doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2019.04.015

一类二阶微分系统多点边值问题正解的存在性

邬玉萍[1, 2]，王　沾[1]，苏　杭[1]，赵育林[1]

（1. 湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007；2. 广西大学 数学与信息科学学院，广西 南宁 530000）

摘　要：讨论了一类二阶非线性微分系统多点边值问题正解的存在性，通过计算得到该问题的 Green 函数及其性质，利用锥不动点定理，得到了该问题正解的存在性充分条件，同时给出具体的数值实例验证了所得结果的可行性。

关键词：二阶微分系统；多点边值问题；不动点定理；Green 函数

中图分类号：O175.8　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2019)04-0087-05

引文格式：邬玉萍，王　沾，苏　杭，等. 一类二阶微分系统多点边值问题正解的存在性 [J]. 湖南工业大学学报，2019，33(4)：87-91，96.

Existence Proof of Positive Solutions to Multi-Point Boundary Value Problems for a Second-Order Differential System

WU Yuping[1, 2]，WANG Zhan[1]，SU Hang[1]，ZHAO Yulin[1]

（1. College of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China；
2. School of Mathematics and Information Science，Guangxi University，Nanning 530000，China）

Abstract：An inquiry has been made into the existence of positive solutions for a class of second-order nonlinear differential systems with multi-point boundary value problems, thus obtaining the Green function and its properties by calculation. The sufficient conditions for the existence of positive solutions of the problems can be obtained by using the fixed point theorem, followed up with a given numerical example to verify the feasibility of the results.

Keywords：second-order differential system；multi-point boundary value problem；fixed-point theorem；Green function

1　研究背景

许多物理现象和几何问题可以由一个或一组非线性微分方程来描述，这类方程解的存在性和多解性等深受学者们关注。20 世纪以来，泛函分析理论得到飞速发展，这为常微分方程边值问题的发展提供了研究的理论基础；同时，随着科学技术的发展，各类边缘科学开始产生和发展，而微分方程边值可以很好地用于解决这些实际问题，从而也进一步促进了微分方程边值问题的发展，使微分方程边值问题在以往的基础之上，形成了许多新的研究方向 [1]。

利用锥不动点定理，并结合 Green 函数的性质，文献 [2] 讨论了如下一类二阶非线性三点边值问题

$$\begin{cases} u''(t)-\alpha u'(t)+\beta u(t)=-f\left(t, u(t)\right), \\ u(0)=0，u(1)=\gamma u(\eta), \end{cases}$$

收稿日期：2018-07-04

基金项目：湖南工业大学大学生研究性学习和创新性实验计划基金资助项目（湖工大教字 [2018]73）

作者简介：邬玉萍（1996-），女，广西桂林人，湖南工业大学学生，主要研究方向为数据分析及数学建模，
E-mail：1454570060@qq.com

至少存在一个正解的条件。

当非线性项 f 满足超线性增长或次线性增长的条件时，文献 [3] 研究了如下一类非线性二阶 m 点边值问题

$$\begin{cases} u''+a(t)u'+b(t)u+h(t)f(u)=0, \\ u'(0)=0,\ u(1)-\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i u(\xi_i)=0, \end{cases}$$

正解的存在性，其中 $\xi_i\in(0,1)$，$\alpha_i\in(0,+\infty)$ 为满足 $\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\xi_i<1$ 的常数。

受文献 [4-7] 的启发，本文运用锥不动点定理讨论如下一类二阶微分系统多点边值问题：

$$\begin{cases} u''(t)+\lambda f(t,u(t),v(t))=0,\ 0<t<1; \\ v''(t)+\mu g(t,u(t),v(t))=0,\ 0<t<1; \\ u(0)=0,\ u(1)-\sum_{i=1}^{p}a_i u(\xi_i)=0; \\ v(0)=0,\ v(1)-\sum_{i=1}^{p}b_i v(\eta_i)=0。 \end{cases} \tag{1}$$

通过计算得到该问题的 Green 函数及其性质，然后利用锥不动点定理，得到了该问题正解的存在性充分条件，同时给出具体的数值实例验证所得结果的可行性。

2 预备引理

引理 1 假设 $0<\xi_1<\cdots<\xi_p<1$，$a_i\in\mathbf{R}$，$i=1,2,\cdots,p$，$\varDelta_1=1-\sum_{i=1}^{p}a_i\xi_i\neq0$，$y(t)\in C[0,1]$，则边值问题

$$\begin{cases} u''(t)+y(t)=0,\ 0<t<1, \\ u(0)=0,\ u(1)-\sum_{i=1}^{p}a_i u(\xi_i)=0, \end{cases} \tag{2}$$

有唯一解，且可表示为

$$u(t)=-\int_0^t(t-s)y(s)\mathrm{d}s+\frac{\int_0^1(1-s)y(s)\mathrm{d}s-\sum_{i=1}^{p}a_i\int_0^{\xi_i}(\xi_i-s)y(s)\mathrm{d}s}{\varDelta_1}t。$$

