

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2014.06.002

# 一维无界域上 Burgers 方程的局部人工边界条件

周 道, 金继承

(湖南工业大学 理学院, 湖南 株洲 412007)

**摘 要:** 针对无界域上的一维 Burgers 方程, 首先运用 Cole-Hopf 函数变换, 将非线性 Burgers 方程变换成线性的热传导方程; 再通过 Padé 逼近得到局部的人工边界条件; 最后, 对得到的非线性初边值问题进行有限差分离散。数值实验表明, 提出的人工边界条件是恰当的, 并且是有效的。

**关键词:** Burgers 方程; 人工边界条件; 有限差分方法; Padé 逼近

中图分类号: O241.82

文献标志码: A

文章编号: 1673-9833(2014)06-0007-06

## Local Artificial Boundary Conditions for One-Dimensional Burgers Equation in Unbounded Domain

Zhou Dao, Jin Jicheng

(School of Science, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China)

**Abstract:** With respect to one-dimensional Burgers equation in unbounded domain, the nonlinear Burgers equation is firstly transformed into a linear heat equation by the Cole-Hopf function transformation, and then the artificial boundary conditions are obtained through Padé approximation, finally a finite difference discretization is applied for the obtained initial-boundary value problem. The numerical experiment shows that the proposed artificial boundary conditions are appropriate and effective.

**Keywords:** Burgers equation; artificial boundary condition; finite difference method; Padé approximation

### 1 背景知识

Burgers 方程是 1948 年 J. M. Burgers<sup>[1]</sup>为描述湍流问题而首次提出。随着研究的深入, 人们发现它是对流和耗散流之间相互影响的简单模型之一, 它可以模拟湍流、激波等物理现象, 它是 Navier-Stokes 方程的一种简化形式, 这使得它成为一个非常重要的模型方程。这类方程是非线性的, 解析求解复杂或者难以求解; 而它要求在无界域上求解, 使得数值方法求解也变得困难和低效。因此, 研究此类方程的高效数值算法具有重要的理论和现实意义。

近 20 年来, 针对无界域上方程的求解, 一种重要的方法是构造人工边界条件。这种方法已成功应用于许多无界域问题的求解<sup>[2-6]</sup>, 本文亦采用此类方法。其他学者针对无界域上的 Burgers 方程也有一些研究成果: 文献[7]给出了一维情况的准确人工边界条件, 并应用差分方法进行了数值试验; 文献[8]应用 Cole-Hopf 函数变换和傅里叶逼近给出了二维情况的准确人工边界条件和一类近似人工边界条件; 文献[9]引入了一种差分格式, 给出一维 Burgers 方程的一类近似的人工边界条件, 并进行了收敛性分析。

收稿日期: 2014-09-26

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11101136), 湖南省自然科学基金资助项目(14JJ2114), 湖南省教育厅科学研究基金资助项目(14A164), 湖南工业大学自然科学基金资助项目(2012HZX15)

作者简介: 周 道(1982-), 男, 湖南株洲人, 湖南工业大学讲师, 中南大学博士生, 主要研究方向为偏微分方程数值解,

E-mail: zhoudao\_de@163.com

但是这些人工边界条件都是非局部的。

考虑如下一维 Burgers 方程初值问题:

$$\begin{cases} u_t(x,t) + u(x,t)u_x(x,t) - \nu u_{xx}(x,t) = \\ f(x,t), \quad \forall (x,t) \in \mathbf{R} \times (0,T]; \\ u(x,0) = u_0(x); \\ u(x,t) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $\nu > 0$  是粘性系数;

$f(x,t)$  和  $u_0(x)$  分别是外界能量和初始条件, 都是具有紧支集的函数, 且满足

$$\begin{cases} \text{supp}\{f(x,t)\} \subset (x_1, x_r) \times (0, T], \\ \text{supp}\{u_0(x)\} \subset (x_1, x_r). \end{cases} \quad (2)$$

