

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2019.04.016

# 基于非周期间歇控制的非线性系统稳定性

杨蒙, 刘斌

(湖南工业大学 理学院, 湖南 株洲 412007)

**摘要:** 通过非周期间歇控制方法研究了一类非线性系统的指数稳定性, 给出了指数稳定性的判据条件, 根据稳定性判据条件设置了间歇控制器, 利用 Lyapunov-like 函数方法证明了系统在非周期间歇控制器下的指数稳定性, 验证了判据条件的正确性, 有效地优化了周期性的间歇控制。最后, 采用蔡氏混沌系统, 通过数值仿真实验验证了理论结果的正确性。

**关键词:** 非周期间歇控制; 非线性系统; 指数稳定; Lyapunov-like 函数方法; 线性矩阵不等式

**中图分类号:** TP13

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1673-9833(2019)04-0092-05

**引文格式:** 杨蒙, 刘斌. 基于非周期间歇控制的非线性系统稳定性 [J]. 湖南工业大学学报, 2019, 33(4): 92-96.

## Stability of Nonlinear Systems Based on Aperiodic Intermittent Control

YANG Meng, LIU Bin

(College of Science, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China)

**Abstract:** A research has been conducted on the exponential stability of a class of nonlinear systems by means of aperiodic intermittent control, with the criteria of exponential stability given. Intermittent controllers are set up according to stability criterion conditions, thus proving the exponential stability of the system under aperiodic intermittent controller by adopting the method of Lyapunov-like function, which further verifies the validity of the criteria and effectively optimizing the periodic intermittent control. Finally, the validity of the theoretical results can be testified based on the results of numerical simulation experiments by using Chua's chaotic system.

**Keywords:** aperiodic intermittent control; nonlinear system; exponential stability; Lyapunov-like function method; linear matrix inequalities(LMI)

### 1 研究背景

随着线性系统的逐步完善, 学者们逐渐转向于对非线性系统稳定性的研究。由于线性的动力学方程不足以表示系统, 因此非线性系统越来越受到学者们的

关注和研究, 特别是非线性系统的控制, 已成为控制领域的主要研究课题。文献 [1] 对非线性系统的控制提出了多种方法, 如自适应控制<sup>[2]</sup>、滑模控制、切换控制、脉冲控制等。由于人工智能的兴起, 间歇控制方法<sup>[3]</sup>引起了很多学者的关注。脉冲控制<sup>[4]</sup>是与间

收稿日期: 2018-09-16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (61673165)

作者简介: 杨蒙 (1992-), 女, 陕西渭南人, 湖南工业大学硕士生, 主要研究方向为间歇控制的稳定性及其在微电网中的应用, E-mail: 394205221@qq.com

通信作者: 刘斌 (1966-), 男, 湖南新化人, 湖南工业大学教授, 硕士生导师, 主要从事混合系统与网络的稳定性, 复杂动态网络的脉冲同步与一致性等方面的研究, E-mail: liubin@hut.edu.cn

歇控制有密切关联的一种控制方法, 但间歇控制不同于脉冲控制, 间歇控制法是在控制周期中的特定时间内给予控制, 而脉冲控制法仅仅是在特定时刻采取控制。间歇控制虽与脉冲控制一样, 具有不连续的控制特点, 但是在间歇控制中每次控制任务都是在一个小的区间内完成, 而脉冲控制却是在某一时刻完成<sup>[5]</sup>。所以, 相比于脉冲控制, 间歇控制在某些实际问题中更具有优势。文献[6]通过研究周期间歇脉冲控制在神经网络系统<sup>[7]</sup>中的稳定性, 给出了系统稳定时的条件。文献[8-9]通过在一段时间内切换控制系统的稳定性判据, 提出了一种适用于鲁棒控制器的稳定性判据。文献[6-9]基于脉冲间歇控制对系统的稳定性进行了研究, 所用方法可以使系统较快速地达到稳定, 但也给系统带来了较大的波动。文献[10]通过在周期间歇控制中采用经典反馈控制的方法, 使系统能够在较小的波动下快速达到稳定。