通过计算,可以得到引理2(具体证明过程从略)。

引理 2 边值问题（2）的 Green 函数为

$$G_1(t,s)=g(t,s)+\frac{t}{\varDelta_1}\sum_{i=1}^{p}a_i g(\xi_i,s),$$

其中

$$g(t,s)=\begin{cases} s(1-t),\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1; \\ t(1-s),\ 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1。 \end{cases} \tag{3}$$

引理 3 式（3）所给出的函数 $g(t,s)$ 具有以下性质：

i）$g(t,s)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上非负连续；

ii）$g(t,s)\leqslant g(s,s)$，$\forall(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$；

iii）对 $\forall c\in[0,1/2]$，$s\in[0,1]$，有

$$\min_{t\in[c,1-c]}g(t,s)\geqslant cg(s,s)。$$

证明 i）由 $g(t,s)$ 的定义可知，$g(t,s)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上显然连续。当 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$ 时，$s(1-t)>0$；当 $0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1$ 时，$s(1-t)>0$。所以对于 $\forall s,t\in[0,1]$，有 $g(t,s)>0$。

ii）固定 s，可知当 $t=s$ 时，$g(t,s)$ 取得最大值，所以对 $\forall s,t\in[0,1]\times[0,1]$，有 $g(t,s)\leqslant g(s,s)$。

iii）当 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$ 时，有 $g'(t,s)=-s<0$；当 $0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1$ 时，有 $g'(t,s)=1-s>0$。从而对 $\forall c\in(0,1/2)$，$s\in[0,1]$，有

$$\min_{t\in[c,1-c]}g(t,s)=\begin{cases} c(1-s),\ s\geqslant\frac{1}{2}; \\ cs,\ s<\frac{1}{2}。 \end{cases}$$

又因为 $cg(s,s)=cs(1-s)$，故

$$\min_{t\in[c,1-c]}g(t,s)\geqslant cg(s,s)。$$

根据引理 3 和函数 $G_1(t,s)$ 的表达式，通过计算，可以得到引理 4。

引理 4 假设 $a_i\geqslant0\ (i=1,2,\cdots,p)$，$\varDelta_1=1-\sum_{i=1}^{p}a_i\xi_i>0$，$0<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_p<1$，则格林函数 G_1 具有以下性质：

i）$G_1(t,s)\le J_1(s)$，$\forall(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$，其中

$$J_1(s)=g(s,s)+\frac{1}{\varDelta_1}\sum_{i=1}^{p}a_i g(\xi_i,s),\ s\in[0,1]。$$

ii）对 $\forall c\in(0,1/2)$，有

$$\min_{t\in[c,1-c]}G_1(t,s)\geqslant cJ_1(s)\geqslant cG_1(t',s),\ \forall t',s\in[0,1]。$$

类似地可以给出边值问题

$$\begin{cases} v''(t)+y(t)=0,\ 0<t<1; \\ v(0)=0,\ v(1)-\sum_{i=1}^{q}b_i v(\eta_i)=0。 \end{cases}$$

的 Green 函数为

$$G_2(t,s)=g(t,s)+\frac{t}{\varDelta_2}\sum_{i=1}^{q}b_i g(\eta_i,s)$$

并且 G_2 具有以下性质：

i）$G_2(t,s)\leqslant J_2(s)$，$\forall(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$，其中 $J_2(s)=g(s,s)+\frac{1}{\varDelta_2}\sum_{i=1}^{q}b_i g(\eta_i,s)$，$s\in[0,1]$。

ii）对 $\forall c\in(0,1/2)$，有

$$\min_{t\in[c,1-c]}G_2(t,s)\geqslant cJ_2(s)\geqslant cG_2(t',s),\ \forall t',s\in[0,1]。$$

为得到主要结果，先给出引理 5。

引理 5[8]　设 E 是 Banach 空间，$K\in E$ 是 E 中的锥，假设 Ω_1, Ω_2 是 E 中的有界开集，$\theta\in\Omega_1$，$\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$，又设 $\Phi: K\bigcap\left(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1\right)\rightarrow K$ 全连续。则 Φ 在 $K\bigcap\left(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1\right)$ 中至少存在一个不动点，如果以下任意一个条件满足：

i）如果 $\|\Phi u\|\leqslant\|u\|$，$\forall u\in K\bigcap\partial\Omega_1$ 并且 $\|\Phi u\|\geqslant\|u\|$，$\forall u\in K\bigcap\partial\Omega_2$；

ii）如果 $\|\Phi u\|\geqslant\|u\|$，$\forall u\in K\bigcap\partial\Omega_1$ 并且 $\|\Phi u\|\leqslant\|u\|$，$\forall u\in K\bigcap\partial\Omega_2$。

3　主要结论及其证明

先作如下假设：

H1）$0<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_p<1$，$a_i\geqslant 0(i=1, 2, \cdots, p)$，$0<\eta_1<\eta_2<\cdots<\eta_q<1$，$b_i\geqslant 0(i=1, 2,\cdots, q)$，$\Delta_1=1-\sum\limits_{i=1}^{p}a_i\xi_i>0$，$\Delta_2=1-\sum\limits_{i=1}^{q}b_i\eta_i>0$；

