doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2019.04.006

时变时滞 T-S 模糊系统稳定性分析

陈　云，陈　刚

（湖南工业大学 电气与信息工程学院，湖南 株洲 412007）

摘　要：研究了时变时滞 T-S 模糊系统的稳定性问题。基于 Lyapunov-Krasovskii（L-K）稳定性理论，通过构造一个全新增广 L-K 泛函，采用形式变化的二阶贝塞尔 - 勒让德不等式，结合扩展的逆凸矩阵方法并运用恒零等式，对时变时滞 T-S 模糊系统的稳定性进行分析，获得了保守性更小的稳定性判据。经过 2 个数值实例表明，该判据具有一定的有效性和优越性。

关键词：Lyapunov-Krasovskii 泛函；T-S 模糊系统；时变时滞；稳定性

中图分类号：TP273　　　　**文献标志码**：A　　　　**文章编号**：1673-9833(2019)04-0031-05

引文格式：陈　云，陈　刚，等 . 时变时滞 T-S 模糊系统稳定性分析 [J]. 湖南工业大学学报，2019，33(4)：31-35.

Stability Analysis of T-S Fuzzy System with Time-Varying Delays

CHEN Yun，CHEN Gang

（College of Electrical and Information Engineering，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China）

Abstract：A study has been conducted on the stability of T-S fuzzy system with time-varying delays. Based on Lyapunov-Krasovskii (L-K) stability theory, a new augmented L-K functional can be constructed. By using the second-order Bessel-Legendre inequality with formal variation, an analysis has been made of the stability of T-S fuzzy system with time-varying delays with the extended inverse convex matrix method adopted and the constant-zero equation introduced, thus obtaining a less conservative stability criterion. Two numerical examples illustrate the effectiveness and feasibility of the proposed method.

Keywords：Lyapunov-Krasovskii functional；T-S fuzzy system；time-varying delay；stability

0　引言

1985 年，T. Takagi 等 [1] 首次提出了 T-S 模糊模型，并且把该模型描述为一个复杂的非线性系统。众所周知，在 T-S 模糊系统中普遍存在着时滞，而时滞往往会使得系统的性能恶化和造成系统的不稳定，故时滞问题的处理是不可避免的，且至关重要。在时滞方向上，各种各样的积分不等式推动了时滞研究方向的发展，该方向现已较为成熟 [2-9]。近年来，T-S 模糊系统是控制领域最为活跃的分支之一，时变时滞 T-S 模糊控制系统稳定性分析也已变成了一个热门的控制

收稿日期：2018-08-21

基金项目：湖南省自然科学基金资助项目（2018JJ4075）

作者简介：陈　云（1994-），男，湖南安化人，湖南工业大学硕士生，主要研究方向为事件触发控制，时滞系统，T-S 模糊系统等研究，E-mail：523509343@qq.com

通信作者：陈　刚（1977-），男，湖南新化人，湖南工业大学副教授，主要从事鲁棒控制、时滞系统、网络控制等方向的教学与研究，E-mail：drchengang@163.com

研究领域[10]。

最近，学者们针对 T–S 模糊系统的稳定性分析进行了大量的研究[11–19]，例如，把增广 L–K 泛函与含三重积分的不等式相结合，推出新的判据[13]；用自由权矩阵方法使判据进行优化[11]。在文献 [14] 中，将系统的时滞区间分割成多个时滞区间，并且结合逆凸方法得到的新稳定性判据，使判据的保守性进一步减少。但是先前方法所得到的 T–S 模糊系统稳定性判据仍然存在很大的保守性，如处理积分项时仍使用具有一定的保守性的 Jensen 积分不等式、Writinger 积分不等式；另外，在计算过程中对时滞区间的分割加大了计算负担。因此，本文的主要目的是获得保守性更小的全新判据。

