

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2015.01.018

量子退相位通道中量子 Fisher 信息动力学

王国友, 夏湘芳, 彭柯铭, 陈光伟

(湖南工业大学 理学院, 湖南 株洲 412007)

摘要: 利用量子通道估计方法研究了纯退相位通道下, 2 个相互作用量子比特系统退相干率的量子 Fisher 信息的动力学演化。数值计算表明: 量子 Fisher 信息总是先从 0 增加到某一最大值后迅速衰减, 最后又减小到 0; 退相干率越大, 导致量子 Fisher 信息越小和衰减到 0 的时间也越短; 提高初始输入态的纠缠不能使最大量子 Fisher 信息得到提升。

关键词: 量子 Fisher 信息; 纠缠; 量子通道估计; 退相干率; 纯退相位通道

中图分类号: O413

文献标志码: A

文章编号: 1673-9833(2015)01-0098-04

Dynamics of Quantum Fisher Information Under Pure Dephasing Channel

Wang Guoyou, Xia Xiangfang, Peng Keming, Chen Guangwei

(School of Science, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China)

Abstract : Using the quantum channel estimation method, studies the dynamical evolution of quantum Fisher information(QFI) with respect to decoherent rate of two interacting qubits under pure dephasing channel. Numerical results show that the quantum Fisher information always increases from zero to a maximum value before rapidly decays, finally decays to zero, a larger decoherence rate leads to smaller quantum Fisher information and shorter decay time to zero, and also show that the maximum quantum Fisher information is not enhanced by promoting the degree of entanglement in the initial input state.

Keywords : quantum Fisher information; entanglement; quantum channel estimation; decoherent rate; pure dephasing channel

0 引言

所有的量子系统都不可避免地和环境相互作用, 因而系统的动力学演化成为系统的一个重要特性^[1-2]。在退相干环境下, 物理量的动力学问题已引起许多学者的研究兴趣。他们在研究中发现许多有趣的特性, 例如纠缠演化中出现的纠缠死亡现象^[3], 量子关联演化中表现出的突变现象^[4]等。

环境往往影响甚至破坏一个物理系统演化的进程, 因而尽可能精确地估计环境噪音的影响显得尤

为重要。量子通道估计是用来辨别未知噪音的方法之一, 这种方法首先要制备一个作为量子通道的最优输入态, 并且这个态携带了要被估计的通道参数, 然后在与环境相互作用之后的输出态上进行某一量子态最优测量, 从而达到有效估计这个参数的目的^[1]。

正像经典估计理论中费舍尔 (Fisher) 信息的地位那样^[5], 在量子估计理论和量子信息理论中, 量子 Fisher 信息也是一个关键的量。量子估计的目的是要估计出标记量子系统参数的值, 并提高分辨率的精

收稿日期: 2014-10-20

基金项目: 湖南省教育厅科学研究基金资助项目 (13C039)

作者简介: 王国友 (1974-), 男, 湖南隆回人, 湖南工业大学讲师, 湖南师范大学博士生, 主要研究方向为量子光学和量子信息, E-mail: gywang04@163.com

度^[1,6]。量子 Fisher 信息是描述一个量子态关于一个参数变化敏感性的量, 它与决定最优测量界的量子 Cramer-Rao 不等式密切相关^[7]。近年来, 人们对退相干下的量子 Fisher 信息动力学的研究表现出浓厚的兴趣^[8-14]。Sun Zhe 等^[11]发现, 处于一个量子临界自旋链环境中的自旋-j 系统, 当环境达到临界点时, 其量子 Fisher 信息几乎单调衰减; Ma Jian 等^[12]研究了退相干下, N 个量子比特的 GHZ 态的量子 Fisher 信息的演化, 表现出衰减和突变现象; Zhong Wei 等^[13]得到了不同量子通道下单个量子比特的量子 Fisher 信息的 Bloch 矢量表示的公式; V. Bužek 等^[14]直接估计了一个量子比特的平均退相干率。

本文对处于退相干环境中的 2 个初始纠缠的量子比特进行退相干率参数的估计。对这 2 个量子比特组成的系统, 2 个量子比特的退相干可以看作一个量子通道。采用文献[1]和文献[14]中量子通道估计的方法, 考虑量子 Fisher 信息的动力学演化来估计通道退相干率参数。