H2）$f(t, u, v)$，$g(t, u, v)$ 关于 (t, u, v) 在 $[0, 1]\times[0, +\infty)\times[0, +\infty)$ 上非负连续。

定　义：$h_\alpha^{\mathrm{s}}=\lim\limits_{u+v\to\alpha}\sup\max\limits_{t\in[0,1]}\dfrac{h(t,u,v)}{u+v}$，$\alpha=0^+$ 或 $+\infty$；

$h_\beta^{\mathrm{i}}=\lim\limits_{u+v\to\beta}\inf\min\limits_{t\in[c,1-c]}\dfrac{h(t,u,v)}{u+v}$，$\beta=0^+$ 或 $+\infty$。

记 Banach 空间为 X=C$[0, T]$ 的范数为 $\|u\|=\max_{0\leqslant t\leqslant1}|u(t)|$，则空间 $E=X\times X$ 的范数为 $\|(u,v)\|_E=\|u\|+\|v\|$。设映射 $T_1, T_2:E\rightarrow X$，映射 $Q:E\rightarrow E$ 其中

$$T_1(u,v)(t)=\lambda\int_0^1 G_1(t,s)f(s,u(s),v(s))\mathrm{d}s,\ 0\leqslant t\leqslant1;$$

$$T_2(u,v)(t)=\mu\int_0^1 G_2(t,s)g(s,u(s),v(s))\mathrm{d}s,\ 0\leqslant t\leqslant1;$$

$$Q(u,v)=(T_1(u,v),T_2(u,v)),(u,v)\in E。$$

则边值问题（1）的解即为映射 Q 的不动点。

定义锥 $K\in E$ 为

$$K=\Big\{(u,v)\in E: u(t)\geqslant0, v(t)\geqslant0, \forall t\in[0,1],\ \inf_{t\in[c,1-c]}(u(t)+v(t))\geqslant c\|(u,v)\|_E\Big\},$$

其中 $c=\min\{c_1,c_2\}$。

易证 $Q:K\rightarrow K$ 全连续。记

$$A=\int_c^{1-c}J_1(s)\mathrm{d}s,\ B=\int_0^1 J_1(s)\mathrm{d}s,$$

$$C=\int_c^{1-c}J_2(s)\mathrm{d}s,\ D=\int_0^1 J_2(s)\mathrm{d}s。$$

其中 J_1, J_2 如引理 4 中所给出。

当 $f_0^{\mathrm{s}}, g_0^{\mathrm{s}}, f_\infty^{\mathrm{i}}, g_\infty^{\mathrm{i}}\in(0,+\infty)$，对任意的 $\alpha_1, \alpha_2\geqslant 0$，$\alpha'_1, \alpha'_2\geqslant 0$，满足 $\alpha_1+\alpha_2=1$，$\alpha'_1+\alpha'_2=1$。

定义：

$$L_1=\frac{\alpha_1}{cc_1f_\infty^{\mathrm{i}}A},\ L_2=\frac{\alpha_1'}{f_0^{\mathrm{s}}B},\ L_3=\frac{\alpha_2}{cc_2g_\infty^{\mathrm{i}}C},$$

$$L_4=\frac{\alpha_2'}{g_0^{\mathrm{s}}D},\ L_2'=\frac{1}{f_0^{\mathrm{s}}B},\ L_4'=\frac{1}{g_0^{\mathrm{s}}D}。$$

定理 1　假设 H1、H2 成立，$\forall c\in(0,1/2)$，$\alpha_1, \alpha_2\geqslant 0$，$\alpha'_1, \alpha'_2\geqslant 0$，并且 $\alpha_1+\alpha_2=1$，$\alpha'_1+\alpha'_2=1$，则：

a1）如果 $f_0^{\mathrm{s}}=0$，$g_0^{\mathrm{s}}, f_\infty^{\mathrm{i}}, g_\infty^{\mathrm{i}}\in(0,+\infty)$，$L_3<L_4'$，对任意 $\lambda\in(L_1, L_2)$，$\mu\in(L_3, L_4')$，边值问题（1）至少存在一个正解；

a2）如果 $g_0^{\mathrm{s}}=0$，$f_0^{\mathrm{s}}, f_\infty^{\mathrm{i}}, g_\infty^{\mathrm{i}}\in(0,+\infty)$，$L_1<L_2'$，对任意 $\lambda\in(L_1, L_2')$，$\mu\in(L_3,+\infty)$，边值问题（1）至少存在一个正解；

a3）如果 $f_0^{\mathrm{s}}=g_0^{\mathrm{s}}=0$，$g_0^{\mathrm{s}}, f_\infty^{\mathrm{i}}, g_\infty^{\mathrm{i}}\in(0,+\infty)$，对任意 $\lambda\in(L_1,+\infty)$，$\mu\in(L_3,+\infty)$，边值问题（1）至少存在一个正解；