受以上文献启发，本文拟对现有文献中的 L–K 泛函进行改进，在构建增广泛函时尽可能地加入更多有效的状态信息，再利用二阶贝塞尔 – 勒让德不等式和扩展的逆凸矩阵不等式，并且使用一些数学计算技巧得到保守性更小的稳定性判据，最后通过比较现有一些文献的数值算例结果以说明该判据的有效性和优越性。

采用如下标号：$\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^{n\times m}$ 分别代表实数域的 n 维向量空间和 $n\times m$ 的矩阵空间；矩阵 $\boldsymbol{X}$>0 表示矩阵 $\boldsymbol{X}$ 是对称正定阵；$\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{I}$ 分别表示零矩阵和单位矩阵；矩阵或矢量的上标 T 和 −1 分别表示其转置和求逆；$Sym\{\boldsymbol{N}\}$ 表示 $\boldsymbol{N}+\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{N}$ 为矩阵；在块矩阵中，“*”表示其对称项；diag{⋯} 代表块对角矩阵。

1 系统描述

用 E_i 表示模糊系统的第 i 条规则，T–S 模糊系统的模型描述如下：

E_i：IF $\theta_1(t)$ is $F_1^{(1)}$ and $\theta_2(t)$ is $F_2^{(2)}$ and $\theta_j(t)$ is $F_j^{(i)}$ and $\theta_p(t)$ is $F_j^{(r)}$，Then

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_{di}\boldsymbol{x}(t-d(t)),\ \forall t\geqslant 0\\ \boldsymbol{x}(t)=\phi(t),\ t\in[-h,0], i=1,\ 2,\cdots,\ r。\end{cases}\tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbb{R}^n$ 为状态向量；

$\theta_1(t)$，$\theta_2(t)$，⋯，$\theta_p(t)$ 为输入状态变量；

$\boldsymbol{A}_i$、$\boldsymbol{A}_{di}\in\mathbb{R}^n$ 为具有合适维度的系统矩阵；

$F_j^{(i)}$（i=1, 2,⋯, r；j=1, 2, ⋯, p）为模糊集；

i 代表模糊规则的个数；

初始状态$\phi(t)$为给定的向量值；

函数时变时滞 $d(t)$ 满足

$$0\leqslant d(t)\leqslant h 和 \dot{d}(t)\leqslant\mu,\tag{2}$$

其中 h、μ 为常数。

模糊系统模型为：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\dfrac{w_i(\theta(t))\left[\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_{di}\boldsymbol{x}(t-d(t))\right]}{\sum\limits_{i=1}^{r}w_i(\theta(t))}=\\ \quad\sum\limits_{i=1}^{r}\rho_i(\theta(t))\left[\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_{di}\boldsymbol{x}(t-d(t))\right]=\\ \quad\bar{\boldsymbol{A}}_i\boldsymbol{x}(t)+\bar{\boldsymbol{A}}_{di}\boldsymbol{x}(t-d(t))\\ \boldsymbol{x}(t)=\phi(t),\ t\in[-h,0],\ i=1,\ 2,\cdots,r。\end{cases}\tag{3}$$

式中：$w_i(\theta(t))=\sum\limits_{i=1}^{r}F_j^{(i)}(\theta(t))$ ；

$F_j^{(i)}(\theta(t))$ 为 $\theta(t)$ 属于模糊集合 $F_j^{(i)}$ 的隶属度；

$\bar{\boldsymbol{A}}_i=\sum\limits_{i=1}^{r}\rho_i(\theta(t))\boldsymbol{A}_i$；

$\bar{\boldsymbol{A}}_{di}=\sum\limits_{i=1}^{r}\rho_i(\theta(t))\boldsymbol{A}_{di}$；

