doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2019.01.008

脉冲传输方程解的存在性

叶国炳[1]，叶 轩[2]，欧恺予[1]

（1. 湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007；2. 江汉大学 设计学院，湖北 武汉 430056）

摘 要：研究了脉冲传输方程解的存在性，运用迭代法与特征线法获得了齐次、非齐次方程的解，并举例说明了所得的结果。

关键词：脉冲齐次传输方程；脉冲非齐次传输方程；解的存在性；迭代法；特征线法

中图分类号：O175.14 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9833(2019)01-0050-04

引文格式：叶国炳，叶 轩，欧恺予 . 脉冲传输方程解的存在性 [J]. 湖南工业大学学报，2019，33(1)：50-53.

A Study on the Existence of Solutions for Impulsive Transport Equations

YE Guobing[1]，YE Xuan[2]，OU Kaiyu[1]

（1. College of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China；
2. School of Design，Jianghan University，Wuhan 430056，China）

Abstract：A study has been carried out on the existence of solutions for impulse transport equations. The solutions of the corresponding homogeneous and inhomogeneous equations can be obtained by using iteration method and characteristic line method, with examples given to illustrate the results.

Keywords：impulsive homogeneous transport equation；impulsive non-homogeneous transport equation；existence of solution；iterative method；characteristic method

1 研究背景

本文考虑脉冲齐次传输方程

$$\begin{cases} u_t(t,\boldsymbol{x})+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{D}u=0, \quad (t,\boldsymbol{x})\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n,\ t\neq t_k; \\ u\left(t_k^+,\boldsymbol{x}\right)-u\left(t_k,\boldsymbol{x}\right)=I_k\left(u\left(t_k,\boldsymbol{x}\right)\right), \quad k\in\mathbb{N}; \\ u\left(0,\boldsymbol{x}\right)=f(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n。\end{cases} \tag{1}$$

和脉冲非齐次传输方程

$$\begin{cases} u_t(t,\boldsymbol{x})+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{D}u=g(t,\boldsymbol{x}),\ (t,\boldsymbol{x})\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n,\ t\neq t_k; \\ u\left(t_k^+,\boldsymbol{x}\right)-u\left(t_k,\boldsymbol{x}\right)=I_k\left(u(t_k,\boldsymbol{x})\right), \quad k\in\mathbb{N}; \\ u\left(0,\boldsymbol{x}\right)=f(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n。\end{cases} \tag{2}$$

解的存在性。

式（1）~（2）中：$0=t_0<t_1<\cdots<t_k<t_{k+1}<\cdots<+\infty$；

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，$\dfrac{\partial}{\partial x_i}f$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$在$\mathbb{R}^n$上存在，且$f\in C^1\left(\mathbb{R}^n\right)$；

$g:[0,\infty)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，并且 g, $g_{x_i}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 在$\left[t_k,\ t_{k+1}\right)\times\mathbb{R}^n$ $\left(k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\right)$上连续；

$I_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，且$I_k\in C^1(\mathbb{R})$ $(k\in\mathbb{N})$；

$u:[0,\ \infty)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，并且 u_t, u_{x_i} $(i=1,\ 2,\cdots,\ n)$ 在$\left(t_k,\ t_{k+1}\right)\times\mathbb{R}^n$ $\left(k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\right)$内存在；

$u\left(t_k^+,\boldsymbol{x}\right)$、$u\left(t_k^-,\boldsymbol{x}\right)=u\left(t_k,\boldsymbol{x}\right)$都存在，其中$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，

收稿日期：2018-10-22
基金项目：国家自然科学基金资助项目（61703154）
作者简介：叶国炳（1962-），男，广东龙川人，湖南工业大学教授，硕士，主要从事微分方程的教学与研究，
E-mail：875648726@qq.com