1 模型和理论

考虑 2 个初始纠缠的完全相同的相互作用的量子比特 A 和 B , 每个量子比特由一个激发态 $|e\rangle$ 和一个基态 $|g\rangle$ 构成的一个二能级系统描述^[3], 而且假设 2 个量子比特 A, B 间相互作用强度为 v , 它们独立地和各自的环境相互作用导致局域退相干。研究系统见图 1。

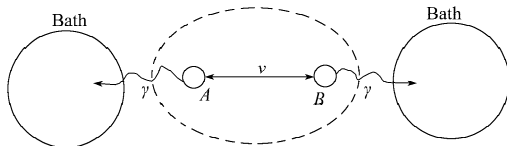


图1 研究系统示意图

Fig. 1 Schematic for the research system

研究系统模型的哈密顿量为 (设 $\hbar=1$)

$$H = \omega_0 (S_A^z + S_B^z) + v (S_A^+ S_B^- + S_B^+ S_A^-), \quad (1)$$

式中: ω_0 是原子的跃迁频率;

v 是 2 个量子比特间的相互作用强度;

$S_i^z, S_i^+, S_i^- (i=A, B)$ 分别是原子的能量算符、上升算符和下降算符。

考虑每个量子比特的退相干通道是纯退相位通道, 系统的动力学可由下列方程 (2) 描述。

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H, \rho] - \sum_{i=A, B} \gamma (S_i^z S_i^z \rho - 2S_i^z \rho S_i^z + \rho S_i^z S_i^z), \quad (2)$$

式中: ρ 是 2 个量子比特的密度算符;

i 为虚数单位;

γ 是每个量子比特的退相位率。

为了研究退相干对参数估计精度的影响, 需要研究 2 个量子比特的量子 Fisher 信息动力学。一个量子态 ρ_γ 关于参数 γ 的量子 Fisher 信息定义为

$$F_\gamma = \text{Tr}(\rho_\gamma L_\gamma^2), \quad (3)$$

式中: F_γ 是量子 Fisher 信息;

L_γ 是满足 $\frac{\partial \rho_\gamma}{\partial \gamma} = \frac{1}{2}(L_\gamma \rho_\gamma + \rho_\gamma L_\gamma)$ 的对称对数导数算符;

Tr 表示求矩阵的迹。

如果一个量子态的谱分解为

$$\rho_\gamma = \sum_i \lambda_i |\lambda_i\rangle \langle \lambda_i|,$$

式中: λ_i 和 $|\lambda_i\rangle$ 分别是 ρ_γ 的本征值和本征态;

$$\langle \lambda_i | = (|\lambda_i\rangle)^\dagger.$$

通过计算容易得到 ρ_γ 的量子 Fisher 信息

$$F_\gamma = \sum_i \frac{(\partial_\gamma \lambda_i)^2}{\lambda_i} + 2 \sum_{i \neq j} \frac{(\lambda_i - \lambda_j)^2}{\lambda_i + \lambda_j} |\langle \lambda_i | \partial_\gamma \lambda_j \rangle|^2, \quad (4)$$

为了简洁起见, 式中记 $\frac{\partial}{\partial \gamma} \equiv \partial_\gamma$ 。

假设系统输入的初始态是一种 X 形混态

$$\rho(0) = \frac{1}{3}(a|ee\rangle\langle ee| + d|gg\rangle\langle gg| + |\psi\rangle\langle\psi|), \quad (5)$$

式中: $d=1-a, 1 \geq a \geq 0$;

$|\psi\rangle = |eg\rangle + z|ge\rangle$, 其中 $z = e^{i\chi}$, χ 为初相位。

在标准基中, $\rho(0)$ 可表示为

$$\rho(0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & z & 0 \\ 0 & z^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}. \quad (6)$$

容易证明, 在时间的演化中主方程 (2) 的解始终保持了 X 形, 即

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

式中: $\rho_{11} = \frac{a}{3}$;

$$\rho_{22} = \frac{1}{3} \left[1 - \frac{v \sin \chi \sin(2\delta t)}{\delta} e^{-4\gamma t} \right];$$

$$\rho_{33} = \frac{1}{3} \left[1 + \frac{v \sin \chi \sin(2\delta t)}{\delta} e^{-4\gamma t} \right];$$

$$\rho_{23} = \frac{1}{3} e^{-8\gamma t} \cos \chi +$$

$$\frac{1}{3} \frac{i \sin \chi}{\delta} e^{-4\gamma t} [-2\gamma \sin(2\delta t) + \delta \cos(2\delta t)];$$