权函数 $\rho_i(\theta(t))\geqslant 0$，$\sum\limits_{i=1}^{r}\rho_i(\theta(t))=1$。

为获得主要结论，引用如下相关引理。

引理 1[20] 对于正定矩阵 $\boldsymbol{R}\in\mathbb{R}^n$，任意可导函数 $\boldsymbol{x}(s)$、$\boldsymbol{x}(u)\in[a,b]\rightarrow\mathbb{R}^n$，有如下不等式：

$$\int_a^b\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\geqslant\frac{1}{b-a}\boldsymbol{\Omega}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Omega}_1+\frac{3}{b-a}\boldsymbol{\Omega}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Omega}_2+\frac{5}{b-a}\boldsymbol{\Omega}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Omega}_3,\tag{4}$$

式中：$\boldsymbol{\Omega}_1=\boldsymbol{x}(b)-\boldsymbol{x}(a)$；

$$\boldsymbol{\Omega}_2=\boldsymbol{x}(b)+\boldsymbol{x}(a)-\frac{2}{b-a}\int_a^b\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s；$$

$$\boldsymbol{\Omega}_3=\boldsymbol{\Omega}_1+\frac{6}{b-a}\int_a^b\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s-\frac{12}{(b-a)^2}\int_a^b\int_s^b\boldsymbol{x}(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s。$$

引理 2[21] 存在 $\partial\in(0,1)$，对称矩阵 $\boldsymbol{X}_1$>0，$\boldsymbol{X}_2$>0，任意矩阵 $\boldsymbol{S}_1$、$\boldsymbol{S}_2$，有不等式：

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{\partial}\boldsymbol{X}_1 & 0\\ 0 & \frac{1}{1-\partial}\boldsymbol{X}_2\end{bmatrix}\geqslant\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1+(1-\partial)\boldsymbol{T}_1 & (1-\partial)\boldsymbol{S}_1+\partial\boldsymbol{S}_2\\ * & \boldsymbol{X}_2+\partial\boldsymbol{T}_2\end{bmatrix}。\tag{5}$$

式中：$\boldsymbol{T}_1=\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{X}_2^{-1}\boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}}$；

$\boldsymbol{T}_2=\boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{S}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_1^{-1}\boldsymbol{S}_1$。

2 主要结论

为使表达简洁，给出以下定义：

$$\boldsymbol{\eta}_1(t)=\left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t),\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h),\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s,\int_{t-h}^{t}\int_u^t\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}u\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\eta}_2(t)=\left[\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(u),\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(u),\int_u^t\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s,\int_u^t\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\eta}_3(t)=\left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(u),\int_u^t\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s,\int_u^t\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\xi(t)=\Big[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t),\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-d(t)),\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h),\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t-h),$$
$$\frac{1}{d(t)}\int_{t-d(t)}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\,\mathrm{d}s,\ \frac{1}{d^2(t)}\int_{t-d(t)}^{t}\int_u^t\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}u,$$
$$\frac{1}{h-d(t)}\int_{t-h}^{t-d(t)}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\,\mathrm{d}s,\frac{1}{(h-d(t))^2}\int_{t-h}^{t-d(t)}\int_u^{t-d(t)}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}u,$$
$$\int_{t-d(t)}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\,\mathrm{d}s,\frac{1}{d(t)}\int_{t-d(t)}^{t}\int_u^t\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}u,\ \int_{t-h}^{t-d(t)}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\,\mathrm{d}s,$$
$$\left.\frac{1}{h-d(t)}\int_{t-h}^{t-d(t)}\int_u^{t-d(t)}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}u\right]^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{e}_i=\left[\boldsymbol{0}_{n\times(i-1)n}\ \ \boldsymbol{I}_n\ \ \boldsymbol{0}_{n\times(12-i)n}\right],\ i=1,2,\cdots,12。$$