周期间歇控制是在固定的周期内给予系统控制, 采用周期间歇控制的方法虽然可以使系统稳定, 但是增加了控制成本。为了节省资源, 并且满足系统的需求, 本文研究了在非周期间歇控制下非线性系统的指数稳定性, 给出了系统稳定时的判据条件, 并且利用 Lyapunov-like 函数方法证明了在非周期间歇控制下系统的指数稳定性。

## 2 非周期间歇控制模型分析

为了更好地对非周期间歇控制方法的稳定性进行分析, 本文考虑一类非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t)) + u(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $x \in \mathbf{R}^n$  为系统状态;

$A$  为  $n \times n$  系统矩阵;

$f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  为连续的非线性函数, 满足  $f(0)=0$ ,

并且存在一个对称矩阵  $L = \text{diag}(l_1, l_2, \dots, l_n) \geq 0$ , 使得  $\|f(x)\|^2 \leq x^T L x$  成立;

$u(t)$  为系统(1)外部输入或者扰动输入;

$(t_0, x_0)$  为初始条件。

假设在非周期下间歇控制为

$$u(t) = \begin{cases} Kx(t), & T_i \leq t < T_i + \tau; \\ 0, & T_i + \tau \leq t < T_{i+1}. \end{cases} \quad (2)$$

式中:  $K$  为控制增益矩阵;

$T_i, T_{i+1}$  为相邻 2 个控制周期的起始时刻,  $T_0 = t_0$ ,

$[T_i, T_{i+1}]$  为相邻控制起始时刻的时间间隔, 根据系统的状态决定;

$\tau$  为控制带宽。

在控制法则(2)下, 系统(1)可以改写为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t)) + Kx(t), & T_i \leq t < T_i + \tau; \\ \dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t)), & T_i + \tau \leq t < T_{i+1}. \end{cases} \quad (3)$$

式(3)为典型的切换系统, 切换的规则仅依赖于时间。周期间歇控制已经有了大量的研究文献, 但是基于非周期的间歇控制理论研究很少。周期间歇控制主要是在相同时间间隔内(即控制宽度  $\tau$  与非控制宽度的时间一定), 在固定的时刻  $T_i$  给予系统控制, 系统的切换法则完全依赖于时间。但是在本文中非周期间歇控制主要是在控制宽度  $\tau$  一定、控制时刻  $T_i$  不定时, 在不确定的时刻给予系统控制, 系统的切换法则主要由系统的时间和状态共同确定。

本文主要通过 Lyapunov-like 函数和线性矩阵不等式(LMI)的方法分析系统(1)在非周期间歇控制(2)下的稳定性条件。

**定义 1** 对于控制系统(3), 如果存在正常数  $a > 0$ , 矩阵  $K > 0$ , 使得系统(3)的解  $x(t)$  满足

$$\|x(t)\| \leq Ke^{-a(t-t_0)} \|x(t_0)\|, \quad t \geq t_0,$$

则称系统(3)是指数稳定的。

由定义 1 可知, 系统(1)在非周期间歇控制律(2)下满足指数稳定。

**引理 1<sup>[11]</sup>** 存在正定矩阵  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$  和一个标量  $\varepsilon > 0$ , 且  $\Sigma_3 = \Sigma_3^T$ , 使矩阵不等式

$$\Sigma_1^T \Sigma_2 + \Sigma_2^T \Sigma_1 \leq \varepsilon \Sigma_1^T \Sigma_3 \Sigma_1 + \varepsilon^{-1} \Sigma_2^T \Sigma_3^{-1} \Sigma_2$$