问题 (1) 是一个在无界域上的问题, 通常引入如下 2 个人工边界:

$$\Gamma_1 = \{(x,t) | x = x_1, 0 \leq t \leq T\},$$

$$\Gamma_r = \{(x,t) | x = x_r, 0 \leq t \leq T\}.$$

将无界区域  $\Omega = \mathbf{R} \times [0, T]$  分成 3 个部分:

$$\Omega_1 = \{(x,t) | x \leq x_1, 0 \leq t \leq T\},$$

$$\Omega_r = \{(x,t) | x \geq x_r, 0 \leq t \leq T\},$$

$$\Omega_i = \{(x,t) | x_1 \leq x \leq x_r, 0 \leq t \leq T\}.$$

其中  $\Omega_i$  是要计算的有限区域, 因而需要求出在  $x_1$  和  $x_r$  的边界条件。

对此, 文献[7]给出了如下准确的人工边界条件:

$$u(x_1, t) = \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}} \int_0^t \frac{e^{g_1(\tau) - g_1(t)}}{\sqrt{t-\tau}} \left\{ \nu u_x(x_1, \tau) - \frac{1}{2} [u(x_1, \tau)]^2 \right\} d\tau, \quad (3)$$

$$u(x_r, t) = -\frac{1}{\sqrt{\nu\pi}} \int_0^t \frac{e^{g_r(\tau) - g_r(t)}}{\sqrt{t-\tau}} \left\{ \nu u_x(x_r, \tau) - \frac{1}{2} [u(x_r, \tau)]^2 \right\} d\tau. \quad (4)$$

式 (3) ~ (4) 中:

$$g_1(t) = \int_0^t \left\{ -\frac{1}{2} u_x(x_1, \tau) + \frac{1}{4\nu} [u(x_1, \tau)]^2 \right\} d\tau; \quad (5)$$

$$g_r(t) = \int_0^t \left\{ -\frac{1}{2} u_x(x_r, \tau) + \frac{1}{4\nu} [u(x_r, \tau)]^2 \right\} d\tau. \quad (6)$$

显然, 当用差分方法对以上边界条件进行离散时, 计算当前时刻的值  $u(\cdot, t_n)$  通常要用到之前几乎所有时间步上的值  $u(\cdot, t_k)$  ( $k = n-1, n-2, \dots, 1, 0$ ), 称这种边界条件为非局部的 (non-local)。与之对应, 如果一种边界条件被离散时, 计算未知函数当前时刻的值, 只需用到之前少数几个时间步上的值, 那么称这种边界是局部的 (local)。与非局部的人工边界相比, 局部的人工边界条件的计算复杂程度较低, 需要的存储空间较少。

## 2 局部人工边界条件的构造

考虑构造一维无界域上满足条件 (2) 的 Burgers 方程 (1) 的人工边界。

先求右边界  $\Gamma_r$  上的边界条件。此时, 式 (1) 在右半无界区域  $\Omega_r$  上, 解  $u(x, t)$  满足

$$\begin{cases} u_t(x,t) + u(x,t)u_x(x,t) - \nu u_{xx}(x,t) = 0, \\ \forall (x,t) \in \Omega_r; \\ u(x,0) = 0, \quad x \in [x_r, +\infty); \\ u(x,t) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty, \quad 0 < t \leq T; \\ u(x,t)|_r = u(x_r, t), \quad 0 < t \leq T. \end{cases} \quad (7)$$

由于函数  $u(x, t)$  是未知的, 所以式 (7) 不能独立求解。但如果假设边值条件  $u(x_r, t)$  是给定的, 那么问题就是适定的。

下面用 Cole-Hopf 变换将 (非线性的) Burgers 方程转化成 (线性的) 热传导方程。

记  $w(x, t) = -\int_x^{+\infty} u(y, t) dy$ ,  $x_r \leq x < +\infty$ , 则有

$$\begin{cases} w_t(x,t) = -\int_x^{+\infty} u_t(y,t) dy = \nu u_x - \frac{1}{2} u^2, \\ w_x(x,t) = u(x,t), \\ w_{xx}(x,t) = u_x(x,t). \end{cases} \quad (8)$$

将式 (8) 代入式 (7) 中, 有

$$\begin{cases} w_t(x,t) + \frac{1}{2} (w_x(x,t))^2 - \nu w_{xx} = 0, \quad \forall (x,t) \in \Omega_r; \\ w(x,0) = 0, \quad x \in [x_r, +\infty); \\ w(x,t)|_{x=x_r} = w(x_r, t); \\ w(x,t) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (9)$$

记  $v(x, t) = \psi(w(x, t)) - 1$ , 其中  $\psi(w(x, t)) = e^{\frac{w(x,t)}{2\nu}}$ ,