定理 1　给定 $h>0$，μ；$0\leqslant d(t)\leqslant h$ 和 $\dot{d}(t)\leqslant\mu$；存在正定矩阵 $\boldsymbol{P}\in\mathbb{R}^{4n\times4n}$，$\boldsymbol{Q}\in\mathbb{R}^{4n\times4n}$，$\boldsymbol{S}\in\mathbb{R}^{3n\times3n}$，和 $\boldsymbol{R}\in\mathbb{R}^{n\times n}$；任意矩阵 $\boldsymbol{N}_1$、$\boldsymbol{N}_2\in\mathbb{R}^{12n\times2n}$ 和 $\boldsymbol{S}_1$、$\boldsymbol{S}_2\in\mathbb{R}^{3n\times3n}$，有如下矩阵不等式：

$$\boldsymbol{\Phi}_1=\begin{bmatrix}\Xi_1+\Xi_2-\boldsymbol{\psi}_1 & \boldsymbol{\Pi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_2\\ * & -\tilde{\boldsymbol{R}}\end{bmatrix}<0\,,\qquad(6)$$

$$\boldsymbol{\Phi}_2=\begin{bmatrix}\Xi_1+\Xi_2-\boldsymbol{\Psi}_2 & \boldsymbol{\Pi}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_1^{\mathrm{T}}\\ * & -\tilde{\boldsymbol{R}}\end{bmatrix}<0\qquad(7)$$

成立，则系统（3）是渐近稳定的。

式（6）（7）中：

$$\boldsymbol{\Pi}_1=\left[\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{e}_5^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}+6\boldsymbol{e}_5^{\mathrm{T}}-12\boldsymbol{e}_6^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}};$$
$$\boldsymbol{\Pi}_2=\left[\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{e}_7^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}+6\boldsymbol{e}_7^{\mathrm{T}}-12\boldsymbol{e}_8^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}};$$
$$\Xi_1=Sym\left\{\boldsymbol{\Pi}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Pi}_4+\boldsymbol{\Pi}_7^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Pi}_8+d(t)\boldsymbol{\Pi}_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Pi}_{12}\right\}+$$
$$\boldsymbol{\Pi}_5^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Pi}_5-\boldsymbol{\Pi}_6^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Pi}_6+\boldsymbol{\Pi}_9^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Pi}_9-$$
$$(1-\mu)\boldsymbol{\Pi}_{10}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Pi}_{10}+h^2\boldsymbol{e}_{si}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_{si};$$

其中，

$$\boldsymbol{\Pi}_3=\left[\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{e}_9^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{e}_{11}^{\mathrm{T}}\ \ (h-d(t))(\boldsymbol{e}_9^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{e}_{12}^{\mathrm{T}})+d(t)\boldsymbol{e}_{10}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}};$$
$$\boldsymbol{\Pi}_4=\left[\boldsymbol{e}_{si}^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\ \ h\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}-(\boldsymbol{e}_9^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{e}_{11}^{\mathrm{T}})\right]^{\mathrm{T}};$$
$$\boldsymbol{\Pi}_5=\left[\boldsymbol{e}_{si}^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{0}_{n\times12n}^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{0}_{n\times12n}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}};$$
$$\boldsymbol{\Pi}_6=\left[\boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{e}_9^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{e}_{11}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}};$$
$$\boldsymbol{\Pi}_7=\Big[\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{e}_9^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{e}_{11}^{\mathrm{T}}\ \ h\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}-(\boldsymbol{e}_9^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{e}_{11}^{\mathrm{T}})\ \ d(t)\boldsymbol{e}_{10}^{\mathrm{T}}+$$
$$(h-d(t))(\boldsymbol{e}_9^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{e}_{12}^{\mathrm{T}})\Big]^{\mathrm{T}};$$
$$\boldsymbol{\Pi}_8=\left[\boldsymbol{0}_{n\times12n}^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{0}_{n\times12n}^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{e}_{si}^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}};$$
$$\boldsymbol{\Pi}_9=\left[\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{0}_{n\times12n}^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{0}_{n\times12n}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}};$$
$$\boldsymbol{\Pi}_{10}=\left[\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{e}_9^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}};$$
$$\boldsymbol{\Pi}_{11}=\left[\boldsymbol{e}_5^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_5^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{e}_{10}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}};$$
$$\boldsymbol{\Pi}_{12}=\left[\boldsymbol{0}_{n\times12n}^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{e}_{si}^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}};$$