$k\in\mathbb{N}$；

$u(t_0^+,\boldsymbol{x})=u(t_0,\boldsymbol{x})$；

$\boldsymbol{D}u=(u_{x_1},u_{x_2},\cdots,u_{x_n})$；

$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$是一个 n 维常向量。

脉冲偏微分方程理论近年来有了长足的发展 [1-3]，已被应用于模拟理论物理、人口动力学、生物技术等领域 [1-2]。文献 [2-5] 通过运用比较原理、迭代法、上下解法、不动点定理，分别考虑了脉冲双曲微分方程解的存在性。文献 [1, 6-10] 利用比较原理与上下解法，分别研究了脉冲抛物微分方程解的存在性。文献 [10-12] 探讨了脉冲偏微分方程解的存在性，其中运用了半群理论、Lebesgue 控制收敛定理、Ascoli-Arzela 定理和不动点定理。

传输方程是一阶线性偏微分方程，研究它的解有一些特殊的方法 [13-14]。目前，尚未检索到关于脉冲传输方程解的存在性的文献。因此，研究脉冲传输方程解的存在性具有一定的意义。

2　预备知识

引理 1　设$f_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，且$\dfrac{\partial}{\partial x_i}f_k\ (i\in\mathbb{N})$在$\mathbb{R}^n$上存在，则方程

$$\begin{cases}u_t(t,\boldsymbol{x})+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{D}u=0,\quad (t,\boldsymbol{x})\in(t_k,t_{k+1})\times\mathbb{R}^n;\\ u(t_k^+,\boldsymbol{x})=f_k(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\}。\end{cases}\tag{3}$$

的解为

$$u(t,\boldsymbol{x})=f_k[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}(t-t_k)],\ (t,\boldsymbol{x})\in(t_k,t_{k+1})\times\mathbb{R}^n。\tag{4}$$

显然，式（4）满足方程（3）。

引理 2　设$f_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，且$\dfrac{\partial}{\partial x_i}f_k\ (i\in\mathbb{N})$在$\mathbb{R}^n$上存在，则方程

$$\begin{cases}u_t(t,\boldsymbol{x})+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{D}u=g(t,\boldsymbol{x}),\ (t,\boldsymbol{x})\in(t_k,t_{k+1})\times\mathbb{R}^n;\\ u(t_k^+,\boldsymbol{x})=f_k(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\}。\end{cases}\tag{5}$$

的解为

$$u(t,\boldsymbol{x})=f_k[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}(t-t_k)]+\int_{t_k}^t g(s,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}(s-t))\mathrm{d}s,\quad (t,\boldsymbol{x})\in(t_k,t_{k+1})\times\mathbb{R}^n。\tag{6}$$

证明　由式（5）得

$$u(t_k^+,\boldsymbol{x})=f_k(\boldsymbol{x}),$$
$$u_t=-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{D}f_k[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}(t-t_k)]-\int_{t_k}^t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{D}g(s,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}(s-t))\mathrm{d}s+g(t,\boldsymbol{x}),$$
$$\boldsymbol{D}u=\boldsymbol{D}f_k[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}(t-t_k)]+\int_{t_k}^t\boldsymbol{D}g(s,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}(s-t))\mathrm{d}s。$$

这样，式（6）满足方程（5）。证毕。

3　主要结论

定理 1　脉冲齐次传输方程（1）的解为

$$\begin{cases}u(t,\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}t)+\sum\limits_{0<i<k+1}I_i(u(t_i,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}(t-t_i))),\\ \quad (t,\boldsymbol{x})\in(t_k,t_{k+1})\times\mathbb{R}^n,k\in\mathbb{N}\cup\{0\};\\ u(t_{k+1},\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}t_{k+1})+\sum\limits_{0<i<k+1}I_i(u(t_i,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}(t_{k+1}-t_i))),\\ \quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,k\in\mathbb{N}\cup\{0\};\\ u(t_{k+1}^+,\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}t_{k+1})+\sum\limits_{0<i<k+1}I_i(u(t_i,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}(t_{k+1}-t_i)))+\\ \quad I_{k+1}(u(t_{k+1},\boldsymbol{x}))。\end{cases}\tag{7}$$

证明　1）当 k=0 时，对于$(t,\boldsymbol{x})\in(t_0,t_1)\times\mathbb{R}^n$，$u(t,\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}t)$，有

$$u_t(t,\boldsymbol{x})+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{D}u=-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{D}f+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{D}f=0,\tag{8}$$

