doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2015.04.021

一类中立型双曲微分方程组解的振动性

刘霞文[1]，邱一鸣[2]

（1. 湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007；2. 中山大学 工学院，广东 广州 510006）

摘　要：不采用通常的垂直相加法，而是直接给出振动的定义，并利用 Green 公式以及齐次 Neumann 边界条件，把中立型双曲微分方程组的振动问题，转化为泛函微分不等式不存在最终正解的问题；再利用最终正解的定义及上下极限，得到在齐次 Neumann 边界条件下，判别其所有解振动的充分条件。

关键词：中立型双曲微分方程组；解振动；最终正解；最终负解

中图分类号：O175.29　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2015)04-0104-05

Oscillations of Solutions to a System of Neutral Hyperbolic Differential Equations

Liu Xiawen[1], Qiu Yiming[2]

(1. School of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China；
2. School of Engineering，Sun Yat-sen University，Guangzhou 510006，China)

Abstract：Instead of adopting vertically additive method, directly presents the definition of oscillation and by using Green formula and homogeneous Neumann boundary conditions converts oscillatory problem of neutral hyperbolic differential equations into the problem of nonexistence of eventually positive solution of functional differential inequality, and uses the final positive solution definition and upper and lower limits to obtain sufficient conditions for judging oscillation of all solutions under boundary condition of homogeneous Neumann.

Keywords：system of neutral hyperbolic differential equations；oscillation；eventually positive solution；eventually negative solution

1　背景知识

在工程学、物理学、化学、医学和生物学等学科领域中，出现了大量的用偏泛函微分方程描述的数学模型。因此不少学者对偏泛函微分方程的振动理论进行了研究和探讨，并获得了较多的研究结果[1-7]；然而，偏泛函微分方程组的研究相对较少[8-10]。本文讨论中立型双曲微分方程组

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u_i(x,t)+\sum_{r=1}^{l}\lambda_{ir}(t)u_i\left(x,t-\rho_{ir}(t)\right)\right)=$$
$$\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\left(t,u_j(x,t)\right)\Delta u_j(x,t)+$$
$$\sum_{j=1}^{m}b_{ij}\left(t,u_j\left(x,t-\tau_{ij}(t)\right)\right)\Delta u_j\left(x,t-\tau_{ij}(t)\right)-$$
$$c_i\left(x,t,\left(u_k(x,t)\right)_{k=1}^{m},\left(u_k\left(x,t-\sigma_k(t)\right)\right)_{k=1}^{m}\right)+f_i(x,t);$$
$$(x,t)\in G,\ i\in I_m \qquad (1)$$

收稿日期：2015-06-18

基金项目：湖南省教育厅科学研究基金资助项目（13C054）

作者简介：刘霞文（1976-），女，湖南涟源人，湖南工业大学讲师，硕士，主要研究方向为偏微分方程，
E-mail：liuxiawen.yxh@163.com

在边界条件

$$\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial \vec{n}}=0,(x,t)\in\Gamma,\ i\in I_m \quad (2)$$

下的振动性。

式（1）～（2）中：$G=\Omega\times\mathbf{R}_+$，$I_m=\{1,2,\cdots,m\}$，$\Gamma=\partial\Omega\times\mathbf{R}_+$，$\mathbf{R}_+=[0,+\infty)$，$\Omega\subset\mathbf{R}^n$是有界域，边界$\partial\Omega$充分光滑，$\vec{n}$是$\partial\Omega$单位外法向量，$\Delta$是$\mathbf{R}^m$中的$m$维拉普拉斯算子。

在本文中，假定下列条件成立：

H1　$\lambda_{ir}(t)\in C^2(\mathbf{R}_+;\mathbf{R}_+)$；$i\in I_m$，$r\in I_m$。

H2　$\rho_{ir}(t),\tau_{ij}(t),\sigma_k(t)\in C(\mathbf{R}_+;\mathbf{R})$；$\rho_{ir}(t)\leqslant t$；$\tau_{ij}(t)\leqslant t,\sigma_k(t)\leqslant t$；$\lim\limits_{t\to+\infty}(t-\rho_{ir}(t))=\lim\limits_{t\to+\infty}(t-\tau_{ij}(t))=\lim\limits_{t\to+\infty}(t-\sigma_k(t))=+\infty$；$i,j,k\in I_m$，$r\in I_l$。