a4）如果 $f_\infty^{\mathrm{i}}=\infty$，$f_0^{\mathrm{s}}, g_0^{\mathrm{s}}, g_\infty^{\mathrm{i}}\in(0,+\infty)$ 或者 $g_\infty^{\mathrm{i}}=\infty$，$f_0^{\mathrm{s}}, g_0^{\mathrm{s}}, g_\infty^{\mathrm{i}}\in(0,+\infty)$ 或者 $f_\infty^{\mathrm{i}}=g_\infty^{\mathrm{i}}=\infty$，$f_0^{\mathrm{s}}, g_0^{\mathrm{s}}\in(0,+\infty)$，对任意 $\lambda\in(0, L_2)$，$\mu\in(0, L_4)$，边值问题（1）至少存在一个正解；

a5）如果 $f_0^{\mathrm{s}}=0$，$f_\infty^{\mathrm{i}}=\infty$，$g_0^{\mathrm{s}}, f_\infty^{\mathrm{i}}\in(0,+\infty)$ 或者 $f_0^{\mathrm{s}}=0$，$f_\infty^{\mathrm{i}}=\infty$，$g_0^{s}, g_\infty^{\mathrm{i}}\in(0,+\infty)$ 或者 $f_0^{\mathrm{s}}=0$，$g_\infty^{\mathrm{i}}=f_\infty^{\mathrm{i}}=\infty$，$g_0^{\mathrm{s}}\in(0,+\infty)$，对任意 $\lambda\in(0,+\infty)$，$\mu\in(0, I_4')$，边值问题（1）至少存在一个正解；

a6）如果 $g_0^{\mathrm{s}}=0$，$g_\infty^{\mathrm{i}}=\infty$，$f_0^{\mathrm{s}}, f_\infty^{\mathrm{i}}\in(0,+\infty)$ 或者 $g_0^{\mathrm{s}}=0$，$f_\infty^{\mathrm{i}}=\infty$，$g_\infty^{\mathrm{i}}, f_0^{\mathrm{s}}\in(0,+\infty)$ 或者 $g_0^{\mathrm{s}}=0$，$g_\infty^{\mathrm{i}}=f_\infty^{\mathrm{i}}=\infty$，$f_0^{\mathrm{s}}\in(0,+\infty)$，对任意 $\lambda\in(0,+\infty)$，$\mu\in(0, I_4')$，边值问题（1）至少存在一个正解；

a7）如果 $f_0^{\mathrm{s}}=g_0^{\mathrm{s}}=0$，$g_\infty^{\mathrm{i}}=\infty$，$f_\infty^{\mathrm{i}}\in(0,+\infty)$ 或者 $f_0=g_0^{\mathrm{s}}=0$，$f_\infty^{\mathrm{i}}=\infty$，$g_\infty^{\mathrm{i}}\in(0,+\infty)$ 或者 $f_0=g_0^{\mathrm{s}}=0$，$f_\infty^{\mathrm{i}}=g_\infty^{\mathrm{i}}=\infty$，对任意 $\lambda\in(0,+\infty)$，$\mu\in(0,+\infty)$，边值问题（1）至少存在一个正解。

结论 a1~a7 的证明过程相似，故仅以结论 a6（即若 $g_0^{\mathrm{s}}=0$，$g_\infty^{\mathrm{i}}=\infty$，对任意 $\lambda\in(0,+\infty)$，$\mu\in(0, I_4')$，边值问题（1）至少存在一个正解）为例给出证明。

证明　由于 H1、H2 成立，并且

$$g_0^{\mathrm{s}}=\lim_{u+v\to0^+}\sup\max_{t\in[0,1]}\frac{g(t,u,v)}{u+v}=0,$$

$$f_0^{\mathrm{s}}=\lim_{u+v\to0^+}\sup\max_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u,v)}{u+v}\in(0,\infty)$$

可知，存在 $R_1>0$，当 $u, v\in\mathbf{R}^+$，$0\leqslant u+v\leqslant R_1$ 时，对任意 $t\in[0,1]$，有 $g(t, u, v)\leqslant\varepsilon(u+v)$，$f(t,u,v)\leqslant(f_0^s+\varepsilon)(u+v)$。

设 $\Omega_1=\left\{(u,v)\in E, \|(u,v)\|_E\leqslant R_1\right\}$，则对 $(u,v)\in$

$K\cap\partial\Omega_1$，有$(u,v)\in K$，并且$\|u\|+\|v\|=R_1$，从而对所有 $t\in[0,1]$，有

$$u(t)+v(t)\leqslant R_1。$$

由引理 4 可知

$$\begin{aligned}T_1(u,v)(t)&\leqslant\lambda\int_0^1 J_1(s)f(s,u(s),v(s))\,\mathrm{d}s\leqslant\\&\lambda\int_0^1 J_1(s)(f_0^{\mathrm{s}}+\varepsilon)(u+v)\,\mathrm{d}s\leqslant\\&\lambda(f_0^{\mathrm{s}}+\varepsilon)\int_0^1 J_1(s)(\|u\|+\|v\|)\,\mathrm{d}s\leqslant\\&\alpha_1\|(u,v)\|_E,\end{aligned}$$

