doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2019.03.001

多项复合型黏弹性波问题的离散奇异卷积方法

张海湘，杨雪花，汤 琼

（湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007）

摘 要：针对多项复合型黏弹性波问题，采用离散奇异卷积方法进行数值模拟，给出了详细的离散格式以及边界条件处理方法，并通过数值算例验证了该方法的有效性。研究结果表明，离散奇异卷积方法能很好地处理多项复合型黏弹性波问题中的奇异性和空间高阶导数，同时具有可控精度。

关键词：黏弹性波问题；离散奇异卷积方法；精度；高阶导数

中图分类号：O242.2 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9833(2019)03-0001-05

引文格式：张海湘，杨雪花，汤 琼．多项复合型黏弹性波问题的离散奇异卷积方法 [J]. 湖南工业大学学报，2019，33(3)：1-5.

Discrete Singular Convolution Scheme for Multiple Compound Viscoelastic Wave Flaws

ZHANG Haixiang，YANG Xuehua，TANG Qiong

（College of Science，Hunan University of Technology， Zhuzhou Hunan 412007，China）

Abstract：In view of the multiple compound viscoelastic wave flaws, the discrete singular convolution scheme has been adopted to simulate this model. The detailed discrete formula and the treatment method of boundary condition has been proposed, with the validity of the method being verified by numerical examples. It is demonstrated that the discrete singular convolution method can efficiently deal with singularity and high order space derivatives in the multiple compound viscoelastic waves, with even a more controllable accuracy.

Keywords：viscoelastic wave flaw；discrete singular convolution scheme；accuracy；high order derivative

1 研究背景

随着科学技术的发展，黏弹性弯曲波及其传播问题受到越来越多的重视，如油田勘探和开发、超声波无损探测等问题 [1]。该问题的严谨理论分析十分复杂，目前，数值模拟是研究该类问题的主要手段之一，也是理解黏弹性材料中某些物理量变化规律的主要途径。由于黏弹性弯曲波问题的非局部特征，使得它在研究具有记忆性质、遗传性质材料时更具优势。也正是由于该问题的非局部算子，使得针对它们设计的任何数值方法必然导致未知量的整体依赖性。这就造成低阶的数值方法需要付出巨大的存储代价，并且

收稿日期：2019-03-19

基金项目：国家自然科学基金资助项目（11701168，11601144），湖南省自然科学基金资助项目（2018JJ3108，2018JJ3109，2018JJ4062），湖南省教育厅创新平台开放基金资助项目（16K026），中国博士后基金资助项目（2018M631403）

作者简介：张海湘（1985-），男，湖南宁乡人，湖南工业大学讲师，博士后，主要从事分数阶偏微分方程在图像处理中应用方面的研究，E-mail：hassenzhang@163.com

通信作者：杨雪花（1984-），女，湖南邵阳人，湖南工业大学讲师，博士后，主要从事分数阶偏微分方程数值模拟方面的研究，E-mail：hunanshidayang@163.com

计算量庞大。除此之外，黏弹性弯曲波问题含有未知变量的四阶导数，在许多实际建模中是非常必要的，如梁内波传播、飞行器和导弹的表面构成、平面纹理凹槽形成模拟等[2-3]。此外，科学家和工程师们还发现，多项复合型黏弹性弯曲波问题对弹性梁的固有频率、弯曲应力以及临界纵向荷载的分析也是非常必要的。鉴于此，本文主要讨论如下多项复合型黏弹性弯曲波问题的数值模拟：

$$w_t(x,t)-\int_0^t\Big[(t-s)^{-\alpha}w_{xx}(x,s)-(t-s)^{-\beta}w_{xxxx}(x,s)\Big]\mathrm{d}s=f(x,t)。\quad(1)$$

其初始条件和边界条件分别为

$$w(x,0)=\varphi(x),\ x\in(0,1);\quad(2)$$

$$\begin{cases}w(0,t)=w(1,t)=0, & t\geqslant0,\\ w_{xx}(0,t)=w_{xx}(1,t)=0, & t\geqslant0。\end{cases}\quad(3)$$