H3　$a_{ij}(t,u_j),b_{ij}(t,u_j)\in C^{0,1}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R};(0,+\infty))$；且 $u_i\dfrac{\partial a_{ii}(t,u_i)}{\partial u_i}\geqslant 0$；$u_i\dfrac{\partial b_{ii}(t,u_i)}{\partial u_i}\geqslant 0$；$\dfrac{\partial a_{ij}(t,u_j)}{\partial u_j}=0$；$\dfrac{\partial b_{ij}(t,u_j)}{\partial u_j}=0$；$i,j\in I_m,i\neq j$。

H4　$c_i\in C(\overline{G}\times\mathbf{R}^{2m};\mathbf{R})$，且

$$c_i(x,t,\xi_1,\cdots,\xi_i,\cdots,\xi_m,\eta_1,\cdots,\eta_i,\cdots,\eta_m)\begin{cases}\geqslant 0,\ \text{当}\xi_i,\eta_i\in(0,+\infty)\text{时；}\\ \leqslant 0,\ \text{当}\xi_i,\eta_i\in(-\infty,0)\text{时；}\end{cases} i\in I_m。$$

H5　$f_i(x,t)\in C(\overline{G};\mathbf{R}),i\in I_m$。

定义 1　函数

$$u(x,t)=\{u_1(x,t),u_2(x,t),\cdots,u_m(x,t)\}^{\mathrm{T}}\in C^{2,2}(G;\mathbf{R}^m)\cap C^{1,0}(\overline{G};\mathbf{R}^m)$$

称为问题（1），（2）的解，如果它在G上满足方程组（1），且在Γ上满足边值条件（2）。

定义 2　称连续函数$u(x,t):G\to\mathbf{R}$振动，如果对任意$\mu>0$均存在点$(x_0,t_0)\in\Omega\times[\mu,+\infty)$使得$u(x_0,t_0)=0$；否则称$u(x,t)$非振动。

定义 3　称连续函数

$$u(x,t)=\{u_1(x,t),u_2(x,t),\cdots,u_m(x,t)\}^{\mathrm{T}}:G\to\mathbf{R}^m$$

振动，如果$u(x,t)$至少有一个分量在定义 2 下是振动的；否则称$u(x,t)$非振动。

定义 4　称连续函数

$$u(x,t)=\{u_1(x,t),u_2(x,t),\cdots,u_m(x,t)\}^{\mathrm{T}}:G\to\mathbf{R}^m$$

全振动，如果$u(x,t)$的所有分量在定义 2 下是振动的。

2　主要结果及其证明

为了方便，引进下列记号：

$$U_i(t)=\int_\Omega u_i(x,t)\mathrm{d}x,\ F_i(t)=\int_\Omega f_i(x,t)\mathrm{d}x,\ t\geqslant 0,\ i\in I_m。$$

引理 1　若

$$\liminf_{t\to+\infty}\int_{t_1}^{t}\left(1-\frac{s}{t}\right)F_{i_0}(s)\mathrm{d}s=-\infty,t_1\geqslant t_0, \quad (3)$$

则不等式

$$\left(V(t)+\sum_{r=1}^{l}\lambda_{i_0r}(t)V(t-\rho_{i_0r}(t))\right)''\leqslant F_{i_0}(t) \quad (4)$$

无最终正解。

证　设不等式（4）有最终正解$V(t)$，则存在$t_0\geqslant 0$，使得$V(t)>0,V(t-\rho_{i_0r}(t))>0$，$t\geqslant t_0$，$r\in I_l$。

