. PROMETHEE Method for Hesitation Fuzzy Language Based on Probability Degree[J]. Statistics and Decision, 2016(9): 82-85.
- [21] 耿秀丽, 邱华清. 基于犹豫模糊 PROMETHEE II 的设计方案群决策方法[J]. 计算机应用研究, 2018, 35(10): 3020-3024.  
GENG Xiuli, QIU Huaqing. Group Decision-Making Method of Design Concept Based on Hesitant Fuzzy PROMETHEE II[J]. Application Research of Computers, 2018, 35(10): 3020-3024.
- [22] 廖虎昌, 杨竹, 徐泽水, 等. 犹豫模糊语言 PROMETHEE 方法在川酒品牌评价中的应用[J]. 控制与决策, 2019, 34(12): 2727-2736.  
LIAO Huchang, YANG Zhu, XU Zeshui, et al. A Hesitant Fuzzy Linguistic PROMETHEE Method and Its Application in Sichuan Liquor Brand Evaluation[J]. Control and Decision, 2019, 34(12): 2727-2736.
- [23] JIA X, WANG X F. A PROMETHEE II Method Based on Regret Theory Under the Probabilistic Linguistic Environment[J]. IEEE Access, 2020, 8: 228255-228263.
- [24] 徐泽水, 罗书琴, 廖虎昌. 概率语言 PROMETHEE 方法及其在医疗服务中的应用[J]. 系统工程学报, 2019, 34(6): 760-769.  
XU Zeshui, LUO Shuqin, LIAO Huchang. Probabilistic Linguistic PROMETHEE Method and Its Application in Medical Service[J]. Journal of Systems Engineering, 2019, 34(6): 760-769.
- [25] 耿秀丽, 周青超. 基于概率语言 BWM 与 PROMETHEE II 的多准则决策方法[J]. 运筹与管理, 2020, 29(6): 124-129.  
GENG Xiuli, ZHOU Qingchao. Multi Criteria Decision Making Method Based on Probabilistic Language BWM and PROMETHEE II[J]. Operations Research and Management Science, 2020, 29(6): 124-129.
- [26] 樊治平, 乐琦. 基于完全偏好序信息的严格双边匹配方法[J]. 管理科学学报, 2014, 17(1): 21-34  
FAN Zhiping, YUE Qi. Strict Two-Sided Matching Method Based on Complete Preference Ordinal Information[J]. Journal of Management Sciences in China, 2014, 17(1): 21-34.
- [27] BOUDREAU J W, KNOBLAUCH V. Preferences and the Price of Stability in Matching Markets[J]. Theory and Decision, 2013, 74(4): 565-589.
- [28] DELGADO M, VERDEGAY J L, VILA M A. Linguistic Decision-Making Models[J]. International Journal of Intelligent Systems, 1992, 7(5): 479-492.
- [29] XU Z S. Uncertain Linguistic Aggregation Operators Based Approach to Multiple Attribute Group Decision Making Under Uncertain Linguistic Environment[J]. Information Sciences, 2004, 168(1/2/3/4): 171-184.
- [30] 李沃源, 乔剑敏. 基于区间直觉模糊集的双边匹配决策模型及应用[J]. 模糊系统与数学, 2021, 35(3): 71-77.  
LI Woyuan, QIAO Jianmin. Two-Sided Matching Decision-Making Method and Application Based on Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Environment[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2021, 35(3): 71-77.
- [31] 乐琦, 樊治平. 基于累积前景理论的双边匹配决策方法[J]. 系统工程学报, 2013, 28(1): 38-46.  
YUE Qi, FAN Zhiping. Decision Method for Two-Sided Matching Based on Cumulative Prospect Theory[J]. Journal of Systems Engineering, 2013, 28(1): 38-46.

(责任编辑: 廖友媛)