其中：$(x,t)\in(0,1)\times(0,T]$；$\alpha,\beta\in(0,1)$。

目前，对模型问题（1）的相关数学性质、数值计算方法的研究相对较少。文献[4]讨论了该问题时间离散的一致估计，但是文献[4]只讨论了时间半离散，没有讨论空间离散和时空全离散的情况，而且时间方向只得到了一阶精度。文献[5]在时间方向采用p阶Runge-Kutta卷积求积方法[6]，空间方向采用有限差分方法求解该模型问题，但是当时间$t\to0$时，并没有导出时间最优收敛阶$O(\Delta t^p)$，仅仅得到了$O(\Delta t\log|\Delta t|)$。

离散奇异卷积（discrete singular convolution，DSC）方法的数学基础是广义函数论[7]以及小波分析理论[8]，特殊地，它可以认为是一种小波配置方法，其广泛应用于各种复杂偏微分方程的数值模拟。文献[9-10]中将DSC方法应用于Fokker-Planck方程。文献[11]将DSC方法应用于描述复杂区域不可压缩流体的Navier-Stokes方程。文献[12]中，非线性Sine-Gordon方程采用DSC方法进行数值模拟，并高效处理问题中出现的奇异性。文献[13]采用DSC方法讨论非线性Cahn-Hilliard方程，克服了原点处的奇异性。上述文献展示了DSC方法的可控精度以及优越的奇异性处理效果。基于以上考虑，本文拟基于DSC方法来研究模型问题（1），给出详细的离散格式以及边界条件处理方法，并通过数值算例验证该方法的高效性。

2 离散奇异卷积方法

奇异卷积的定义为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}K(x-s)\eta(s)\mathrm{d}s,\quad(4)$$

其中$\eta(x)$属于检验函数空间，$K(x-s)$是一个奇异核。

由于$K(x)$形式的多样化，如Hilbert类型、Abel类型、Delta类型等，使得奇异卷积在许多科学工程问题中非常重要。本文主要关注Delta类型奇异核，即$K(x)=\delta^{(n)}(x)$，$n=0, 1, 2, \cdots$，$\delta(x)$，是Dirac Delta函数。

由于核函数的奇异性，导致其不能在数值计算中直接使用，故通过构建序列$\{\delta_\alpha(x)\}$来近似逼近$\delta(x)$，即

$$\lim_{\alpha\to\infty}\delta_\alpha(x)=\delta(x),$$

其中，取$\delta_\alpha(x)$为如下Shannon Delta序列核[14]

$$\delta_\alpha(x)=\frac{\sin(\alpha x)}{\pi x}。\quad(5)$$

由于对于一个给定的α，Shannon Delta序列核可以生成Paley-Wiener重构核B_α^2[15]（即$f(x)\in B_\alpha^2$指的是$f(x)\in L^2(R)$，且它对应的傅里叶函数在区间$[-\alpha, \alpha]$之外为0）中的一组基函数，因此，一个函数$f(x)\in B_\alpha^2$可以由式（6）唯一表示。

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\alpha(x-s)f(s)\mathrm{d}s=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta_\alpha(x-x_k)f(x_k),\quad(6)$$

其中$\{x_k\}$为样本点集。

为了使得式（6）便于计算，必须确定α的值。由于均匀网格只有唯一的一个积分核，比非均匀网格的情形要简单而且方便。因此，一般取Nyquist频率$\alpha=\pi/\varDelta$，其中$\varDelta$表示单元网格的大小。由于Nyquist频率与高频量有关，函数$f(x)$中若含有急剧变化的量，为了满足问题的精度需求，单元网格大小$\varDelta$就必须取足够的小。采用Nyquist频率，式（6）可以写成

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\big(\pi(x-x_k)/\varDelta\big)}{\pi(x-x_k)/\varDelta}f(x_k)。\quad(7)$$