将不等式（4）在$[t_1,t]$，$t_1\geqslant t_0$上积分，有

$$\int_{t_1}^{t}\left(V(s)+\sum_{r=1}^{l}\lambda_{i_0r}(s)V(s-\rho_{i_0r}(s))\right)''\mathrm{d}s\leqslant\int_{t_1}^{t}F_{i_0}(s)\mathrm{d}s, \quad (5)$$

即

$$\left(V(t)+\sum_{r=1}^{l}\lambda_{i_0r}(t)V(t-\rho_{i_0r}(t))\right)'\leqslant C_2+\int_{t_1}^{t}F_{i_0}(s)\mathrm{d}s, \quad (6)$$

式中C_2为常数。

将不等式（6）在$[t_1,t]$，$t_1\geqslant t_0$上积分，有

$$\int_{t_1}^{t}\left(V(s)+\sum_{r=1}^{l}\lambda_{i_0r}(s)V(s-\rho_{i_0r}(s))\right)'\mathrm{d}s\leqslant\int_{t_1}^{t}C_2\mathrm{d}s+\int_{t_1}^{t}\left(\int_{t_1}^{\xi}F_{i_0}(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\xi, \quad (7)$$

即

$$V(t)+\sum_{r=1}^{l}\lambda_{i_0r}(t)V(t-\rho_{i_0r}(t))\leqslant C_1+C_2(t-t_1)+\int_{t_1}^{t}(t-s)F_{i_0}(s)\mathrm{d}s, \quad (8)$$

式中C_1，C_2都为常数。

因此，有

$$\frac{1}{t}\left(V(t)+\sum_{r=1}^{l}\lambda_{i_0r}(t)V(t-\rho_{i_0r}(t))\right)\leqslant\frac{C_1}{t}+C_2\left(1-\frac{t_1}{t}\right)+\int_{t_1}^{t}\left(1-\frac{s}{t}\right)F_{i_0}(s)\mathrm{d}s。 \quad (9)$$

令$t\to+\infty$，由式（3）和式（9）得

$$\liminf_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\left(V(t)+\sum_{r=1}^{l}\lambda_{i_0r}(t)V(t-\rho_{i_0r}(t))\right)=-\infty,$$

这与假设$V(t)>0$矛盾。引理 1 证毕。

同理可以证明：

引理 2　若

$$\limsup_{t\to+\infty}\int_{t_1}^{t}\left(1-\frac{s}{t}\right)F_{i_0}(s)\mathrm{d}s=+\infty,\ t_1\geqslant t_0, \quad (10)$$

则不等式

$$\left(V(t)+\sum_{r=1}^{l}\lambda_{i_0r}(t)V(t-\rho_{i_0r}(t))\right)''\geqslant F_{i_0}(t) \quad (11)$$

无最终负解。

引理 3 设$u(x,t)=\{u_1(x,t),u_2(x,t),\cdots,u_m(x,t)\}^{\mathrm{T}}$是问题（1），（2）的解，若存在某个$i_0\in I_m$，使得$u_{i_0}(x,t)>0$，$t\geqslant t_0\geqslant 0$，则$U_{i_0}(t)$是微分不等式（4）的最终正解。

证 由条件H_2知，存在$t_1\geqslant t_0$使得

$u_{i_0}(x,t)>0, u_{i_0}\left(x,t-\rho_{i_0r}(t)\right)>0, u_{i_0}\left(x,t-\tau_{i_0j}(t)\right)>0$,

$u_{i_0}\left(x,t-\sigma_k(t)\right)>0,(x,t)\in\Omega\times[t_1,+\infty), j,k\in I_m, r\in I_l$。