则  $v(x, t)$  满足

$$\begin{cases} v_t(x,t) = \nu v_{xx}(x,t), \quad \forall (x,t) \in \Omega_r; \\ v(x,0) = 0, \quad x \in [x_r, +\infty); \\ v(x,t)|_{x=x_r} = v(x_r, t); \\ v(x,t) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (10)$$

这是一个标准的热传导方程。

由于  $v(x_r, t)$  是一个未知函数, 所以问题 (10) 也不是一个适定问题。现在, 对  $v(x, t)$  引入相对于  $t$  的拉普拉斯变换

$$\tilde{v}(x, s) := \mathcal{L}\{v\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} v(x, t) dt.$$

对式 (10) 中第一个等式两边同时作拉普拉斯变换, 则有

$$s\tilde{v}(x, s) - \nu \tilde{v}_{xx}(x, s) = 0. \quad (11)$$

方程 (11) 是齐次的, 有 2 个线性无关的特征解, 分别是:

$$\tilde{v}^{(1)}(x,s) = e^{-x\sqrt{\frac{s}{v}}},$$

$$\tilde{v}^{(2)}(x,s) = e^{x\sqrt{\frac{s}{v}}}.$$

当时  $x \rightarrow +\infty$ ,  $\tilde{v}^{(1)}(x,s) \rightarrow 0$ ,  $\tilde{v}^{(2)}(x,s) \rightarrow \infty$ 。

由式 (10) 可知,  $\tilde{v}(x,s) \rightarrow 0 (x \rightarrow +\infty)$ 。显然, 式 (11) 要满足此条件, 当且仅当在半无界区域  $[x_r, +\infty)$  上特征解  $\tilde{v}^{(2)}(x,s)$  对 (11) 的解  $\tilde{v}(x,s)$  不作贡献。因此,  $\tilde{v}(x,s)$  是 (11) 的解, 需满足齐次式

$$\frac{\partial \tilde{v}(x,s)}{\partial x} + \sqrt{\frac{s}{v}} \tilde{v}(x,s) = 0 \quad (12)$$

此时, 式 (11) 和式 (12) 同解。

为了构造具有局部性质的高阶边界条件, 特别引入 Padé 逼近

$$g(z) = \sqrt{z} = \sqrt{1-(1-z)} \approx 1 - \sum_{k=1}^K \frac{b_k(1-z)}{1-a_k(1-z)} = g_K(z), \quad z \in [0,1], \quad (13)$$

式中:  $a_k = \cos^2\left(\frac{k\pi}{2K+1}\right),$

$$b_k = \frac{2}{2K+1} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2K+1}\right), \quad k=1, 2, \dots, K_0$$

随着  $K$  的增大,  $g_K$  具有逼近性质<sup>[10]</sup>:

$$\|g - g_K\|_{L^\infty([0,1])} = \frac{1}{K}.$$

记  $z = \frac{s}{v}$ , 将  $\sqrt{z}$  用上面 Padé 逼近展开, 并代入式 (12) 中, 有近似关系式

$$\frac{\partial \tilde{v}(x,s)}{\partial x} + \left(1 - \sum_{k=1}^K \frac{b_k(1-z)}{1-a_k(1-z)}\right) \tilde{v}(x,s) = 0, \quad (14)$$

式 (14) 可记为

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{v}(x,s)}{\partial x} + \tilde{v}(x,s) - \sum_{k=1}^K b_k \tilde{\omega}_k(x,s) = 0, \\ \tilde{v}(x,s) - z \tilde{v}(x,s) = (1-a_k + a_k z) \tilde{\omega}_k(x,s), \\ k=1, 2, \dots, K_0. \end{cases} \quad (15)$$

式中  $\tilde{\omega}_k(x,s) = \frac{(1-z)\tilde{v}(x,s)}{1-a_k(1-z)}.$

将式 (15) 作相对于时间  $t$  的拉普拉斯逆变换, 可得

$$\begin{cases} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} + v(x,t) - \sum_{k=1}^K b_k \omega_k(x,t) = 0, \\ v(x,t) - \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = (1-a_k) \omega_k(x,t) + \\ \frac{a_k}{v} \frac{\partial \omega_k(x,t)}{\partial t}, \\ k=1, 2, \dots, K_0. \end{cases} \quad (16)$$