注意到$\delta_\alpha(x)$的傅里叶变换并不是一个连续函数，因此$\delta_\alpha(x)$在坐标空间没有很好的局域特性。根据分布理论，一个分布的光滑性、正则性和局域性可以通过Schwartz类函数加以改善。为了改善$\delta_\alpha(x)$的局域性和渐近性，利用这个正则化原理来正则化Shannon Delta核，得到式（8）所示的Gauss正则化样本尺度函数[16]。

$$\delta_{\varDelta,\sigma}(x)=\frac{\sin(\pi x/\varDelta)}{\pi x/\varDelta}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),\ \sigma>0,\quad(8)$$

式中$\sigma=r\varDelta$，r为任意参数，当$r\in[2.2, 4.0]$时，计算效果较好。

然而，式（6）的求和运算需要无穷多个样本点的信息，所以它在数值计算中是不现实的。通过上述正则化过程的引入，截断误差快速衰减，即具有局域特性。所以在实际计算中，只需在网格点x附近取有限个计算点即可，这里取点数$N=2W+1$。结合

Nyquist 频率、式（6）、式（8）以及所取有限个样本点，可以得到函数 $f(x)$ 的如式（9）所示的离散奇异卷积格式。

$$f^{(n)}(x)\approx\sum_{k=-W}^{W}\delta^{(n)}_{\Delta,\sigma}(x-x_k)f(x_k),\ n=0,1,2,\cdots。\tag{9}$$

根据精度需求，可以合理地选择 r, Δ, W。由于计算格式（9）具有有限计算带宽，使得近似矩阵具有带状结构，这在数值模拟中非常重要。

3 数值离散格式

本章主要介绍模型问题（1）~（3）的全离散格式，在空间方向采用 DSC 方法，时间方向采用向前差分方法，最后通过合适的初边值条件处理，给出详细的全离散格式。

3.1 时间离散

采用向前 Euler 差分方法，离散模型问题（1）中的时间方向导数。令 $t_n=n\tau$，$n=0, 1, 2, \cdots$，其中 τ 为时间步长，并记 $w^n(x)=w(x, t_n)$。那么，当 $t=t_n$ 时，模型问题（1）左边第一项的离散表达式为

$$w_t(x,t_n)=\frac{w^{n+1}(x)-w^n(x)}{\tau}+O(\tau),\ x\in(0,1),\ n\geqslant 0。\tag{10}$$

采用式（11）离散模型问题（1）左边第二项，

$$\begin{aligned}&\int_0^t\left[(t-s)^{-\alpha}w_{xx}(x,s)-(t-s)^{-\beta}w_{xxxx}(x,s)\right]\mathrm{d}s=\\&\sum_{j=0}^{n-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left[(t_n-s)^{-\alpha}w_{xx}(x,s)-(t_n-s)^{-\beta}w_{xxxx}(x,s)\right]\mathrm{d}s\approx\\&\sum_{j=0}^{n-1}\Big[w_{xx}(x,t_j)\int_{t_j}^{t_{j+1}}(t_n-s)^{-\alpha}\,\mathrm{d}s-\\&w_{xxxx}(x,t_j)\int_{t_j}^{t_{j+1}}(t_n-s)^{-\beta}\,\mathrm{d}s\Big]=\\&\sum_{j=0}^{n-1}w_{xx}(x,t_j)\frac{\tau^{1-\alpha}}{\alpha-1}\left[(n-j-1)^{1-\alpha}-(n-j)^{1-\alpha}\right]-\\&\sum_{j=0}^{n-1}w_{xxxx}(x,t_j)\frac{\tau^{1-\beta}}{\beta-1}\left[(n-j-1)^{1-\beta}-(n-j)^{1-\beta}\right]。\end{aligned}\tag{11}$$

为了简化模型问题（1）的离散格式，令 $\alpha_0=\dfrac{\tau^{1-\alpha}}{\alpha-1}$，$\beta_0=\dfrac{\tau^{1-\beta}}{\beta-1}$，$a_j=(n-j-1)^{1-\alpha}-(n-j)^{1-\alpha}$，$b_j=(n-j-1)^{1-\beta}-(n-j)^{1-\beta}$，$j=0, 1, \cdots, n-1$。从而得到时间半离散格式

$$\begin{aligned}&w^{n+1}(x)=w^n(x)+\\&\tau\left[f^n(x)+\alpha_0\sum_{j=0}^{n-1}a_jw_{xx}^j(x)-\beta_0\sum_{j=0}^{n-1}b_jw_{xxxx}^j(x)\right]。\end{aligned}\tag{12}$$