$$\rho_{32} = \frac{1}{3} e^{-8\gamma t} \cos \chi - \frac{1}{3} \cdot \frac{i \sin \chi}{\delta} e^{-4\gamma t} [-2\gamma \sin(2\delta t) + \delta \cos(2\delta t)];$$

$$\rho_{44} = 1 - \rho_{11} - \rho_{22} - \rho_{33};$$

其中 $\delta = \sqrt{\nu^2 - 4\gamma^2}$ ，并假设 $\nu \geq 2\gamma$ 。

由于假设了 2 个量子比特的退相干率是相同的，并且把这种退相干看作一个量子通道，因而可以把 2 个量子比特作为一个整体来估计环境的退相干参数^[1]，这就需要采用量子通道估计方法，研究量子 Fisher 信息动力学。通过对密度矩阵 $\rho(t)$ 对角化获得其本征值和对应的本征态，然后代入方程 (4) 得到量子 Fisher 信息的表达式。由于量子 Fisher 信息 F_γ 没有简单的解析式，下面以数值计算的形式给出 F_γ 的演化。

2 讨论

量子 Fisher 信息动力学演化见图 2，图 2 给出了在 $a=0.5, \nu=0.8, \chi=0$ 条件下，2 个相互作用的量子比特在纯退相位通道下，不同退相位率 γ 的量子 Fisher 信息动力学演化特性。

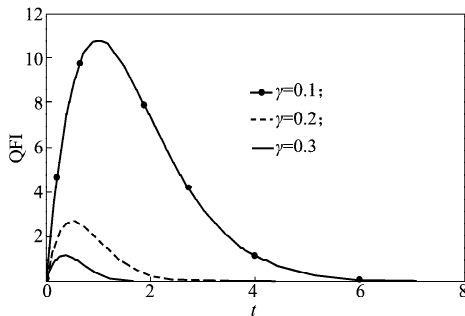


图 2 量子 Fisher 信息 F_γ 动力学演化
Fig. 2 The dynamical evolution of the quantum Fisher information (QFI) F_γ

从图 2 中可以看出，对一个固定的退相位率，量子 Fisher 信息总是先从 0 增加到某一最大值后迅速衰减，最后减少到 0。整个演化过程没有出现量子 Fisher 信息的突然死亡，也没有出现振荡行为。这在物理上可以理解为：在时间 $t=0$ 时，由于处于激发态的原子还没有衰减，因而衰减率的量子 Fisher 信息是 0。衰减开始时，原子处于激发态的概率大，衰减的可能性大，量子 Fisher 信息因此迅速增加。但随着不断衰减，处于激发的概率减小，量子 Fisher 信息也因此减小。最后，由于衰减使激发态概率变为 0，量子 Fisher 信息也随即变为 0。由于考虑的是马尔科夫环境，忽略了环境的记忆效应，因而没有出现振荡和复苏行为^[9]。

从图 2 还可以看到，对不同的退相位率，退相位率越大，导致量子 Fisher 信息越小，达到最大值和衰减到 0 的时间也越短。这在物理上可理解为，退相位率大衰减就快，使原子处于激发态的概率迅速减小，从而使量子 Fisher 信息最大值减小并迅速变化为 0^[1]。

通常情况下，提高输入初始态的纠缠可以增大量子 Fisher 信息，也就可以提高参数估计的精度。如果用共生纠缠度来度量纠缠^[3,15-16]，容易得到初始态的纠缠为

$$C(\rho(0)) = \frac{2}{3} (1 - \sqrt{a(1-a)}).$$

可见，初始态的纠缠随 a 而变化。在 $\nu=0.8, \chi=\pi/4, \gamma=0.1$ ，的条件下，参数 a 对量子 Fisher 信息动力学的影响见图 3。

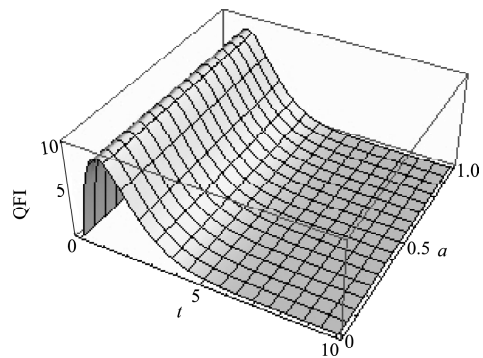


图 3 参数 a 对量子 Fisher 信息 F_γ 动力学的影响
Fig. 3 The effect of parameter a on the dynamical evolution of the quantum Fisher information (QFI) F_γ