式中  $\omega_k(x,t)$  是  $\tilde{\omega}_k(x,s)$  的拉普拉斯逆变换。

由  $v(x,t) = \psi(w(x,t)) - 1, \psi(w(x,t)) = e^{-\frac{w(x,t)}{2v}}$  和式 (8) 可推得:

$$v_x(x,t) = \psi'(w(x,t))u(x,t),$$

$$v_t(x,t) = \psi'(w(x,t))\left(vu_x(x,t) - \frac{1}{2}(u(x,t))^2\right).$$

又由于

$$\frac{\psi'(w(x,t))}{\psi(w(x,t))} = -\frac{1}{2v},$$

故当  $x=x_r$  时, 由式 (16) 的第一式可得

$$\psi'(w(x_r,t))u(x_r,t) + \psi(w(x_r,t)) - 1 = \sum_{k=1}^K b_k \omega_k(x_r,t). \quad (17)$$

式 (17) 两边同时除以  $\psi(w(x_r,t))$  得

$$-\frac{1}{2v}u(x_r,t) + 1 - e^{-\frac{w(x_r,t)}{2v}} - \sum_{k=1}^K b_k \frac{\omega_k(x_r,t)}{\psi(w(x_r,t))} = 0. \quad (18)$$

记

$$\varphi_k(t) = \frac{2v\omega_k(x_r,t)}{\psi(w(x_r,t))},$$

$$g_r(t) = 2ve^{-\frac{w(x_r,t)}{2v}},$$

则可推出

$$\begin{cases} g_r'(t) = \frac{1}{2}g_r(t)\left[u_x(x_r,t) - \frac{1}{2v}(u(x_r,t))^2\right], \\ g_r(0) = 2v_0. \end{cases} \quad (19)$$

这样式 (18) 可以简化为

$$u(x_r,t) - 2v + g_r(t) + \sum_{k=1}^K b_k \varphi_k(t) = 0 \quad (20)$$

同样, 由式 (16) 的第二式可得

$$\psi(w(x_r,t)) - 1 - \frac{1}{v}\psi'(w(x_r,t))\left(vu_x(x_r,t) - \frac{1}{2}(u(x_r,t))^2\right) = (1-a_k)\omega_k(x_r,t) + \frac{a_k}{v} \frac{\partial \omega_k(x_r,t)}{\partial t}.$$

左右两边同时除以  $\psi(w(x_r,t))$  得

$$1 - e^{-\frac{w(x_r,t)}{2v}} + \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{2v} \left(vu_x(x_r,t) - \frac{1}{2}(u(x_r,t))^2\right) = (1-a_k) \frac{\omega_k(x_r,t)}{\psi(w(x_r,t))} + \frac{a_k}{v} \cdot \frac{\partial \omega_k(x_r,t)}{\partial t} \cdot \frac{1}{\psi(w(x_r,t))}. \quad (21)$$

注意到:

$$\frac{\partial \omega_k(x_r,t)}{\partial t} \cdot \frac{1}{\psi(w(x_r,t))} =$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\omega_k(x_r,t)}{\psi(w(x_r,t))} \right) - \frac{1}{2v} \cdot \frac{\omega_k(x_r,t)}{\psi(w(x_r,t))} \cdot \frac{\partial w(x_r,t)}{\partial t},$$

故式 (21) 可化简并整理为

$$\left(1 + \frac{a_k \varphi_k(t)}{2v}\right) u_x(x_r,t) -$$

$$\left(\frac{1}{2\nu} + \frac{a_k \phi_k(t)}{4\nu^2}\right) (u(x_r, t))^2 - g_r(t) + 2\nu = (1 - a_k) \phi_k(t) + \frac{a_k}{\nu} \cdot \frac{\partial \phi_k(t)}{\partial t} \quad (k=1, 2, \dots, K) \circ \quad (22)$$

综合式(20)与(22)可得在人工边界  $x=x_r$  上的一个局部人工边界条件:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, t) - 2\nu + g_r(t) + \sum_{k=1}^K b_k \phi_k(t) = 0, \\ \left(1 + \frac{a_k \phi_k(t)}{2\nu}\right) u_x(x, t) - \\ \left(\frac{1}{2\nu} + \frac{a_k \phi_k(t)}{4\nu^2}\right) (u(x, t))^2 - g_r(t) + 2\nu = \\ (1 - a_k) \phi_k(t) + \frac{a_k}{\nu} \cdot \frac{\partial \phi_k(t)}{\partial t}, \\ k=1, 2, \dots, K. \end{array} \right. \quad (23)$$