将方程（1）两边关于x在Ω上积分，得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\int_\Omega u_{i_0}(x,t)\mathrm{d}x+\sum_{r=1}^{l}\lambda_{i_0r}(t)\int_\Omega u_{i_0}\left(x,t-\rho_{i_0r}(t)\right)\mathrm{d}x\right)=$$
$$\sum_{j=1}^{m}\int_\Omega a_{i_0j}\left(t,u_j(x,t)\right)\Delta u_j(x,t)\mathrm{d}x+$$
$$\sum_{j=1}^{m}\int_\Omega b_{i_0j}\left(t,u_j\left(x,t-\tau_{i_0j}(t)\right)\right)\Delta u_j\left(x,t-\tau_{i_0j}(t)\right)\mathrm{d}x-$$
$$\int_\Omega c_{i_0}\left(x,t,\left(u_k(x,t)\right)_{k=1}^{m},\left(u_k\left(x,t-\sigma_k(t)\right)\right)_{k=1}^{m}\right)\mathrm{d}x+$$
$$\int_\Omega f_{i_0}(x,t)\mathrm{d}x,\ t\geqslant t_1。\quad(12)$$

由 Green 公式、边界条件及条件H_3，有

$$\int_\Omega a_{i_0i_0}\left(t,u_{i_0}(x,t)\right)\Delta u_{i_0}(x,t)\mathrm{d}x=$$
$$\int_{\partial\Omega} a_{i_0i_0}\left(t,u_{i_0}(x,t)\right)\frac{\partial u_{i_0}(x,t)}{\partial\vec{n}}\mathrm{d}s-$$
$$\int_\Omega\frac{\partial a_{i_0i_0}\left(t,u_{i_0}(x,t)\right)}{\partial u_{i_0}}|\nabla u_{i_0}(x,t)|^2\,\mathrm{d}x=$$
$$-\int_\Omega\frac{\partial a_{i_0i_0}\left(t,u_{i_0}(x,t)\right)}{\partial u_{i_0}}|\nabla u_{i_0}(x,t)|^2\,\mathrm{d}x\leqslant 0,\ t\geqslant t_1。\quad(13)$$

$$\int_\Omega a_{i_0j}\left(t,u_j(x,t)\right)\Delta u_j(x,t)\mathrm{d}x=$$
$$\int_{\partial\Omega} a_{i_0j}\left(t,u_j(x,t)\right)\frac{\partial u_j(x,t)}{\partial\vec{n}}\mathrm{d}s-$$
$$\int_\Omega\frac{\partial a_{i_0j}\left(t,u_j(x,t)\right)}{\partial u_j}|\nabla u_j(x,t)|^2\,\mathrm{d}x=0,$$
$$j\neq i_0,\ t\geqslant t_1。\quad(14)$$

即

$$\int_\Omega a_{i_0j}\left(t,u_j(x,t)\right)\Delta u_j(x,t)\mathrm{d}x\begin{cases}\leqslant 0，当\ j=i_0时；\\=0，当\ j\neq i_0时。\end{cases}\quad(15)$$

同理

$$\int_\Omega b_{i_0j}\left(t,u_j\left(x,t-\tau_{i_0j}(t)\right)\right)\Delta u_j\left(x,t-\tau_{i_0j}(t)\right)\mathrm{d}x$$
$$\begin{cases}\leqslant 0，当\ j=i_0时；\\=0，当\ j\neq i_0时。\end{cases}\quad(16)$$

由条件H_4知

$$c_{i_0}\left(x,t,\left(u_k(x,t)\right)_{k=1}^{m},\left(u_k\left(x,t-\sigma_k(t)\right)\right)_{k=1}^{m}\right)\geqslant 0。\quad(17)$$

由式（12），式（15）~（17）得

$$\left(U_{i_0}(t)+\sum_{r=1}^{l}\lambda_{i_0r}(t)U_{i_0}\left(t-\rho_{i_0r}(t)\right)\right)''\leqslant F_{i_0}(t),\ t\geqslant t_1,\quad(18)$$

这表明，$U_{i_0}(t)>0$是微分不等式（4）的最终正解。引理 3 证毕。

同理可以证明：

引理 4 设$u(x,t)=\{u_1(x,t),u_2(x,t),\cdots,u_m(x,t)\}^{\mathrm{T}}$是问题（1），（2）的解，若存在某个$i_0\in I_m$，使得$u_{i_0}(x,t)<0$，$t\geqslant t_0\geqslant 0$，则$U_{i_0}(t)$是微分不等式（11）的最终负解。