成立。

**引理 2<sup>[11]</sup>** 存在线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0,$$

等价于

$$R(x) > 0,$$

$$Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) > 0,$$

其中  $Q(x) = Q^T(x), R(x) = R^T(x), S(x)$  完全依赖于  $x$ 。

## 3 指数稳定性条件

本章采用 Lyapunov-like 函数的方法, 分析切换系统(3)在满足指数稳定性时的条件。

**定理 1** 如果存在正定并且对称矩阵  $P$ 、正常数  $\varepsilon_i$  以及常数  $g_i (i=1, 2)$ , 使得下列条件成立:

$$1) PA + A^T P + \varepsilon_1 P^2 + \varepsilon_1^{-1} L + g_1 P + PK + K^T P \leq 0;$$

$$2) PA + A^T P + \varepsilon_2 P^2 + \varepsilon_2^{-1} L - g_2 P \leq 0;$$

$$3) g_1 > 0, g_2 > 0.$$

则切换系统(3)是指数稳定的, 并有估计式

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_M(P)}{\lambda_m(P)}} \|x_0\| \exp(-\gamma(t-\tau)), \forall t > 0.$$

其中： $\lambda_M(P)$ 、 $\lambda_m(P)$ 分别为矩阵  $P$  的最大和最小特征值；

$-\gamma(t-\tau)$  为指数稳定参数，并且满足  $-\gamma(t-\tau) < 0$ 。

**证明** 选取 Lyapunov-like 函数

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t), \quad (4)$$

即有

$$\lambda_m(P)\|x(t)\|^2 \leq V(x(t)) \leq \lambda_M(P)\|x(t)\|^2. \quad (5)$$

当  $T_i \leq t < T_i + \tau$  时，有

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 2x^T P \dot{x} = 2x^T P [Ax + f(x) + Kx] \leq \\ &x^T [PA + A^T P + PK + K^T P]x + \\ &\varepsilon_1 x^T P^2 x + \varepsilon_1^{-1} x^T Lx \leq -g_1 V(x), \end{aligned}$$

从而得不等式

$$\dot{V}(x) \leq -g_1 V(x), \quad T_i \leq t < T_i + \tau. \quad (6)$$

因此当  $T_i \leq t < T_i + \tau$  时

$$V(x(t)) \leq V(x(T_i)) \exp(-g_1(t - T_i)), \quad (7)$$

$$V(x(T_i + \tau)) \leq V(x(T_i)) \exp(-g_1 \tau).$$

当  $T_i + \tau \leq t < T_{i+1}$  时，有

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= 2x^T P [Ax(t) + f(x(t))] \leq \\ &x^T(t) [PA + A^T P + \varepsilon_2 P^2 + \varepsilon_2^{-1} L]x(t) = \\ &g_2 V(x(t)) + x^T(t) [PA + A^T P + \varepsilon_2 P^2 + \\ &\varepsilon_2^{-1} L - g_2 P]x(t) \leq g_2 V(x(t)), \end{aligned}$$

从而得不等式

$$\dot{V}(x) \leq g_2 V(x), \quad T_i + \tau \leq t < T_{i+1}. \quad (8)$$

因此当  $T_i + \tau \leq t < T_{i+1}$  时

$$V(x(t)) \leq V(x(T_i + \tau)) \exp(g_2(t - T_i - \tau)). \quad (9)$$

由式 (7) ~ (9) 可得：

1) 当  $0 \leq t < \tau$  时

$$\begin{aligned} V(x(t)) &\leq V(x_0) \exp(-g_1 t), \\ V(x(\tau)) &\leq V(x_0) \exp(-g_1 \tau). \end{aligned}$$

2) 当  $\tau \leq t < T_1$  时

$$\begin{aligned} V(x(t)) &\leq V(x(\tau)) \exp(g_2(t - \tau)) \leq \\ &V(x_0) \exp(-g_1 \tau + g_2(t - \tau)), \\ V(x(T_1)) &\leq V(x_0) \exp(-g_1 \tau + g_2(T_1 - \tau)). \end{aligned}$$