式中  $g_r(t)$  满足式(19)。

类似地, 可以求得在人工边界  $x=x_l$  上的一个局部人工边界条件为

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, t) + 2\nu - g_l(t) - \sum_{k=1}^K b_k \phi_k(t) = 0, \\ \left(1 + \frac{a_k \phi_k(t)}{2\nu}\right) u_x(x, t) - \\ \left(\frac{1}{2\nu} + \frac{a_k \phi_k(t)}{4\nu^2}\right) (u(x, t))^2 - g_l(t) + 2\nu = \\ (1 - a_k) \phi_k(t) + \frac{a_k}{\nu} \cdot \frac{\partial \phi_k(t)}{\partial t} \quad (k=1, 2, \dots, K) \circ \end{array} \right. \quad (24)$$

式中  $g_l(t)$  满足

$$\left\{ \begin{array}{l} g_l'(t) = \frac{1}{2} g_l(t) \left[ u_x(x_l, t) - \frac{1}{2\nu} (u(x_l, t))^2 \right], \\ g_l(0) = 2\nu \circ \end{array} \right. \quad (25)$$

通过使用局部人工边界条件式(23)和式(24), 无界区域问题(1)可以转化为定义在有界区域  $\Omega_l$  上的初边值问题:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t(x, t) + u(x, t) u_x(x, t) - \nu u_{xx}(x, t) = \\ f(x, t), \forall (x, t) \in \Omega_l; \\ u(x, 0) = u_0(x), x_l \leq x \leq x_r; \\ u(x_r, t) - 2\nu + g_r(t) + \sum_{k=1}^K b_k \phi_k(t) = 0; \\ \left(1 + \frac{a_k \phi_k(t)}{2\nu}\right) u_x(x_r, t) - \\ \left(\frac{1}{2\nu} + \frac{a_k \phi_k(t)}{4\nu^2}\right) (u(x_r, t))^2 - g_r(t) + 2\nu = \\ (1 - a_k) \phi_k(t) + \frac{a_k}{\nu} \frac{\partial \phi_k(t)}{\partial t}; \end{array} \right. \quad (26)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x_l, t) + 2\nu - g_l(t) - \sum_{k=1}^K b_k \phi_k(t) = 0; \\ \left(1 + \frac{a_k \phi_k(t)}{2\nu}\right) u_x(x_l, t) - \\ \left(\frac{1}{2\nu} + \frac{a_k \phi_k(t)}{4\nu^2}\right) (u(x_l, t))^2 - g_l(t) + 2\nu = \\ (1 - a_k) \phi_k(t) + \frac{a_k}{\nu} \frac{\partial \phi_k(t)}{\partial t}; \\ k=1, 2, \dots, K. \end{array} \right.$$

式中  $g_l(t)$  和  $g_r(t)$  分别满足式(19)和(25)。这是一个非线性初边值问题。

### 3 全离散差分格式的构造

首先构造非线性初边值问题(26)的全离散差分格式。

取2个正整数  $M$  和  $N$ , 并记

$$h = \frac{x_r - x_l}{M}; \tau = \frac{T}{N}; x_j = x_l + jh, j=0, 1, \dots, M; \\ t_n = n\tau, n=0, 1, \dots, N.$$

再取2个虚拟点, 记为

$$x_{-1} = x_l - h, x_{M+1} = x_r + h.$$

引入记号

$$\Omega_h = \{x_j = x_l + jh; j = -1, 0, 1, \dots, M+1\}, \\ \Omega_\tau = \{t_n = n\tau; n = 0, 1, \dots, N\}, \\ t_{n+\frac{1}{2}} = \frac{t_n + t_{n+1}}{2},$$