从图 3 可以看出，与文献[1]不同，这里不同的 a 值（对应不同的纠缠）对应着相同的最大量子 Fisher 信息，也就有相同的参数估计的精度。这说明提高输入态纠缠不总是可以提高参数估计的精度。

3 结论

本文利用量子通道估计方法，研究在纯退相位通道下，2 个相互作用的量子比特系统的量子 Fisher 信息的动力学演化。数值计算表明，对不同衰减率的退相位通道，量子 Fisher 信息总是先从 0 增加到某一最大值后迅速衰减，最后减小到 0。整个演化过程没有出现量子 Fisher 信息的突然死亡和振荡行为。而且衰减率越大，导致其量子 Fisher 信息越小，在演化中达到最大值和衰减到 0 的时间也越短。而且，提高输入态的纠缠可以提高量子 Fisher 信息的结论不总是正确的。至于量子纠缠和量子 Fisher 信息之间的关系问题值得进一步研究。

参考文献:

- [1] Zheng Qiang, Yao Yao, Li Yong. Optimal Quantum Channel Estimation of Two Interacting Qubits Subject to Decoherence[J]. The European Physical Journal D, 2014. doi: 10.1140/epjd/e2014-50047-1.
- [2] Tsang Mankei. Quantum Transition-Edge Detectors[J]. Phys. Rev. A, 2013. doi: 10.1103/PhysRevA.88.021801.
- [3] Yu Ting, Eberly J H. Quantum Open System Theory: Bipartite Aspects[J]. Phys. Rev. Lett., 2006, 97. doi: 10.1103/PhysRevLett.97.140403.
- [4] Fanchini F F, Werlang T, Brasil C A, et al. Non-Markovian Dynamics of Quantum Discord[J]. Phys. Rev. A, 2010. doi: 10.1103/PhysRevA.81.052107.
- [5] Fisher R A. Theory of Statistical Estimation[C]// Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge: Cambridge Philosophical Society, 1925: 700-725.
- [6] Burgarth D, Maruyama K, Murphy M, et al. Scalable Quantum Computation via Local Control of Only Two Qubits[J]. Phys. Rev. A, 2010. doi: 10.1103/PhysRevA.81.040303.
- [7] Holevo A. Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory[M]. Amsterdam: Springer, 2011: 221-225.
- [8] Huelga S H, Macchiavello C, Pellizzari T, et al. Improvement of Frequency Standards with Quantum Entanglement[J]. Phys. Rev. Lett., 1997. doi: 10.1103/PhysRevLett.79.3865.
- [9] Berrada K. Non-Markovian Effect on the Precision of Parameter Estimation[J]. Phys. Rev. A, 2013. doi: 10.1103/PhysRevA.88.035806.
- [10] Lu Xiaoming, Wang Xiaoguang, Sun Changpu. Quantum Fisher Information Flow and Non-Markovian Processes of Open Systems[J]. Phys. Rev. A, 2010. doi: 10.1103/PhysRevA.82.042103.
- [11] Sun Zhe, Ma Jian, Lu Xiaoming, et al. Fisher Information in a Quantum-Critical Environment[J]. Phys. Rev. A, 2010. doi: 10.1103/PhysRevA.82.022306.
- [12] Ma Jian, Huang Yixiao, Wang Xiaoguang, et al. Quantum Fisher Information of the Greenberger-Horne-Zeilinger State in Decoherence Channels[J]. Phys. Rev. A, 2011. doi: 10.1103/PhysRevA.84.022302.
- [13] Zhong Wei, Sun Zhe, Ma Jian, et al. Fisher Information Under Decoherence in Bloch Representation[J]. Phys. Rev. A, 2010. doi: 10.1103/PhysRevA.87.022337.
- [14] Bužek V, Rapcan P, Rau J, et al. Direct Estimation of Decoherence Rates[J]. Phys. Rev. A, 2012. doi: 10.1103/PhysRevA.86.052109.
- [15] Wootters W K. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits[J]. Phys. Rev. Lett., 1998. doi: 10.1103/PhysRevLett.80.2245.
- [16] Walborn S P, Souto Ribeiro P H, Davidovich L, et al. Experimental Determination of Entanglement with a Single Measurement[J]. Nature, 2006. doi: 10.1038/nature04627.

(责任编辑: 邓光辉)