且显然有

$$u(t_1^+,\boldsymbol{x})-u(t_1,\boldsymbol{x})=I_1(u(t_1,\boldsymbol{x})),\ u(0,\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})。\tag{9}$$

由式（1）、（8）和式（9）即得：当 k=1 时，对于$(t,\boldsymbol{x})\in(t_k,t_{k+1})\times\mathbb{R}^n$，方程（1）的解是式（7）。

2）假设当 $k\leqslant m$ 时，对于$(t,\boldsymbol{x})\in(t_k,t_{k+1})\times\mathbb{R}^n$，方程（1）的解是式（7），即有

$$\begin{cases}u(t,\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}t)+\sum\limits_{0<i<k+1}I_i(u(t_i,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}(t-t_i))),\\ \quad (t,\boldsymbol{x})\in(t_k,t_{k+1})\times\mathbb{R}^n,k\in\{0,1,\cdots,m\};\\ u(t_{k+1},\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}t_{k+1})+\sum\limits_{0<i<k+1}I_i(u(t_i,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}(t_{k+1}-t_i))),\\ \quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,k\in\{0,1,\cdots,m\};\\ u(t_{k+1}^+,\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}t_{k+1})+\sum\limits_{0<i<k+1}I_i(u(t_i,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}(t_{k+1}-t_i)))+\\ \quad I_{k+1}(u(t_{k+1},\boldsymbol{x}))。\end{cases}\tag{10}$$

当 $k\leqslant m+1$ 时，对于$(t,\boldsymbol{x})\in(t_{m+1},t_{m+2})\times\mathbb{R}^n$，$u(t,\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}t)+\sum\limits_{0<i<m+2}I_i(u(t_i,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}(t-t_i)))$，有

$$\begin{aligned}&u_t(t,\boldsymbol{x})+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{D}u=\\ &-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{D}f-\sum_{0<i<m+2}I_i'(u(t_i,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}(t-t_i)))\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{D}u+\\ &\boldsymbol{a}\cdot\left[\boldsymbol{D}f+\sum_{0<i<m+2}I_i'(u(t_i,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}(t-t_i)))\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{D}u\right]=0。\end{aligned}\tag{11}$$

且显然有

$$u(t_{m+2}^+,\boldsymbol{x})-u(t_{m+2},\boldsymbol{x})=I_{m+2}(u(t_{m+2},\boldsymbol{x}))。\tag{12}$$

由方程（1）和式（10）~（12）即得：当 $k\leqslant m+1$ 时，对于$(t,\boldsymbol{x})\in(t_k,t_{k+1})\times\mathbb{R}^n$，方程（1）的解是式（7）。证毕。

定理 2　脉冲非齐次传输方程（2）的解为

$$\begin{cases}u(t,\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}t)+\int_0^t g(s,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}(s-t))\mathrm{d}s+\\ \quad\sum\limits_{0<i<k+1} I_i\left(u\left(t_i,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}(t-t_i)\right)\right),\\ \quad(t,\boldsymbol{x})\in(t_k,t_{k+1})\times\mathbb{R}^n,\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\};\\ u(t_{k+1},\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}t_{k+1})+\int_0^{t_{k+1}} g(s,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}(s-t_{k+1}))\mathrm{d}s+\\ \quad\sum\limits_{0<i<k+1} I_i\left(u\left(t_i,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}(t_{k+1}-t_i)\right)\right),\\ \quad\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\};\\ u(t_{k+1}^+,\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}t_{k+1})+\int_0^{t_{k+1}} g(s,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}(s-t_{k+1}))\mathrm{d}s+\\ \quad\sum\limits_{0<i<k+1} I_i\left(u\left(t_i,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}(t_{k+1}-t_i)\right)\right)+I_{k+1}\left(u(t_{k+1},\boldsymbol{x})\right)。\end{cases} \tag{13}$$

证明 当$(t,\boldsymbol{x})\in(t_0,t_1)\times\mathbb{R}^n$时，由方程（2）、（5）和式（6）得

$$\begin{cases}u(t,\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}t)+\int_0^t g(s,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}(s-t))\mathrm{d}s,\\ u(t_1,\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}t_1)+\int_0^{t_1} g(s,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}(s-t_1))\mathrm{d}s,\\ u(t_1^+,\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}t_1)+\int_0^{t_1} g(s,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}(s-t_1))\mathrm{d}s+\\ \quad I_1\left(u(t_1,\boldsymbol{x})\right)。\end{cases} \tag{14}$$