下面给出本文的主要结果。

定理 1 若存在某个$i_0\in I_m$，使得不等式（4）无最终正解和不等式（11）无最终负解，则问题（1），（2）的所有解振动。

证 假设问题（1），（2）有非振动解

$$u(x,t)=\{u_1(x,t),u_2(x,t),\cdots,u_m(x,t)\}^{\mathrm{T}},$$

由定义 2 可知，存在$t_0\geqslant 0$，使得$|u_i(x,t)|>0$，$t\geqslant t_0\geqslant 0$，$i\in I_m$。则$u_{i_0}(x,t)>0$或$u_{i_0}(x,t)<0$，$t\geqslant t_0$。

如果$u_{i_0}(x,t)>0$，$t\geqslant t_0$，则由引理 3 知$U_{i_0}(t)>0$是不等式（4）的最终正解。矛盾。

如果$u_{i_0}(x,t)<0$，$t\geqslant t_0$，则由引理 4 知$U_{i_0}(t)<0$是不等式（11）的最终负解。矛盾。

定理 1 证毕。

利用定理 1、引理 1 及引理 2 容易得出：

定理 2 若存在某个$i_0\in I_m$使得式（3）和式（10）都成立，则问题（1），（2）的所有解振动。

利用上面的结论，不难得出下面的定理：

定理 3 若对所有$i\in I_m$，不等式

$$\left(V(t)+\sum_{r=1}^{l}\lambda_{ir}(t)V\left(t-\rho_{ir}(t)\right)\right)''\leqslant F_i(t)\quad(19)$$

无最终正解，且不等式

$$\left(V(t)+\sum_{r=1}^{l}\lambda_{ir}(t)V\left(t-\rho_{ir}(t)\right)\right)''\geqslant F_i(t)\quad(20)$$

无最终负解，则问题（1），（2）的所有解全振动。

定理 4 若对所有$i\in I_m$，

$$\liminf_{t\to+\infty}\int_{t_1}^{t}F_i(s)\mathrm{d}s=-\infty,\ t_1\geqslant t_0,\quad(21)$$

$$\limsup_{t\to+\infty}\int_{t_1}^{t}F_i(s)\mathrm{d}s=+\infty,\ t_1\geqslant t_0,\quad(22)$$

则问题（1），（2）的所有解全振动。

3　举例

例1　考虑双曲微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u_1(x,t)+\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{4}}u_1\left(x,t-\dfrac{5\pi}{4}\right)\right)= \\ u_1^2(x,t)\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u_1(x,t)+\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u_2(x,t)+ \\ \mathrm{e}^{3\pi}u_1^2(x,t-\pi)\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u_1(x,t-\pi)+ \\ \mathrm{e}^{\pi}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u_2(x,t-\pi)-u_1(x,t)- \\ \mathrm{e}^{\frac{3\pi}{2}}u_1(x,t-\dfrac{3\pi}{2})-\mathrm{e}^t(\sin t+\cos t)\left(\dfrac{x^3}{3}-x^2\right), \\ (x,t)\in(0,2)\times[0,+\infty); \\ \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u_2(x,t)+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}u_2\left(x,t-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)= \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u_1(x,t)+2u_2^2(x,t)\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u_2(x,t)+ \\ \mathrm{e}^{\pi}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u_1(x,t-\pi)+ \\ 2\mathrm{e}^{3\pi}u_2^2(x,t-\pi)\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u_2(x,t-\pi)-u_2(x,t)- \\ 6\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}}u_2\left(x,t-\dfrac{2\pi}{3}\right)+\left(2-3\sqrt{3}\right)\mathrm{e}^t\cos t\left(\dfrac{x^3}{3}-x^2\right), \\ (x,t)\in(0,2)\times[0,+\infty)。\end{cases} \tag{23}$$

在边界条件

$$\frac{\partial u_i(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial u_i(2,t)}{\partial x}=0,\ t\geqslant 0,\ i=1,2 \tag{24}$$