3) 当  $T_1 \leq t < T_1 + \tau$  时

$$\begin{aligned} V(x(t)) &\leq V(x(T_1)) \exp(-g_1(t - T_1)) \leq \\ &V(x_0) \exp(-g_1 \tau + g_2(T_1 - \tau) - g_1(t - T_1)) = \\ &V(x_0) \exp(-g_1(t - T_1 + \tau) + g_2(T_1 - \tau)), \\ V(x(T_1 + \tau)) &\leq V(x_0) \exp(-2g_1 \tau + g_2(T_1 - \tau)). \end{aligned}$$

4) 当  $T_1 + \tau \leq t < T_2$  时

$$\begin{aligned} V(x(t)) &\leq V(x(T_1 + \tau)) \exp(g_2(t - (T_1 + \tau))) \leq \\ &V(x_0) \exp(-2g_1 \tau + g_2(T_1 - \tau) + g_2(t - (T_1 + \tau))) = \\ &V(x_0) \exp(-2g_1 \tau + g_2(t - 2\tau)), \\ V(x(T_2)) &\leq V(x_0) \exp(-2g_1 \tau + g_2(T_2 - 2\tau)). \end{aligned}$$

5) 当  $T_i \leq t < T_i + \tau$  时

$$\begin{aligned} V(x(t)) &\leq V(x(T_i)) \exp(-g_1(t - T_i)) \leq \\ &V(x_0) \exp(-ig_1 \tau + g_2(T_i - i\tau) - g_1(t - T_i)) \leq \\ &V(x_0) \exp((T_i - i\tau)(g_1 + g_2) - g_1 t) \leq \\ &V(x_0) \exp(-i\tau(g_1 + g_2) - g_1(t - \tau)). \quad (10) \end{aligned}$$

6) 当  $T_i + \tau \leq t < T_{i+1}$  时

$$\begin{aligned} V(x(t)) &\leq V(x(T_i + \tau)) \exp(g_2(t - (T_i + \tau))) \leq \\ &V(x_0) \exp(-(i+1)g_1 \tau + g_2(T_i - i\tau) + g_2(t - (T_i + \tau))) = \\ &V(x_0) \exp(-(i+1)g_1 \tau - (i+1)g_2 \tau + g_2 t) = \\ &V(x_0) \exp(-(i+1)(g_1 + g_2)\tau + g_2 t) \leq \\ &V(x_0) \exp(-i\tau(g_1 + g_2) + g_2(t - \tau)). \quad (11) \end{aligned}$$

因此，对于  $t > 0$  可得到估计式

$$\begin{aligned} V(x(t)) &\leq V(x_0) \exp(-i\tau(g_1 + g_2)) \exp(-g(t - \tau)) = \\ &V(x_0) H \exp(-g(t - \tau)), \quad (12) \end{aligned}$$

式中： $H = \exp(-i\tau(g_1 + g_2))$ ；

$$\exp(-g(t - \tau)) = \max \{ \exp(-g_1(t - \tau)), \exp(g_2(t - \tau)) \}.$$

在式 (4) 以及式 (12) 的条件下，

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_M(P)}{\lambda_m(P)}} \|x_0\| H \exp(-g(t - \tau)), \forall t > 0$$

成立。

由此可知，切换系统 (3) 满足指数稳定。证毕。

## 4 数值分析与仿真

本部分通过对一个实例的数值分析及仿真来验证第 3 部分中非线性系统在非周期间歇控制下，稳定性理论分析的有效性。下面选取的混沌系统<sup>[12]</sup>仿真模型 (13) 与上文理论分析的非线性系统模型 (1) 一致，其中非线性项具有分段函数的特征，符合间歇控制在非周期条件控制下的非线性系统模型 (3)。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha(x_2 - x_1 - g(x_1)), \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = -\beta x_2. \end{cases} \quad (13)$$

式中:  $\alpha, \beta$  为参数;