特别地，当 $n=0$ 时，有

$$w^1(x)=w^0(x)+\tau f^0(x)。\tag{13}$$

3.2 空间离散

为了更好地进行空间离散，考虑网格的一致剖分 $\{x_i\}_{i=0}^{N}$，其中 $0=x_0<x_1<\cdots<x_N=1$。令 $h=x_{i+1}-x_i$ 为空间步长，w_i^k 为 $w(x, t)$ 在网格点 (x_i, t_k) 上的近似值，其中 $x_i=ih$，$t_k=k\tau$。根据 DSC 格式（9），当 $x=x_i$ 时，$w^{(n)}(x)$ 可以近似为

$$w^{(n)}(x_i)\approx\sum_{k=i-W}^{i+W}\delta_{\Delta,\sigma}^{(n)}(x_i-x_k)w(x_k)。\tag{14}$$

根据式（12）~（14），可得到模型（1）在点 (x_i, t_{n+1}) 的空间离散格式为

$$\begin{aligned}w_i^{n+1}=w_i^n+\tau\Bigg[&f_i^n+\alpha_0\sum_{j=0}^{n-1}a_j\sum_{k=i-W}^{i+W}\delta_{\Delta,\sigma}^{(2)}(x_i-x_k)w_k^j-\\&\beta_0\sum_{j=0}^{n-1}b_j\sum_{l=i-W}^{i+W}\delta_{\Delta,\sigma}^{(4)}(x_i-x_l)w_l^j\Bigg],\end{aligned}\tag{15}$$

式中 $\delta_{\Delta,\sigma}^{(2)}(x)$ 和 $\delta_{\Delta,\sigma}^{(4)}(x)$ 的具体表达式参见文献 [17]。

特别地，当 $n=0$ 时，$w_i^1=w_i^0+\tau f_i^0$，$1\leqslant i\leqslant N-1$。

在式（15）中，令 $k-i=m$，$l-i=p$，同时注意到 $\delta_{\Delta,\sigma}^{(2)}(x)$ 和 $\delta_{\Delta,\sigma}^{(4)}(x)$ 都为偶函数，则式（15）可以改写为

$$\begin{aligned}w_i^{n+1}=w_i^n+\tau\Bigg[&f_i^n+\alpha_0\sum_{j=0}^{n-1}a_j\sum_{m=-W}^{W}\delta_{\Delta,\sigma}^{(2)}(mh)w_{i+m}^j-\\&\beta_0\sum_{j=0}^{n-1}b_j\sum_{p=-W}^{W}\delta_{\Delta,\sigma}^{(4)}(ph)w_{i+p}^j\Bigg]。\end{aligned}\tag{16}$$

3.3 初边值条件处理

对于给定的初始条件 $w(x, 0)=\varphi(x)$，以及边界条件 $w(0, t)=w(1, t)=0$，直接令

$$\begin{cases}w_i^0=\varphi(x_i),\ \ i=0,1,\cdots,N;\\ w_0^n=w_N^n=0,\ \ n=0,1,\cdots。\end{cases}\tag{17}$$

对边界条件 $w_{xx}(0, t)=w_{xx}(1, t)=0$，$t\geqslant 0$ 的处理，采用反对称方法。假设在左边界的内部节点和外部节点存在关系

$$w_{-k}=c_kw_k+(1-c_k)w_0,\ k=1,2,\cdots,W,\tag{18}$$

式中待定系数 c_k 由边界条件决定。

结合式（14）和式（17），注意到 $\delta_{\Delta,\sigma}^{(2)}(x)$ 是偶函数，为了形式的简化并令 $i=0$（事实上，i 取值的不同对最终的格式没有影响），从而可以得到