下的振动性。

问题中：$\Omega=(0,2)$，$n=1$，$m=2$，$l=1$，

$$\lambda_{11}(t)=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{4}},\lambda_{21}(t)=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}},\rho_{11}(t)=\frac{5\pi}{4},\rho_{21}(t)=\frac{\pi}{2},$$
$$a_{11}(t,u_1)=u_1^2,a_{12}(t,u_2)=1,a_{21}(t,u_1)=1,a_{22}(t,u_2)=2u_2^2,$$
$$b_{11}(t,u_1)=\mathrm{e}^{3\pi}u_1^2,b_{12}(t,u_2)=\mathrm{e}^{\pi},b_{21}(t,u_1)=\mathrm{e}^{\pi},$$
$$b_{22}(t,u_2)=2\mathrm{e}^{3\pi}u_2^2,\tau_{11}(t)=\tau_{12}(t)=\tau_{21}(t)=\tau_{22}(t)=\pi,$$
$$c_1\left(x,t,u_1(x,t),u_2(x,t),u_1\left(x,t-\frac{3\pi}{2}\right),u_2\left(x,t-\frac{2\pi}{3}\right)\right)=$$
$$u_1(x,t)+\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{2}}u_1\left(x,t-\frac{3\pi}{2}\right),$$
$$c_2\left(x,t,u_1(x,t),u_2(x,t),u_1\left(x,t-\frac{3\pi}{2}\right),u_2\left(x,t-\frac{2\pi}{3}\right)\right)=$$
$$u_2(x,t)+6\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}}u_2\left(x,t-\frac{2\pi}{3}\right),$$
$$f_1(x,t)=-\mathrm{e}^t(\sin t+\cos t)\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right),$$
$$f_2(x,t)=\left(2-3\sqrt{3}\right)\mathrm{e}^t\cos t\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)。$$

解　显然有

$$F_1(t)=\int_0^2\left(-\mathrm{e}^t(\sin t+\cos t)\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\right)\mathrm{d}x=$$
$$\frac{4}{3}\mathrm{e}^t(\sin t+\cos t),$$
$$F_2(t)=\int_0^2\left(\left(2-3\sqrt{3}\right)\mathrm{e}^t\cos t\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\right)\mathrm{d}x=$$
$$\left(4\sqrt{3}-\frac{8}{3}\right)\mathrm{e}^t\cos t。$$

因此

$$\liminf_{t\to+\infty}\int_{t_1}^t\left(1-\frac{s}{t}\right)F_1(s)\mathrm{d}s=-\infty,$$
$$\limsup_{t\to+\infty}\int_{t_1}^t\left(1-\frac{s}{t}\right)F_1(s)\mathrm{d}s=+\infty,$$
$$\liminf_{t\to+\infty}\int_{t_1}^t\left(1-\frac{s}{t}\right)F_2(s)\mathrm{d}s=-\infty,$$
$$\limsup_{t\to+\infty}\int_{t_1}^t\left(1-\frac{s}{t}\right)F_2(s)\mathrm{d}s=+\infty。$$

利用定理4可得问题（23），（24）的所有解在$(0.2)\times[0,+\infty]$上全振动。实际上

$$u_1(x,t)=\mathrm{e}^t\cos t\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right),\ u_2(x,t)=\mathrm{e}^t\sin t\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right),$$

是问题（23），（24）的全振动解。

参考文献：

[1] 罗李平，欧阳自根. 偶数阶非线性中立型偏微分方程系统的振动性[J]. 数学的实践与认识，2006，36(9)：322–328.
Luo Liping，Ouyang Zigen. Oscillation of Systems of Even Order Nonlinear Neutral Partial Differential Equations[J]. Mathematics in Practice and Theory，2006，36(9)：322–328.

[2] 林文贤. 一类二阶中立型偏泛函微分方程的振动性[J]. 数学的实践与认识，2007，37(20)：192–195.
Lin Wenxian. Oscillation of Certain Second Order Neutral Partial Functional Differential Equations[J]. Mathematics in Practice and Theory，2007，37(20)：192–195.