并用  $U_j^n$  表示  $u(x_j, t_n)$  的近似解。

对  $\Omega_h \times \Omega_\tau$  上给出的网格函数

$$U = \{U_j^n; -1 \leq j \leq M+1, 0 \leq n \leq N\},$$

定义

$$U_j^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (U_j^n + U_j^{n+1}),$$

$$\delta_t U_j^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\tau} (U_j^{n+1} - U_j^n),$$

$$\delta_x U_j^n = \frac{1}{2h} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n),$$

$$\delta_x^2 U_j^n = \frac{1}{h^2} (U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) \circ$$

在点  $(x_j, t_{n+\frac{1}{2}})$  处, 离散(26)中的内部方程, 有

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t \left(x_j, t_{n+\frac{1}{2}}\right) + u \left(x_j, t_{n+\frac{1}{2}}\right) u_x \left(x_j, t_{n+\frac{1}{2}}\right) - \\ \nu u_{xx} \left(x_j, t_{n+\frac{1}{2}}\right) = f \left(x_j, t_{n+\frac{1}{2}}\right), \\ u \left(x_j, 0\right) = u_0 \left(x_j\right) \circ \end{array} \right.$$

从而可得

$$\begin{cases} \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} + U_j^{n+\frac{1}{2}} \frac{U_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - U_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2h} - \\ v \frac{U_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2U_j^{n+\frac{1}{2}} + U_{j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{h^2} = f\left(x_j, t_{n+\frac{1}{2}}\right); \\ U_j^0 = u_0(x_j); \\ j = 0, 1, \dots, M; \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

即有

$$\begin{cases} \delta_t U_j^{n+\frac{1}{2}} + U_j^{n+\frac{1}{2}} \delta_x U_j^{n+\frac{1}{2}} - v \delta_x^2 U_j^{n+\frac{1}{2}} = f\left(x_j, t_{n+\frac{1}{2}}\right); \\ U_j^0 = u_0(x_j); \\ j = 0, 1, \dots, M; \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases} \quad (27)$$

这就是二阶 Crank-Nicolson 格式。

再考虑式 (26) 中边界上的人工边界条件的离散。

记  $G_r^n = g_r(t_n)$ ,  $\Psi_k^n = \phi_k(t_n)$ ,  $G_1^n = g_1(t_n)$ ,  $\Phi_k^n = \phi_k(t_n)$ 。

对右边界在  $t = t_{n+\frac{1}{2}}$  时刻离散, 可得

$$\begin{cases} U_M^{n+\frac{1}{2}} - 2v + G_r^{n+\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^K b_k \Psi_k^{n+\frac{1}{2}} = 0, \\ \left(1 + \frac{a_k}{2v} \Psi_k^{n+\frac{1}{2}}\right) \delta_x U_M^{n+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{2v} + \frac{a_k}{4v^2} \Psi_k^{n+\frac{1}{2}}\right) \left(U_M^{n+\frac{1}{2}}\right)^2 = \\ (1 - a_k) \Psi_k^{n+\frac{1}{2}} + \frac{a_k}{v} \delta_t \Psi_k^{n+\frac{1}{2}} + G_r^{n+\frac{1}{2}} - 2v, \\ \delta_t G_r^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} G_r^{n+\frac{1}{2}} \left(\delta_x U_M^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2v} \left(U_M^{n+\frac{1}{2}}\right)^2\right), \\ k = 1, 2, \dots, K. \end{cases} \quad (28)$$

并取初值  $\Psi_k^0 = 0$ ,  $G_r^0 = 2v$ 。

同样的, 对左边界在  $t = t_{n+\frac{1}{2}}$  时刻离散, 可得

$$U_0^{n+\frac{1}{2}} + 2v - G_l^{n+\frac{1}{2}} - \sum_{k=1}^K b_k \Phi_k^{n+\frac{1}{2}} = 0,$$

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{a_k}{2v} \Phi_k^{n+\frac{1}{2}}\right) \delta_x U_0^{n+\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{2v} + \frac{a_k}{4v^2} \Phi_k^{n+\frac{1}{2}}\right) \left(U_0^{n+\frac{1}{2}}\right)^2 = \\ (1 - a_k) \Phi_k^{n+\frac{1}{2}} + \frac{a_k}{v} \delta_t \Phi_k^{n+\frac{1}{2}} + G_l^{n+\frac{1}{2}} - 2v, \\ \delta_t G_l^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} G_l^{n+\frac{1}{2}} \left(\delta_x U_0^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2v} \left(U_0^{n+\frac{1}{2}}\right)^2\right), \\ k = 1, 2, \dots, K. \end{cases} \quad (29)$$