$\boldsymbol{\Xi}_2=2\xi^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{N}_2\boldsymbol{f}_2)\xi(t)=0$；

其中，

$$\boldsymbol{f}_1=d(t)\left[\boldsymbol{e}_5^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{e}_6^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}-\left[\boldsymbol{e}_9^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{e}_{10}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{f}_2=\big(h-d(t)\big)\left[\boldsymbol{e}_7^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{e}_8^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}-\left[\boldsymbol{e}_{11}^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{e}_{12}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}};$$
$$\boldsymbol{\Psi}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Pi}_1\\ \boldsymbol{\Pi}_2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}2\tilde{\boldsymbol{R}} & \boldsymbol{S}_1\\ * & \tilde{\boldsymbol{R}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Pi}_1\\ \boldsymbol{\Pi}_2\end{bmatrix};$$
$$\boldsymbol{\Psi}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Pi}_1\\ \boldsymbol{\Pi}_2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{R}} & \boldsymbol{S}_2\\ * & 2\tilde{\boldsymbol{R}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Pi}_1\\ \boldsymbol{\Pi}_2\end{bmatrix};$$
$$\boldsymbol{e}_{si}=\bar{\boldsymbol{A}}_i\boldsymbol{e}_1+\bar{\boldsymbol{A}}_{di}\boldsymbol{e}_2,\ i=1,2;$$
$$\tilde{\boldsymbol{R}}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{R},3\boldsymbol{R},5\boldsymbol{R}\}。$$

证明　构建 Lyapunov−Krasovskii 泛函如下：

$$V(x_t)=\sum_{i=1}^{4}V_i(x_t)\,,\qquad(8)$$
$$V_1(x_t)=\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\eta}_1(t)\,,\qquad(9)$$
$$V_2(x_t)=\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\eta}_2(s)\mathrm{d}s\,,\qquad(10)$$
$$V_3(x_t)=\int_{t-d(t)}^{t}\boldsymbol{\eta}_3^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{S}\boldsymbol{\eta}_3(s)\mathrm{d}s\,,\qquad(11)$$
$$V_4(x_t)=h\int_{t-h}^{t}\int_{\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta。\qquad(12)$$

当 $\boldsymbol{P}>0$，$\boldsymbol{Q}>0$，$\boldsymbol{S}>0$，$\boldsymbol{R}>0$ 时，有 $\boldsymbol{V}(x_t)>0$。再对 $\boldsymbol{V}(x_t)>0$ 求导，可得：

$$\dot{V}_1(x_t)=\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)Sym\big(\boldsymbol{\Pi}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Pi}_4\big)\xi(t);\qquad(13)$$
$$\dot{V}_2(x_t)=\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\Big(\boldsymbol{\Pi}_5^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Pi}_5-\boldsymbol{\Pi}_6^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Pi}_6+Sym\big(\boldsymbol{\Pi}_7^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Pi}_8\big)\Big)\xi(t);\qquad(14)$$
$$\dot{V}_3(x_t)=\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\Big[\boldsymbol{\Pi}_9^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Pi}_9-(1-\dot{d}(t))\,\boldsymbol{\Pi}_{10}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Pi}_{10}+$$
$$Sym\left\{d(t)\boldsymbol{\Pi}_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Pi}_{12}\right\}\Big]\xi(t);\qquad(15)$$
$$\dot{V}_4(x_t)=\boldsymbol{\xi}^{T}(t)h^2\boldsymbol{e}_{\mathrm{s}i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_{\mathrm{s}i}\boldsymbol{\xi}(t)-h\int_{t-h}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s;\qquad(16)$$
$$\dot{V}(x_t)\leqslant\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Xi}_1\xi(t)-h\int_{t-h}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s。\qquad(17)$$