当$(t,\boldsymbol{x})\in(t_1,t_2)\times\mathbb{R}^n$时，由方程（2）、（5）和式（6）、（14）得

$$\begin{aligned}u(t,\boldsymbol{x})&=f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}t)+\int_0^{t_1} g(s,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}(s-t))\mathrm{d}s+\\ &\quad I_1\left(u\left(t_1,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}(t-t_1)\right)\right)+\int_{t_1}^t g(s,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}(s-t))\mathrm{d}s=\\ &\quad f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}t)+\int_0^t g(s,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}(s-t))\mathrm{d}s+\\ &\quad I_1\left(u\left(t_1,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}(t-t_1)\right)\right)。\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{cases}u(t,\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}t)+\int_0^t g(s,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}(s-t))\mathrm{d}s+\\ \quad I_1\left(u\left(t_1,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}(t-t_1)\right)\right),\\ u(t_2,\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}t_2)+\int_0^{t_2} g(s,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}(s-t_2))\mathrm{d}s+\\ \quad I_1\left(u\left(t_1,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}(t_2-t_1)\right)\right),\\ u(t_2^+,\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}t_2)+\int_0^{t_2} g(s,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}(s-t_2))\mathrm{d}s+\\ \quad I_1\left(u\left(t_1,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}(t_2-t_1)\right)\right)+I_2\left(u(t_2,\boldsymbol{x})\right)。\end{cases} \tag{15}$$

当$(t,\boldsymbol{x})\in(t_2,t_3)\times\mathbb{R}^n$时，由方程（2）、（5）和式（6）、（15）得

$$\begin{aligned}u(t,\boldsymbol{x})&=f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}t)+\int_0^{t_2} g(s,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}(s-t))\mathrm{d}s+\\ &\quad I_1\left(u\left(t_1,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}(t-t_1)\right)\right)+I_2\left(u\left(t_2,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}(t-t_2)\right)\right)+\\ &\quad\int_{t_2}^t g(s,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}(s-t))\mathrm{d}s。\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{cases}u(t,\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}t)+\int_0^t g(s,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}(s-t))\mathrm{d}s+\\ \quad\sum\limits_{0<i<3} I_i\left(u\left(t_i,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}(t-t_i)\right)\right),\\ u(t_3,\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}t_3)+\int_0^{t_3} g(s,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}(s-t_3))\mathrm{d}s+\\ \quad\sum\limits_{0<i<3} I_i\left(u\left(t_i,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}(t_3-t_i)\right)\right),\\ u(t_3^+,\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}t_3)+\int_0^{t_3} g(s,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}(s-t_3))\mathrm{d}s+\\ \quad\sum\limits_{0<i<3} I_i\left(u\left(t_i,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}(t_3-t_i)\right)\right)+I_3\left(u(t_3,\boldsymbol{x})\right)。\end{cases} \tag{16}$$

依此类推，可得式（13）。证毕。

4 应用举例

例 1 讨论下述方程的解：

$$\begin{cases}u_t(t,(x,y))+(1,1)\cdot(u_x,u_y)=2t+x+y,\\ \quad(t,(x,y))\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^2,\ t\neq t_k=k;\\ u(t_k^+,(x,y))-u(t_k,(x,y))=1,\ k=1,2,\cdots;\\ u(0,(x,y))=x+y,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2。\end{cases} \tag{17}$$

其中 $g(t,(x,y))=2t+x+y$，$I_k\left(u\left(t_k,(x,y)\right)\right)=1,\ k\in\mathbb{N}$，$f[(x,y)]=x+y$。