[3] 罗李平. 高阶偏泛函微分方程系统解的强迫振动性[J]. 数学杂志，2007，27(2)：195–200.
Luo Liping. Forced Oscillation for Solutions of Systems of Higher Order Partial Functional Differential Equations[J]. Journal of Mathematics，2007，27(2)：195–200.

[4] 林文贤. 一类中立型双曲微分方程的振动性定理[J]. 应用数学，2009，22(3)：514–519.

Lin Wenxian. Oscillation Theorems of Certain Neutral Hyperbolic Differential Equations[J]. Mathematica Applicata，2009，22(3)：514–519.
[5] 罗李平. 非线性中立双曲型偏泛函微分方程的振动性定理[J]. 数学杂志，2010，30(6)：1023–1028.
Luo Liping. Oscillation Theorems of Nonlinear Neutral Hyperbolic Partial Functional Differential Equations[J]. Journal of Mathematics，2010，30(6)：1023–1028.
[6] 林文贤. 一类非线性中立双曲型偏泛函微分方程的振动性[J]. 安徽大学学报：自然科学版，2011，35(3)：9–13.
Lin Wenxian. Oscillation Theorems of Certain Nonlinear Neutral Hyperbolic Partial Functional Differential Equations [J]. Journal of Anhui University：Natural Science Edition，2011，35(3)：9–13.
[7] 林文贤. 关于一类非线性中立双曲型偏泛函微分方程的振动性的注记[J]. 韩山师范学院学报，2013，34(3)：7–11.
Lin Wenxian. Remarks on the Oscillation of Certain Nonlinear Hyperbolic Partial Functional Differential Equations of Neutral Type[J]. Journal of Hanshan Normal University，2013，34(3)：7–11.
[8] Minchev E. Forced Oscillations of Solutions of Systems of Hyperbolic Equations of Neutral Type[J]. Applied Mathematics and Computation，2004，155(2)：427–438.
[9] 邱冠英. 一类中立型偏泛函微分方程解的振动性[J]. 嘉应学院学报：自然科学版，2015，33(2)：13–16.
Qiu Guanying. Oscillation Theorems of Neutral Partial Function Differential Equations[J]. Journal of Jiaying University：Natural Science，2015，33(2)：13–16.
[10] 刘霞文，刘伟安. 一类中立型拟线性抛物方程组解的振动性[J]. 武汉大学学报：理学版，2005，51(5)：537–541.
Liu Xiawen，Liu Weian. Oscillations of Solutions to a Class of Systems of Quasilinear Partial Equations of Neutral Type [J]. Journal of Wuhan University：Natural Science Edition，2005，51(5)：537–541.

（责任编辑：邓光辉）

（上接第 44 页）

[7] 秦灿华，刘连根，曹 洋，等. MW级永磁同步电机无速度传感器矢量控制研究[J]. 湖南工业大学学报，2012，26(1)：9–11.
Qin Canhua，Liu Liangen，Cao Yang，et al. Research on Sensorless Vector Control of MW Turbine Permanent Magnet Synchronous Motor[J]. Journal of Hunan University of Technology，2012，26(1)：9–11.
[8] 张晓光，赵 克，孙 力，等. 永磁同步电动机滑模变结构调速系统新型趋近率控制[J]. 中国电机工程学报，2011，31(24)：77–82.
Zhang Xiaoguang，Zhao Ke，Sun Li，et al. A PMSM Sliding Mode Control System Based on a Novel Reaching Law[J]. Proceedings of the CSEE，2011，31(24)：77–82.
[9] 暨绵浩. 高精高速伺服驱动技术现状及发展趋势[J]. 伺服控制，2009(6)：24–26.
Ji Mianhao. Present Situation and Development Trend of High Precision and Speed Servo Drive Technology[J]. Servo Control，2009(6)：24–26.

（责任编辑：邓 彬）