因此，如下恒零等式 $\boldsymbol{f}_1$ 和 $\boldsymbol{f}_2$ 成立：

$$\boldsymbol{f}_1=d(t)\left[\boldsymbol{e}_5^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{e}_6^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}-\left[\boldsymbol{e}_9^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{e}_{10}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}};\qquad(18)$$
$$\boldsymbol{f}_2=\big(h-d(t)\big)\left[\boldsymbol{e}_7^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{e}_8^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}-\left[\boldsymbol{e}_{11}^{\mathrm{T}}\ \ \boldsymbol{e}_{12}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}。\qquad(19)$$

对于任意矩阵 $\boldsymbol{N}_1$、$\boldsymbol{N}_2$，有：

$$\boldsymbol{\Xi}_2 = 2\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{N}_2\boldsymbol{f}_2)\boldsymbol{\xi}(t) = \boldsymbol{0}。\quad (20)$$

应用引理 1 和引理 2，处理式（17）中的积分项。

$$-h\int_{t-h}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s = -h\int_{t-d(t)}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s - h\int_{t-h}^{t-d(t)}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s \leqslant -\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\left(\frac{h}{d(t)}\boldsymbol{\Pi}_1^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{\Pi}_1 + \frac{h}{h-d(t)}\boldsymbol{\Pi}_2^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{\Pi}_2\right)\boldsymbol{\xi}(t) \leqslant -\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\xi}(t)。\quad (21)$$

式中：

$$\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Pi}_1^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{\Pi}_1 + \boldsymbol{\Pi}_2^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{\Pi}_2 + \frac{d(t)}{h}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Pi}_1\\ \boldsymbol{\Pi}_2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{S}_2\\ * & \tilde{\boldsymbol{R}} - \boldsymbol{S}_1^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{R}}^{-1}\boldsymbol{S}_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Pi}_1\\ \boldsymbol{\Pi}_2\end{bmatrix} + \frac{h-d(t)}{h}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Pi}_1\\ \boldsymbol{\Pi}_2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{R}} - \boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{R}}^{-1}\boldsymbol{S}_2 & \boldsymbol{S}_1\\ * & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Pi}_1\\ \boldsymbol{\Pi}_2\end{bmatrix}。$$

结合式（17）~（21），推导可得：

$$\dot{V}(x_t) \leqslant \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{\Xi}_1 + \boldsymbol{\Xi}_2 - \boldsymbol{\psi})\boldsymbol{\xi}(t)。\quad (22)$$

再运用 Schur 补引理 [2]，证明完毕。

注释 通过构建一个新的增广泛函，增加了更多的系统状态信息，通过后面的数值算例证明，保守性得到了很大的降低。然而，三阶及三阶以上的形式变化的贝塞尔－勒让德不等式的研究仍存然在一定的前景。

3 数值算例

例 1 考虑 T-S 模糊控制系统（3），其中：

$$\bar{\boldsymbol{A}}_1 = \begin{bmatrix}-3.2 & 0.6\\ 0 & -2.1\end{bmatrix},\ \bar{\boldsymbol{A}}_{d1} = \begin{bmatrix}1 & 0.9\\ 0 & 2\end{bmatrix},$$

$$\bar{\boldsymbol{A}}_2 = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -3\end{bmatrix},\ \bar{\boldsymbol{A}}_{d2} = \begin{bmatrix}0.9 & 0\\ 1 & 1.6\end{bmatrix}。$$

表 1 为不同算法 μ 取不同的值时 h 的上界。

表 1 当取不同 μ 时例 1 中 h 的上界

Table 1 Upper delay bound of h of case 1 with different μ values

算法	μ			
	0.03	0.10	0.50	0.90
文献 [11]	0.780 5	0.590 6	0.539 2	0.526 8
文献 [13]	0.836 9	0.723 6	0.715 4	0.701 4
文献 [14]	0.877 1	0.768 7	0.758 4	0.752 4
文献 [16]	1.811 3	1.408 2	1.306 7	1.205 0
本文	2.319 9	1.665 1	1.494 2	1.373 0