$$\begin{aligned}&w_{xx}^n(x_0)=\sum_{k=-W}^{W}\delta_{\Delta,\sigma}^{(2)}(-kh)\,w_k^n=\\&\delta_{\Delta,\sigma}^{(2)}(0)\,w_0^n+\sum_{k=1}^{W}\delta_{\Delta,\sigma}^{(2)}(-kh)\,w_k^n+\\&\sum_{k=-W}^{-1}\delta_{\Delta,\sigma}^{(2)}(-kh)\,w_k^n=\\&\delta_{\Delta,\sigma}^{(2)}(0)\,w_0^n+\sum_{k=1}^{W}\delta_{\Delta,\sigma}^{(2)}(kh)\,w_k^n+\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{W}\delta_{\Delta,\sigma}^{(2)}(kh)w_{-k}^{n}=$$

$$\delta_{\Delta,\sigma}^{(2)}(0)w_{0}^{n}+\sum_{k=1}^{W}\delta_{\Delta,\sigma}^{(2)}(kh)w_{k}^{n}+$$

$$\sum_{k=1}^{W}\delta_{\Delta,\sigma}^{(2)}(kh)\left[c_k w_k^n+(1-c_k)w_0^n\right]=$$

$$\sum_{k=1}^{W}(1+c_k)\delta_{\Delta,\sigma}^{(2)}(kh)w_{k}^{n}\text{。}\tag{19}$$

为了使得 $w_{xx}^n(0)=0$，令 $c_k=-1$，$k=1, 2, \cdots, W$，再利用式（18）可以得到

$$w_{-k}=-w_k,\ k=1, 2, \cdots, W\text{。}\tag{20}$$

因此，式（16）（17）（20）就构成了模型问题（1）~（3）的全离散格式。

3.4　误差分析

随着样本点的增多，本文所提出的 DSC 算法的截断误差具有指数衰减性质，具体分析参见文献[18]，这里直接给出定理 1。

定理 1　如果 $u\in L_\infty(\Omega)\cap L_2(\Omega)\cap C^s(\Omega)$ 且带宽不超过 B，其中 $B<\alpha=\pi/\Delta$，Δ 为网格步长，$s\in\mathbf{Z}^+$，$\sigma=r\Delta>0$，$W\in N$，$W\geqslant sr/\sqrt{2}$，那么有

$$\left\|u^{(s)}-\sum_{k=-W}^{W}\delta_{\Delta,\sigma}^{(s)}(x-x_k)u(x_k)\right\|_{L_\infty(\Omega)}\leqslant\beta\exp\left(-\frac{\gamma^2}{2r^2}\right),\tag{21}$$

其中

$$\gamma=\min\left\{W,\ r^2(\pi-B\Delta)\right\},$$

$$\beta=\frac{\mathrm{e}^{\pi}r(s+1)!}{\Delta^{s}\pi\gamma}\left(\sqrt{2B}\|u\|_{L_2(\Omega)}+2r\|u\|_{L_\infty(\Omega)}\right)\text{。}$$

根据定理 1，若令 $\beta=1$，可以得到推论 1。

推论 1　假设 u 的误差限为 $10^{-\eta}(\eta>0)$，则有

$$r(\pi-B\Delta)>\sqrt{4.61\eta},$$

$$W/r>\sqrt{4.61\eta}\text{。}$$

推论 1 可以为参数 r、W、Δ 的选取提供参考。一般地，r 与 W 成正比，W 的选择取决于精度要求，这也是 DSC 算法是可控精度的主要原因。

4　数值算例

本章给出数值算例来验证 DSC 方法对多项复合型黏弹性波问题数值模拟的高效性和可行性。

令 $t_k=k\tau(k=0, 1, \cdots, M)$，$t_M$ 为计算终止时刻。在数值算例中，网格均采用均匀剖分，时间步长取得足够小，以至于误差主要来自空间方向。为了检验方法的准确性和有效性，考察如下最大相对误差：

$$\|\bullet\|_{L_\infty(\Omega)}=\max\frac{|w_i^{\mathrm{c}}-w_i^{\mathrm{e}}|}{|w_i^{\mathrm{e}}|},$$