解 显然方程（17）满足定理 2 的所有条件，而且有

$$f[(x,y)-(1,1)t]=f[(x-t,y-t)]=x+y-2t,$$

$$\begin{aligned}&\int_0^t g\left[s,(x,y)+(1,1)(s-t)\right]\mathrm{d}s=\\ &\int_0^t g\left[s,(x+s-t,y+s-t)\right]\mathrm{d}s=\\ &\int_0^t\left[(x+y-2t)+4s\right]\mathrm{d}s=(x+y)t,\end{aligned}$$

$$\sum_{0<i<k+1} I_i\left(u\left(t_i,(x,y)-(1,1)(t-t_i)\right)\right)=k。$$

那么，方程（17）的解为

$$\begin{cases}u(t,(x,y))=(x+y-2t)+(x+y)t+k,\\ \quad(t,(x,y))\in(k,k+1)\times\mathbb{R}^2,\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\};\\ u(k+1,(x+y))=(k+2)(x+y-1),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2;\\ u((k+1)^+,(x+y))=(k+2)(x+y-1)+1。\end{cases}$$

参考文献：

[1] ERBE L H，FREEDMAN H I，LIU X Z，et al. Comparison Principle for Impulsive Parabolic Equations with Applications to Models of Single Species Growth[J].

Anziam Journal，1991，32(4)：382−400.

[2] BAINOV D D，KAMONT Z，MINCHEV E. Comparison Principles for Impulsive Hyperbolic Equations of First Order[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics，1995，60(3)：379−388.

[3] ABBAS S，BENCHOHRA M. Upper and Lower Solutions Method for Impulsive Partial Hyperbolic Differential Equations with Fractional Order[J]. Nonlinear Analysis：Hybrid Systems，2010，4(3)：406−413.

[4] ABBAS S，AGARWAL R P，BENCHOHRA M. Darboux Problem for Impulsive Partial Hyperbolic Differential Equations of Fractional Order with Variable Times and Infinite Delay[J]. Nonlinear Analysis：Hybrid Systems，2010，4(4)：818−829.

[5] BAINOV D D，KAMONT Z，MINCHEV E. Monotone Iterative Methods for Impulsive Hyperbolic Differential-Functional Equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics，1996，70(2)：329−347.

[6] GAO W L，WANG J H. Estimates of Solutions of Impulsive Parabolic Equations Under NEUMANN Boundary Condition[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2003，283(2)：478−490.

[7] HE L H，LIU A P. Existence and Uniqueness of Solutions for Nonlinear Impulsive Partial Differential Equations with Delay[J]. Nonlinear Analysis：Real World Applications，2010，11(2)：952−958.

[8] CHAN C Y，YUEN S I. Impulsive Effects on Global Existence of Solutions for Degenerate Semilinear Parabolic Equations[J]. Applied Mathematics and Computation，1998，90(2/3)：97−116.

[9] CHAN C Y，KONG P C. Impulsive Quenching for Degenerate Parabolic Equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1996，202(2)：450−464.

[10] HERNÁNDEZ E，PIERRI M，GONCALVES G. Existence Results for An Impulsive Abstract Partial Differential Equation with State-Dependent Delay[J]. Computers & Mathematics with Applications，2006，52(3/4)：411−420.

[11] YE R P. Existence of Solutions for Impulsive Partial Neutral Functional Differential Equation with Infinite Delay[J]. Nonlinear Analysis：Theory，Methods & Applications，2010，73(1)：155−162.

[12] EDUARDO H M，HERNÁNDEZ H R. Impulsive Partial Neutral Differential Equations[J]. Applied Mathematics Letters，2006，19(3)：215−222.

[13] 陈荣三，苏　蒙，邹　敏，等. 满足最大值原理的熵格式计算线性传输方程 [J]. 同济大学学报（自然科学版），2017，45(8)：1243−1248.
CHEN Rongsan，SU Meng，ZOU Min，et al. On Maximum-Principle-Satisfying Entropy Scheme for Linear Advection Equation[J]. Journal of Tongji University (Natural Science)，2017，45(8)：1243−1248.

[14] 王志刚，崔艳芬. 线性传输方程的 Entropy-Monotone 格式 [J]. 上海交通大学学报，2016，50(5)：810−813，818.
WANG Zhigang，CUI Yanfen. Entropy-Monotone Scheme for Linear Advection Equation[J]. Journal of Shanghai Jiaotong University，2016，50(5)：810−813，818.

（责任编辑：邓光辉）