从表 1 中看出，当取不同 μ 时，对比文献 [6]、[8]、[9] 和 [11] 中的结果，可以看出本文方法具有明显的优越性。

例 2 考虑 T-S 模糊控制系统（3），其中：

$$\bar{\boldsymbol{A}}_1 = \begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -0.9\end{bmatrix},\ \bar{\boldsymbol{A}}_{d1} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix},$$

$$\bar{\boldsymbol{A}}_2 = \begin{bmatrix}-1 & 0.5\\ 0 & -1\end{bmatrix},\ \bar{\boldsymbol{A}}_{d2} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0.1 & -1\end{bmatrix}。$$

表 2 为不同算法 μ 取不同的值时 h 的上界。

表 2 当取不同 μ 时例 2 中 h 的上界

Table 2 Upper delay bound of h of case 2 with different μ values

算法	μ		
	0	0.1	1.0
文献 [12]	1.597 4	1.495 7	1.264 2
文献 [13]	1.660 9	1.533 2	1.269 6
文献 [14]	2.000 2	1.809 0	1.363 1
文献 [16]	2.039 2	1.823 2	1.326 3
本文	2.047 7	1.851 5	1.343 4

从表 2 中看出，当取不同 μ 时，通过比较近年来不同文献与本文结果，很明显看到本文结果的保守性更小。

4 结语

本研究使用 L-K 泛函方法，对时变时滞 T-S 模糊系统稳定性进行了深入的分析，通过构造一个全新的增广 L-K 泛函，并结合二阶贝塞尔－勒让德不等式、扩展的逆凸方法和恒零等式，推导出了一个新的稳定性判据。在 2 个实例中，通过比较近年来相似文献中的结果，证明了本研究方法的保守性更小。

参考文献：

[1] TAKAGI T，SUGENO M. Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control[J]. IEEE Transactions on Systems，Man，and Cybernetics，1985，SMC-15(1)：116-132.

[2] BOYD S，GHAOUI L E L，FERON E，et al. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory[M]. [S. l.]：Society for Industrial and Applied Mathematics，1994：7-27.

[3] ZENG H B，HE Y，WU M，et al. Free-Matrix-Based Integral Inequality for Stability Analysis of Systems with Time-Varying Delay[J]. IEEE Transactions on Automatic Control，2015，60(10)：2768-2772.

[4] 练红海，肖伸平，陈 刚，等. 基于时间相关 Lyapunov 泛函方法的采样数据系统稳定判据 [J]. 湖南工业大学学报，2017，31(1)：56-59.
LIAN Honghai，XIAO Shenping，CHEN Gang，et al. On the Stability Criteria for Sampled-Data Systems Based

on Time-Dependent Lyapunov Functional Theory[J]. Journal of Hunan University of Technology，2017，31(1)：56-59.

[5] ZENG H B，LIU X G，WANG W. A Generalized Free-Matrix-Based Integral Inequality for Stability Analysis of Time-Varying Delay Systems[J]. Applied Mathematics and Computation，2019，354：1-8.

[6] ZHANG X M，HAN Q L，SEURET A，et al. Overview of Recent Advances in Stability of Linear Systems with Time-Varying Delays[J]. IET Control Theory & Applications，2018，13(1)：1-16.

[7] SEURET A，LIU K，GOUAISBAUT F. Generalized Reciprocally Convex Combination Lemmas and Its Application to Time-Delay Systems[J]. Automatica，2018，95：488-493.