即有

$$\|T_1(u,v)\|\leqslant\alpha_1\|(u,v)\|_E。$$

同理有

$$T_2(u,v)(t)\leqslant\mu\int_0^1 J_2(s)g(s,u(s),v(s))\mathrm{d}s\leqslant\alpha_2\|(u,v)\|_E,$$

即有$\|T_2(u,v)\|\leqslant\alpha_2\|(u,v)\|_E$。所以对于任意$(u,v)\in K\cap\partial\Omega_1$，有

$$\|Q(u,v)\|_E\leqslant(\alpha_1+\alpha_2)\|(u.v)\|_E\leqslant\|(u,v)\|_E。$$

再由 H1、H2 成立，且

$$g_\infty^{\mathrm{i}}=\lim_{u+v\to\infty}\inf\min_{t\in[c,1-c]}\frac{g(t,u,v)}{u+v}=\infty,$$

$$f_\infty^{\mathrm{i}}=\lim_{u+v\to\infty}\inf\min_{t\in[c,1-c]}\frac{f(t,u,v)}{u+v}\in(0,+\infty)$$

可知，存在 $R_2'>0$，当 $u,v>0$ 并且 $u+v\geqslant R_2'$ 时，对任意 $t\in[0,1]$ 有

$$g(t,u,v)\geqslant\frac{1}{\varepsilon}(u+v),f(t,u,v)\geqslant(f_\infty^{\mathrm{i}}-\varepsilon)(u+v)。$$

设 $\Omega_2=\{(u,v)\in E,\|(u,v)\|_E<R_2\}$，其中 $R_2=\max\left\{2R_1,\frac{R_2'}{c}\right\}$，则对任意$(u,v)\in K\cap\partial\Omega_2$，有$(u,v)\in K$并且$\|u\|+\|v\|=R_2$，以及

$$u(t)+v(t)\geqslant\inf_{t\in[c,1-c]}(u(t)+v(t))\geqslant cR_2\geqslant R_2'。$$

由引理 4 可知

$$\begin{aligned}T_1(u,v)(c)&\geqslant\lambda c_1\int_0^1 J_1(s)f(s,u(s),v(s))\,\mathrm{d}s\geqslant\\&\lambda c_1\int_c^{1-c}J_1(s)(f_\infty^{\mathrm{i}}-\varepsilon)(u(s)+v(s))\,\mathrm{d}s\geqslant\\&\lambda c_1(f_\infty^{\mathrm{i}}-\varepsilon)\int_c^{1-c}J_1(s)(\|u\|+\|v\|)\,\mathrm{d}s\geqslant\\&\alpha_1'\|(u,v)\|_E,\end{aligned}$$

即有$\|T_1(u,v)\|\geqslant T_1(u,v)(c)\geqslant\alpha_1'\|(u,v)\|_E$。

同理有$\|T_2(u,v)\|\geqslant T_2(u,v)(c)\geqslant\alpha_2'\|(u,v)\|_E$。

故对于任意的$(u,v)\in K\cap\partial\Omega_2$，有

$$\|Q(u,v)\|_E=\|T_1(u,v)\|+\|T_2(u,v)\|\geqslant(\alpha_1'+\alpha_2')\|(u,v)\|_E,$$

即$\|Q(u,v)\|_E\geqslant\|(u,v)\|_E$。

综上所述，由引理 5 可知，当$R_1\leqslant\|u\|+\|v\|\leqslant R_2$时，映射 Q 在$K\cap(\overline{\Omega}_2\setminus\Omega_1)$上存在一个不动点$(u(t),v(t))$为边值问题（1）的一个正解。证毕。

当$f_0^{\mathrm{i}},g_0^{\mathrm{i}},f_\infty^{\mathrm{s}},g_\infty^{\mathrm{s}}\in(0,+\infty)$，$\beta_1,\beta_2>0$，$\beta_1',\beta_2'>0$，其中$\beta_1+\beta_2=1$，$\beta_1'+\beta_2'=1$，定义：

$$I_1=\frac{\beta_1}{cc_1f_0^{\mathrm{i}}A},I_2=\frac{\beta_1'}{f_\infty^{\mathrm{s}}B},\ I_3=\frac{\beta_2}{cc_2g_0^{\mathrm{i}}C},$$

$$I_4=\frac{\beta_2'}{g_\infty^{\mathrm{s}}D},\ I_2'=\frac{1}{f_\infty^{\mathrm{s}}B},\ I_4'=\frac{1}{g_\infty^{\mathrm{s}}D}。$$