式中：w_i^{c} 为点 x_i 的数值解；

w_i^{e} 为点 x_i 的精确解。

考虑模型问题（1）~（3），其中

$$\varphi(x)=1-\cos 2\pi x+2\pi^2x(1-x),\ 0\leqslant x\leqslant 1\text{。}$$

令问题的精确解为

$$w(x,t)=(t+1)\left[1-\cos 2\pi x+2\pi^2x(1-x)\right],\tag{22}$$

相对应的强制项为

$$f(x,t)=1-\cos 2\pi x+2\pi^2x(1-x)+$$

$$\frac{4\pi^2}{1-\alpha}(1-\cos 2\pi x)\left(t^{1-\alpha}+\frac{t^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right)-$$

$$\frac{16\pi^2}{1-\beta}\cos 2\pi x\left(t^{1-\beta}+\frac{t^{2-\beta}}{2-\beta}\right)\text{。}\tag{23}$$

为了验证参数 r、W 对数值模拟结果的影响，通过选取不同的参数进行对比。

令 $N=W=10$，$\alpha=1/2$，$\beta=1/3$，固定时间步长 $\tau=10^{-4}$，不同 r 下 L_∞ 的相对误差与参数 M 的关系如表 1 所示。

表 1　$\tau=10^{-4}$ 时不同 r 下 L_∞ 的相对误差与 M 的关系

Table 1　Relationship between L_∞ relative errors and M under different r with $\tau=10^{-4}$

M	L_∞ 的相对误差	
	r=2.2	r=3.2
10	1.140 7e−008	6.620 6e−006
50	1.574 0e−007	9.083 5e−005
100	4.558 5e−007	2.602 7e−004
500	5.156 6e−006	2.736 9e−003

由表 1 可知：r=2.2 时的模拟结果优于 r=3.2 的。

为了考察时间步长对 L_∞ 的影响，将时间步长更改为 $\tau=10^{-3}$，其余参数与表 1 相同，数值模拟结果如表 2 所示。

表 2　$\tau=10^{-3}$ 时不同 r 下 L_∞ 的相对误差与 M 的关系

Table 2　Relationship between L_∞ relative errors and M under different r with $\tau=10^{-3}$

M	L_∞ 的相对误差	
	r=2.2	r=3.2
10	3.564 7e−007	2.075 6e−004
50	4.890 4e−006	2.632 1e−003
100	1.415 1e−005	7.304 3e−003
500	1.509 3e−004	7.613 2e−002

由表 2 可知，与表 1 的结论类似：r=2.2 时的模拟结果优于 r=3.2 的，但是长时间步长的 L_∞ 误差更大。

令 $N=20$，$\alpha=1/2$，$\beta=1/3$，$r=2.2$，$\tau=10^{-4}$，探讨 W 的不同取值对数值模拟结果的影响，结果如表 3 所示。

表 3　不同 W 下 L_∞ 的相对误差与 M 的关系

Table 3　Relationship between L_∞ relative errors and M under different W

M	L_∞ 的相对误差		
	W=12	W=10	W=8
10	9.976 0e−009	5.788 2e−006	4.715 8e−004
50	1.021 0e−007	6.080 0e−005	4.953 7e−003
100	2.166 2e−007	1.343 8e−004	1.094 9e−002
500	7.784 4e−007	6.491 5e−004	5.288 6e−002

表 3 的结果表明：样本点取得越多（W 越大），所得到数值结果的精度越高。

为了验证 DSC 方法对这一类模型的有效性，固定 $N=W=10$，$r=2.2$，$\tau=10^{-4}$，探讨 α、β 的不同取值对数值模拟结果的影，结果如表 4 所示。

表 4　不同 α、β 下 L_∞ 的相对误差与 M 的关系

Table 4　Relationship between L_∞ relative errors and M under different α and β

M	L_∞ 的相对误差		
	$\alpha=1/3$，$\beta=1/4$	$\alpha=1/5$，$\beta=1/6$	$\alpha=1/2$，$\beta=1/5$
10	5.076 5e−008	1.216 1e−008	3.564 5e−007
50	9.322 2e−007	2.602 3e−007	4.890 1e−006
100	3.026 8e−006	9.313 5e−007	1.415 0e−005
500	4.389 1e−005	1.709 8e−005	1.508 4e−004