[8] 陈　刚，王　信 . 分析时变时滞系统稳定性的新判据 [J]. 湖南工业大学学报，2017，31(1)：60-63.
CHEN Gang，WANG Xin. A New Criterion for the Stability Analysis of Time Varying Delay Systems[J]. Journal of Hunan University of Technology，2017，31(1)：60-63.

[9] 刘晓桂，王　炜，曾红兵，等 . 不确定时滞电力系统鲁棒稳定性分析 [J]. 湖南工业大学学报，2018，32(4)：40-44.
LIU Xiaogui，WANG Wei，ZENG Hongbing，et al. Robust Stability Analysis of the Uncertain Time-Delay Power System[J]. Journal of Hunan University of Technology，2018，32(4)：40-44.

[10] DEY R，BALAS V E，LIN T C，et al. Improved Delay-Range-Dependent Stability Analysis of a T-S Fuzzy System with Time Varying Delay[C]//2013 IEEE 14th International Symposium on Computational Intelligence and Informatics (CINTI). Budapest：IEEE，2013：173-178.

[11] YANG F S，GUAN S P，WANG D H. Quadratically Convex Combination Approach to Stability of T-S Fuzzy Systems with Time-Varying Delay[J]. Journal of the Franklin Institute，2014，351(7)：3752-3765.

[12] LIU F，WU M，HE Y，et al. New Delay-Dependent Stability Criteria for T-S Fuzzy Systems with Time-Varying Delay[J]. Fuzzy Sets and Systems，2010，161(15)：2033-2042.

[13] KWON O M，PARK M J，LEE S M，et al. Augmented Lyapunov-Krasovskii Functional Approaches to Robust Stability Criteria for Uncertain Takagi-Sugeno Fuzzy Systems with Time-Varying Delays[J]. Fuzzy Sets and Systems，2012，201(16)：1-19.

[14] ZENG H B，PARK J H，XIA J W，et al. Improved Delay-Dependent Stability Criteria for T-S Fuzzy Systems with Time-Varying Delay[J]. Applied Mathematics and Computation，2014，235：492-501.

[15] KWON O M，PARK M J，PARK J H，et al. Stability and Stabilization of T-S Fuzzy Systems with Time-Varying Delays via Augmented Lyapunov-Krasovskii Functionals[J]. Information Sciences，2016，372：1-15.

[16] LIU Y J，PARK J H，LEE S M. Further Results on Stability Criteria for T-S Fuzzy Systems with Time-Varying Delay[C]//2017 36th Chinese Control Conference (CCC). Dalian：IEEE，2017：4261-4265.

[17] XIE X，YUE D，PENG C. Relaxed Real-Time Scheduling Stabilization of Discrete-Time Takagi-Sugeno Fuzzy Systems via an Alterable-Weights-Based Ranking Switching Mechanism[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems，2018，26(6)：3808-3819.

[18] WANG J F，TIAN L，ZHEN Z. Global Lagrange Stability for Takagi-Sugeno Fuzzy Cohen-Grossberg BAM Neural Networks with Time-Varying Delays[J]. International Journal of Control，Automation and Systems，2018，16(4)：1603-1614.

[19] 王　宁，孟宪尧 . 输入采用一般模糊划分的 T-S 模糊控制系统稳定性分析 [J]. 自动化学报，2008，34(11)：1441-1445.
WANG Ning，MENG Xianyao. Stability Analysis of T-S Fuzzy Control System with Inputs Using General Fuzzy Partition[J]. Acta Automatica Sinica，2008，34(11)：1441-1445.

[20] SEURET A，GOUAISBAUT F. Stability of Linear Systems with Time-Varying Delays Using Bessel-Legendre Inequalities[J]. IEEE Transactions on Automatic Control，2018，63(1)：225-232.

[21] ZHANG C K，HE Y，JIANG L，et al. An Extended Reciprocally Convex Matrix Inequality for Stability Analysis of Systems with Time-Varying Delay[J]. Automatica，2017，85：481-485.

（责任编辑：申　剑）