定理 2 假设 H1、H2 成立，$\forall c\in(0,1/2)$，$\beta_1,\beta_2\geqslant0$，$\beta_1',\beta_2'\geqslant0$，并且$\beta_1+\beta_2=1$，$\beta_1'+\beta_2'=1$，则：

b1）如果$g_\infty^{\mathrm{s}}=0$，f_∞^{s}，f_0^{i}，$g_\infty^{i}\in(0,+\infty)$，$I_1<I_2'$，对任意$\lambda\in(I_1,I_2')$，$\mu\in(I_3,+\infty)$，边值问题（1）至少存在一个正解；

b2）如果$f_\infty^{\mathrm{s}}=0$，f_0^{i}，g_∞^{s}，$g_0^{\mathrm{i}}\in(0,+\infty)$，$I_3<I_4'$，对任意$\lambda\in(I_1,+\infty)$，$\mu\in(I_3,I_4')$，边值问题（1）至少存在一个正解；

b3）如果$f_\infty^{\mathrm{s}}=g_\infty^{\mathrm{s}}=0$，$f_0^{\mathrm{i}}$，$g_0^{\mathrm{i}}\in(0,+\infty)$，对任意$\lambda\in(I_1,+\infty)$，$\mu\in(I_3,+\infty)$，边值问题（1）至少存在一个正解；

b4）如果$f_0^{\mathrm{i}}=\infty$，f_∞^{s}，g_0^{i}，$g_\infty^{\mathrm{s}}\in(0,\infty)$，或者$g_0^{\mathrm{i}}=\infty$，$g_\infty^{\mathrm{s}}$，$f_0^{\mathrm{i}}$，$f_\infty^{\mathrm{s}}\in(0,+\infty)$，或者$f_0^{\mathrm{i}}=g_0^{\mathrm{i}}=\infty$，$f_\infty^{\mathrm{s}}$，$g_\infty^{\mathrm{s}}\in(0,+\infty)$，对任意$\lambda\in(0,I_2)$，$\mu\in(0,I_4)$，边值问题（1）至少存在一个正解；

b5）如果$f_0^{\mathrm{s}}=0$，$g_\infty^{\mathrm{i}}=\infty$，$f_\infty^{\mathrm{i}}$，$g_0^{\mathrm{s}}\in(0,\infty)$，或者$f_0^{\mathrm{s}}=0$，$f_\infty^{\mathrm{i}}=\infty$，$g_0^{\mathrm{s}}$，$g_\infty^{\mathrm{i}}\in(0,+\infty)$，或者$f_0^{\mathrm{s}}=0$，$g_\infty^{\mathrm{i}}=f_\infty^{\mathrm{i}}=\infty$，$g_0^{\mathrm{s}}\in(0,+\infty)$，对任意$\lambda\in(0,I_2')$，$\mu\in(0,+\infty)$，边值问题（1）至少存在一个正解；

b6）如果$g_\infty^{\mathrm{s}}=0$，$g_0^{\mathrm{i}}=\infty$，f_∞^{s}，$f_0^{\mathrm{i}}\in(0,\infty)$，或者$g_\infty^{\mathrm{s}}=0$，$f_0^{\mathrm{i}}=\infty$，$g_0^{\mathrm{i}}$，$f_\infty^{\mathrm{s}}\in(0,+\infty)$或者$g_\infty^{\mathrm{s}}=0$，$g_0^{\mathrm{i}}=f_0^{\mathrm{i}}=\infty$，$f_\infty^{\mathrm{s}}\in(0,+\infty)$，对任意$\lambda\in(0,+\infty)$，$\mu\in(0,I_4')$，边值问题（1）至少存在一个正解；

b7）如果$f_\infty^{\mathrm{s}}=g_\infty^{\mathrm{s}}=0$，$g_0^{\mathrm{i}}=\infty$，$f_0^{\mathrm{i}}\in(0,+\infty)$，或者$f_\infty^{\mathrm{s}}=g_\infty^{\mathrm{s}}=0$，$f_0^{\mathrm{i}}=\infty$，$g_0^{\mathrm{i}}\in(0,+\infty)$，或者$f_\infty^{\mathrm{s}}=g_\infty^{\mathrm{s}}=0$，$f_0^{i}=g_0^{i}=\infty$，对任意$\lambda\in(0,+\infty)$，$\mu\in(0,+\infty)$，边值问题（1）至少存在一个正解。

结论 b1~b7 的证明过程相似，故仅以结论 b2（即若$f_\infty^{\mathrm{s}}=0$，$I_3<I_4'$，对任意$\lambda\in(0,+\infty)$，$\mu\in(I_3,I_4')$，边值问题（1）至少存在一个正解）为例给出证明。

证明 由 H1、H2 成立，并且

$$f_0^{\mathrm{i}}=\lim_{u+v\to0^+}\inf\min_{t\in[c,1-c]}\frac{f(t,u,v)}{u+v}\in(0,+\infty),$$

$$g_0^{\mathrm{i}}=\lim_{u+v\to 0^+}\inf\min_{t\in[c,\ 1-c]}\frac{g(t,u,v)}{u+v}\in(0,+\infty)$$