表 4 中结果表明：对于不同的 α、β，只需采用少量的样本点，其数值结果就比较理想。这也说明了 DSC 方法对这一类多项复合型黏弹性波问题的求解是可行的，并且非常高效。

5　结语

本文研究了 DSC 算法在多项复合型黏弹性波问题中的应用。给出了详细的全离散方法以及边界处理方法，指出了 DSC 算法的指数收敛特征，解释了 DSC 算法的可控精度以及处理奇异核的高效性，并通过推论给出了参数的选取规律，最后给出数值算例验证了 DSC 算法的可行性和高效性以及参数选取对算法精度的影响。

参考文献：

[1] RENARDY M，HRUSA W，NOHEL J A. Mathematical Problems in Viscoelasticity[M]. New York：Longman Scientific and Technical，1987：36−42.

[2] DU Q，JU L，TIAN L. Analysis of a Mixed Finite-Volume Discretization of Fourth-Order Equations on General Surfaces[J]. IMA Journal of Numerical Analysis，2009，29(2)：376−403.

[3] WEI G W，ZHAO Y B，XIANG Y. Discrete Singular Convolution and Its Application to the Analysis of Plates with Internal Supports. Part 1：Theory and Algorithm[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering，2002，55(8)：913−946.

[4] XU D. The Time Discretization in Classes of Integro-Differential Equations with Completely Monotonic Kernels：Weighted Asymptotic Stability[J]. Science China Mathematics，2013，56(2)：395−424.

[5] XU D. Numerical Solutions of Viscoelastic Bending Wave Equations with Two Term Time Kernels by Runge-Kutta Convolution Quadrature[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B，2017，22(6)：2389−2416.

[6] LUBICH C. Runge-Kutta Theory for Volterra and Abel Integral Equations of the Second Kind[J]. Mathematics of Computation，1983，41：87−102.

[7] SCHWARZ L. Theore Des Distributions[M]. Paris：Hermann，1951：103−125.

[8] WEI G W. Wavelets Generated by Using Discrete Singular Convolution Kernels[J]. Journal of Physics A：Mathematical and General，2000，33(47)：8577−8596.

[9] WEI G W. Discrete Singular Convolution for the Solution of the Fokker-Planck Equation[J]. The Journal of Chemical Physics，1999，110(18)：8930−8942.

[10] WEI G W. A Unified Approach for the Solution of the Fokker-Planck Equation[J]. Journal of Physics A：Mathematical and General，2000，33(27)：4935−4953.

[11] WEI G W. A New Algorithm for Solving Some Mechanical Problems[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering，2001，190(15/16/17)：2017−2030.

[12] WEI G W. Discrete Singular Convolution for the Sine-Gordon Equation[J]. Physica D：Nonlinear Phenomena，2000，137(3/4)：247−259.

[13] GUAN S G，LAI C H，WEI G W. Fourier-Bessel Analysis of Patterns in a Circular Domain[J]. Physica D：Nonlinear Phenomena，2001，151(2/3/4)：83−98.

[14] CHUI C K. An Introduction to Wavelets[M]. Boston：Academic Press，1992：56−79.

[15] WEI G W. Discrete Singular Convolution for the Solution of the Fokker-Planck Equation[J]. The Journal of Chemical Physics，1999，110(18)：8930−8942.

[16] WEI G W. Quasi Wavelets and Quasi Interpolating Wavelets[J]. Chemical Physics Letters，1998，296(3/4)：215−222.

[17] YANG X H，XU D，ZHANG H X. Crank-Nicolson/Quasi-Wavelets Method for Solving Fourth Order Partial Integro-Differential Equation with a Weakly Singular Kernel[J]. Journal of Computational Physics，2013，234：317−329.

[18] QIAN L W. On the Regularized Whittaker-Kotel' Nikov-Shannon Sampling Formula[J]. Proceedings of the American Mathematical Society，2003，131(4)：1169−1176.

（责任编辑：邓光辉）