$g(x_1)$  为系统 (13) 的非线性项, 其具有蔡氏二极管的分段线性特性, 并且有

$$g(x_1) = bx_1 + 0.5(a-b)(|x_1+1| - |x_1-1|), \quad (14)$$

其中  $a, b$  为常数且  $a < b < 0$ 。

系统 (13) 的参数取值如表 1 所示。

表 1 蔡氏混沌系统参数

Table 1 Parameters of the Chua's chaotic system

参数	$\alpha$	$\beta$	$a$	$b$
取值	9.215 6	15.994 6	-1.249 5	-0.757 4

将式 (13) 改写为

$$\dot{x} = Ax + f(x), \quad (15)$$

式中:  $A = \begin{bmatrix} -\alpha - ab & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix};$

$$f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha(a-b)(|x_1+1| - |x_1-1|)}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

在非周期间歇控制下, 式 (15) 可改写为

$$\dot{x} = \begin{cases} Ax + f(x) + u(t), & T_i \leq t < T_i + \tau; \\ Ax + f(x), & T_i + \tau \leq t < T_{i+1}. \end{cases} \quad (16)$$

在对式 (16) 仿真时, 主要控制参数如表 2 所示。

表 2 仿真系统控制参数

Table 2 Control parameters of simulation system

参数	$u(t)$	$\tau$	$T_1$	$T_2$	$T_3$
数据	$-2x(t)$	1 s	3 s	5 s	9 s

表 2 中  $\tau$  为控制时间,  $T_1, T_2, T_3$  分别为每次采取控制的初始时刻。由  $T_1, T_2, T_3$  可以看出控制周期的不同, 说明其满足非周期间歇控制的特点。

利用 Matlab 中的 ODE45 m 程序, 对微分方程与初始条件进行积分求解, 并且利用其中的 LMI 控制工具箱求解线性矩阵不等式, 求得参数 (如表 3 所示) 和矩阵  $P$ 。

表 3 非线性系统指数稳定判据条件参数

Table 3 Conditional parameters of exponential stability criterion for nonlinear systems

参数	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$g_1$	$g_2$
取值	2	3	1	1

$$P = \begin{bmatrix} 1.588 0 & 1.251 2 & 0.486 3 \\ 0.330 8 & 0.278 1 & 1.699 8 \\ 0.127 4 & -0.650 3 & 0.762 5 \end{bmatrix}.$$

由表 3 与矩阵  $P$  可知, 矩阵  $P$  正定,  $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, g_1 > 0, g_2 > 0$ , 符合定理 1 在非周期间歇控制下非线性系统指数稳定的判据条件。

在上述仿真实例中, 主要采用非周期间歇控制方法, 在固定的总时间  $T$  以及控制宽度  $\tau$  的条件下, 对系统 (13) 进行求解, 判断系统的稳定性, 仿真结果如图 1 所示。

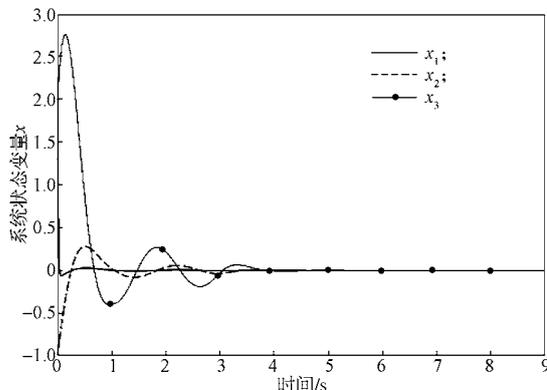


图 1 非周期间歇控制下的控制信号

Fig. 1 Control signal under aperiodic intermittent control

由图 1 可以看出, 系统在非周期间歇控制下处于指数稳定, 即该非线性系统指数稳定。

## 5 结语

本文基于非周期间歇控制方法对一类非线性系统的指数稳定性进行了分析和研究, 给出了一组线性矩阵不等式的稳定判据。经过理论证明与数值仿真, 采用非周期间歇控制可以使非线性系统达到指数稳定。在非周期间歇控制下, 由于控制的时刻点根据系统的状态和时间进行选取, 这样可以有效地减少系统的控制次数, 节省控制成本。