可知，存在 $R_3>0$，当 $u, v\in\mathbf{R}^+$，$0\leqslant u+v\leqslant R_3$ 时，对任意 $t\in[0,1]$，有

$$f(t,u,v)\geqslant\left(f_0^{\mathrm{i}}-\varepsilon\right)(u+v),$$
$$g(t,u,v)\geqslant\left(g_0^{\mathrm{s}}-\varepsilon\right)(u+v)。$$

设 $\Omega_1=\left\{(u,v)\in E,\|(u,v)\|_E\leqslant R_3\right\}$，则对任意 $(u,v)\in K\cap\partial\Omega_1$，有 $(u,v)\in K$，并且 $\|u\|+\|v\|=R_3$，对任意 $t\in[0,1]$，有 $u(t)+v(t)\leqslant R_3$。

由引理 4 可知

$$\begin{aligned}T_1(u,v)(c)&\geqslant\lambda c_1\int_c^{1-c}J_1(s)f(s,u(s),v(s))\mathrm{d}s\geqslant\\&\lambda c_1\int_c^{1-c}J_1(s)\left(f_0^{\mathrm{i}}-\varepsilon\right)(u+v)\mathrm{d}s\geqslant\\&\lambda c_1\left(f_0^{\mathrm{i}}-\varepsilon\right)\int_c^{1-c}J_1(s)(\|u\|+\|v\|)\mathrm{d}s\geqslant\\&\beta_1\|(u,v)\|_E,\end{aligned}$$

即有 $\|T_1(u,v)\|\geqslant\beta_1\|(u,v)\|_E$。

同理 $\|T_2(u,v)\|\geqslant\beta_2\|(u,v)\|_E$，所以对任意 $(u,v)\in K\cap\partial\Omega_1$ 有

$$\|Q(u,v)\|_E=\|T_1(u,v)\|+\|T_2(u,v)\|\geqslant(\beta_1+\beta_2)\|(u,v)\|_E,$$

即 $\|Q(u,v)\|_E\geqslant\|(u,v)\|_E$。

再由 H1、H2 成立，且

$$f_\infty^{\mathrm{s}}=\lim_{u+v\to\infty}\sup\max_{t\in[0,\ 1]}\frac{f(t,u,v)}{u+v}=0,$$

$$g_\infty^{\mathrm{s}}=\lim_{u+v\to\infty}\sup\max_{t\in[0,\ 1]}\frac{g(t,u,v)}{u+v}\in(0,+\infty)$$

可知，存在 $R_4'>0$，当 $u, v>0$，并且 $u, v\geqslant R_4'$ 时，对任意 $t\in[0,1]$，有

$$f(t,u,v)\leqslant\varepsilon(u+v),\ g(t,u,v)\leqslant\left(g_\infty^{\mathrm{s}}+\varepsilon\right)(u+v)。$$

设 $\Omega_2=\left\{(u,v)\in E,\|(u,v)\|_E<R_4\right\}$，其中 $R_4=\max\left\{2R_3,R_4'\right\}$，则对任意 $(u,v)\in K\cap\partial\Omega_2$，有 $(u,v)\in K$，并且 $\|u\|+\|v\|=R_4$，对任意 $t\in[0,1]$ 有 $u(t)+v(t)\leqslant R_4$。

由引理 4 可知

$$T_1(u,v)(t)\leqslant\lambda\varepsilon\int_0^1 J_1(s)(u(s)+v(s))\mathrm{d}s\leqslant\beta_1'\|(u,v)\|_E,$$

即有 $\|T_1(u,v)\|\leqslant T_1(u,v)(t)\leqslant\beta_1'\|(u,v)\|_E$。

同理可知 $\|T_2(u,v)\|\leqslant T_2(u,v)(t)\leqslant\beta_2'\|(u,v)\|_E$。所以对任意的 $(u,v)\in K\cap\partial\Omega_2$，有

$$\begin{aligned}\|Q(u,v)\|_E&=\|T_1(u,v)\|+\|T_2(u,v)\|\leqslant\\&(\beta_1'+\beta_2')\|(u,v)\|_E=\|(u,v)\|_E,\end{aligned}$$

即 $\|Q(u,v)\|_E\leqslant\|(u,v)\|_E$。

综上所述，由引理 5 可知，当 $R_3\leqslant\|u\|+\|v\|\leqslant R_4$ 时，映射 Q 在 $K\cap\left(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1\right)$ 上存在一个不动点 $(u(t),v(t))$ 为边值问题（1）的一个正解。证毕。

4　数值实例

例 1　考虑如下边值问题

$$\begin{cases}u''(t)+\lambda\dfrac{t}{1+t^2}\left[\left(u^2+v^2\right)+(u+v)\right]=0,\\ v''(t)+\mu\dfrac{t^2}{1+t}\left[\left(u^2+v^2\right)+(u+v)\right]=0,\\ u(0)=v(0)=0,\\ u(1)=\dfrac{3}{4}u\left(\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{2}u\left(\dfrac{3}{4}\right),\\ v(1)=\dfrac{1}{4}v\left(\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{3}v\left(\dfrac{2}{3}\right)。\end{cases}$$

因 $\Delta_1=1-\left(\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{7}{16}>0$,

$$\Delta_2=1-\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\right)=\frac{47}{72}>0,$$

$$f(t,u,v)=\frac{t}{1+t^2}\left[\left(u^2+v^2\right)+(u+v)\right],$$

$$g(t,u,v)=\frac{t^2}{1+t}\left[\left(u^2+v^2\right)+(u+v)\right],$$

所以上述边值问题满足条件 H1、H2。

又因为 $f_\infty^{\mathrm{i}}=g_\infty^{\mathrm{i}}=\infty$，由定理 1 中的 a4 可知，对任意 $\lambda\in(0,L_2)$，$\mu\in(0,L_4)$，当 $t\in[0,1]$ 时，该问题至少存在一个正解。

参考文献：

[1] 葛渭高 . 非线性常微分方程边值问题 [M]. 北京：科学出版社，2007：4-7.
GE Weigao. Nonlinear Ordinary Differential Equation Boundary Value Problem[M]. Beijing：Science Press，2007：4-7.

[2] 赵冬霞 . 二阶非线性三点边值问题的正解 [J]. 大庆师范学院学报，2013，33(6)：55-58.
ZHAO Dongxia. Positive Solutions for Nonlinear Second-Order Three-Point Boundary Value Problems[J]. Journal of Daqing Normal University，2013，33(6)：55-58.

[3] MA R Y. Positive Solutions of a Nonlinear *m*-Point Boundary Value Problem[J]. Computers and Mathematics with Applications，2001，42(6/7)：755-765.

[4] 李红玉，孙　飞，张　涛 . 二阶三点边值问题多解的存在性 [J]. 数学的实践与认识，2014，44(5)：206-210.
LI Hongyu，SUN Fei，ZHANG Tao. Existence of Multiple Solutions for Second Order Three-Point Boundary Value Problems[J]. Mathematics in Practice and Theory，2014，44(5)：206-210.

（下转第 96 页）

[6] 张　腾，冯立超，何秀丽 . 基于忆阻的神经网络在非周期间歇性控制下的稳定化 [J]. 海南大学学报（自然科学版），2017，35(3)：205–210.
ZHANG Teng，FENG Lichao，HE Xiuli. Stabilization of Memristor-Based Neural Network Via a Periodically Intermittent Control[J]. Natural Science Journal of Hainan University，2017，35(3)：205–210.
[7] SANCHEZ E N，PEREZ J P. Input-to-State Stability (ISS) Analysis for Dynamic Neural Networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I：Fundamental Theory and Applications，1999，46(11)：1395–1398.
[8] MASUBUCHI I，TSUTSUI M. Advanced Performance Analysis and Robust Controller Synthesis for Time-Controlled Switched Systems with Uncertain Switchings[C]//Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control. Orlando：IEEE，2001，3：2466–2471.
[9] MASUBUCHI I，TSUTSUI M. Dynamic Controller Synthesis Guaranteeing L2-Gain for Time-Controlled Switched Systems[C]//Proceedings of the American Control Conference. Arlington：IEEE，2001，2：874–879.
[10] HUANG T W，LI C D，LIU X Z. Synchronization of Chaotic Systems with Delay Using Intermittent Linear State Feedback[J]. Chaos：an Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science，2008，18(3)：033122.
[11] LI C D， LIAO X F，HUANG T W. Exponential Stabilization of Chaotic Systems with Delay by Periodically Intermittent Control[J]. Chaos：an Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science，2007，17(1)：013103.
[12] SHIL’NIKOV L P. Chua’s Circuit：Rigorous Results and Future Problems[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos，1994，4(3)：489–519.

（责任编辑：邓光辉）

（上接第 91 页）

[5] 陈瑞鹏 . 一类无穷多点边值问题正解的存在性 [J]. 纯粹数学与应用数学，2010，26(3)：495–500.
CHEN Ruipeng. Existence of Positive Solutions to a Type of Infinite many Points Boundary Value Problems[J]. Pure and Applied Mathematics，2010，26(3)：495–500.
[6] 马慧莉，冯　辉 . 一类二阶常微分方程无穷多点边值问题解的存在性 [J]. 数学的实践与认识，2015，45(1)：256–260.
MA Huili，FENG Hui. Existence Result for Infinite Point Boundary Value Problem of Second Order[J]. Mathematics in Practice and Theory，2015，45(1)：256–260.
[7] JIANG J Q，LIU L S，WU Y H. Symmetric Positive Solutions to Singular System with Multi-Point Coupled Boundary Conditions[J]. Applied Mathematics and Computation，2013，220：536–548.
[8] 郭大钧 . 非线性泛函分析 [M]. 2 版 . 济南：山东科学技术出版社，2001：314.
GUO Dajun. Nonlinear Functional Analysis[M]. 2nd ed. Jinan：Shandong Science and Technology Press，2001：314.

（责任编辑：邓光辉）