## 参考文献:

- [1] SASTRY S. Nonlinear Systems Analysis, Stability, and Control[EB/OL]. [2018-07-09]. <https://link.springer.com/content/pdf/bfm%3A978-1-4757-3108-8%2F1.pdf>.
- [2] ZHU Q, ZHANG T P, FEI S M, et al. Adaptive Neural Control for a Class of Output Feedback Time Delay Nonlinear Systems[J]. Neurocomputing, 2009, 72(7/8/9): 1985-1992.
- [3] LI Y, LI C D. Complete Synchronization of Delayed Chaotic Neural Networks by Intermittent Control with Two Switches in a Control Period[J]. Neurocomputing, 2016, 173: 1341-1347.
- [4] LI Y. Some New Less Conservative Criteria for Impulsive Synchronization of a Hyperchaotic Lorenz System Based on Small Impulsive Signals[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2010, 11(2): 713-719.
- [5] HAERI M, DEGHANI M. Impulsive Synchronization of Different Hyperchaotic (Chaotic) Systems[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2008, 38(1): 120-131.

[6] 张 腾, 冯立超, 何秀丽. 基于忆阻的神经网络在非周期间歇性控制下的稳定化 [J]. 海南大学学报 (自然科学版), 2017, 35(3): 205-210.  
 ZHANG Teng, FENG Lichao, HE Xiuli. Stabilization of Memristor-Based Neural Network Via a Periodically Intermittent Control[J]. Natural Science Journal of Hainan University, 2017, 35(3): 205-210.

[7] SANCHEZ E N, PEREZ J P. Input-to-State Stability (ISS) Analysis for Dynamic Neural Networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 1999, 46(11): 1395-1398.

[8] MASUBUCHI I, TSUTSUI M. Advanced Performance Analysis and Robust Controller Synthesis for Time-Controlled Switched Systems with Uncertain Switchings[C]//Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control. Orlando: IEEE, 2001, 3: 2466-2471.

[9] MASUBUCHI I, TSUTSUI M. Dynamic Controller Synthesis Guaranteeing L2-Gain for Time-Controlled

Switched Systems[C]//Proceedings of the American Control Conference. Arlington: IEEE, 2001, 2: 874-879.

[10] HUANG T W, LI C D, LIU X Z. Synchronization of Chaotic Systems with Delay Using Intermittent Linear State Feedback[J]. Chaos: an Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 2008, 18(3): 033122.

[11] LI C D, LIAO X F, HUANG T W. Exponential Stabilization of Chaotic Systems with Delay by Periodically Intermittent Control[J]. Chaos: an Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 2007, 17(1): 013103.

[12] SHIL'NIKOV L P. Chua's Circuit: Rigorous Results and Future Problems[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 1994, 4(3): 489-519.

(责任编辑: 邓光辉)



(上接第 91 页)

[5] 陈瑞鹏. 一类无穷多点边值问题正解的存在性 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2010, 26(3): 495-500.  
 CHEN Ruipeng. Existence of Positive Solutions to a Type of Infinite many Points Boundary Value Problems[J]. Pure and Applied Mathematics, 2010, 26(3): 495-500.

[6] 马慧莉, 冯 辉. 一类二阶常微分方程无穷多点边值问题解的存在性 [J]. 数学的实践与认识, 2015, 45(1): 256-260.  
 MA Huili, FENG Hui. Existence Result for Infinite Point Boundary Value Problem of Second Order[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2015, 45(1):

256-260.

[7] JIANG J Q, LIU L S, WU Y H. Symmetric Positive Solutions to Singular System with Multi-Point Coupled Boundary Conditions[J]. Applied Mathematics and Computation, 2013, 220: 536-548.

[8] 郭大钧. 非线性泛函分析 [M]. 2 版. 济南: 山东科学技术出版社, 2001: 314.  
 GUO Dajun. Nonlinear Functional Analysis[M]. 2nd ed. Jinan: Shandong Science and Technology Press, 2001: 314.

(责任编辑: 邓光辉)