并取初值  $\Phi_k^0 = 0$ ,  $G_l^0 = 2v$ 。

以上格式是非线性的隐式格式, 可采用简单的迭代法来求解。

### 4 数值实验

考虑没有源项的 Burgers 方程<sup>[7]</sup>

$$u_t + uu_x - vu_{xx} = 0, \quad (30)$$

它有准确解

$$u(x, t) = \frac{\frac{x}{t+1}}{1 + \sqrt{\frac{t+1}{t_0} \exp\left(\frac{x^2}{4v(t+1)}\right)}}$$

式中  $t_0 = \exp\left(\frac{1}{8v}\right)$ 。

这个解表示 2 个波分别向左右传播, 同时波幅慢慢衰减。将它的初始值作为数值计算的初值, 取  $\tau=h$ ,  $K=10$ , 并计算 2 种不同参数的解。

i)  $v=1.0$ ,  $T=16$ ,  $[x_l, x_r]=[-8, 8]$ ;

ii)  $v=0.1$ ,  $T=12$ ,  $[x_l, x_r]=[-3, 3]$ 。

表 1 和表 2 分别列出了 2 种情形下误差和精度的实验结果, 并且与文献[7]中的数值结果进行比较, 其中  $E_\infty$  和  $E_1$  误差分别定义为:

$$E_\infty = \max_{\substack{0 \leq j \leq M \\ 0 \leq n \leq N}} |u(x_j, t_n) - U_j^n|,$$

$$E_1 = \frac{1}{(N+1)(M+1)} \sum_{n=0}^N \sum_{j=0}^M |u(x_j, t_n) - U_j^n|。$$

表 1 当  $v=1.0$ ,  $T=16$  时,  $E_\infty$  和  $E_1$  的误差和精度

Table 1 The errors and accuracy for  $E_\infty$  and  $E_1$  when  $v=1.0$  and  $T=16$

M	$E_\infty$				$E_1$			
	误差		精度阶数		误差		精度阶数	
	本文	文献[7]	本文	文献[7]	本文	文献[7]	本文	文献[7]
16	1.544e-2	1.544e-2			1.043e-3	1.076e-3		
32	5.202e-3	5.202e-3	1.484	1.484	2.858e-4	2.774e-4	1.823	1.956
64	1.248e-3	1.248e-3	2.084	2.084	7.274e-5	6.953e-5	1.965	1.996
128	2.951e-4	2.951e-4	2.115	2.115	1.825e-5	1.772e-5	1.993	2.014
256	7.363e-5	7.363e-5	2.004	2.004	4.545e-6	4.211e-6	2.008	2.032

表2  $\nu=0.1, T=12$  时,  $E_\infty$  和  $E_1$  的误差和精度

Table 2 The errors and accuracy for  $E_\infty$  and  $E_1$  when  $\nu=0.1$  and  $T=12$

M	$E_\infty$				$E_1$			
	误差		精度阶数		误差		精度阶数	
	本文	文献[7]	本文	文献[7]	本文	文献[7]	本文	文献[7]
16	7.544e-3	7.544e-3			1.125e-3	1.111e-3		
32	1.950e-3	1.950e-3	1.934	1.934	2.818e-4	2.766e-4	1.996	2.006
64	4.854e-4	4.854e-4	2.009	2.009	7.076e-5	6.968e-5	1.991	1.989
128	1.222e-4	1.222e-4	1.986	1.986	1.773e-5	1.749e-5	1.995	1.994
256	3.053e-5	3.053e-5	2.001	2.001	4.436e-6	4.371e-6	1.998	2.000

从表1和表2中数据可知,  $E_\infty$  和  $E_1$  都有近似2阶精度。考虑到 Crank-Nicolson 格式的截断误差为  $O(h^2 + \tau^2)$ , 所以得到的数值解基本上达到了最佳误差阶。将本文的结果与文献[7]中的准确人工边界条件求出的结果作比较, 可以看出2个结果相似度非常高, 也说明了方法的有效性。

图1, 图2分别是  $\nu=1.0, T=16$  时和  $\nu=0.1, T=12$  时,  $M$  取不同的值得到的相对误差图, 其中  $K$  都取10。由图可知, 随  $M$  的增大, 数值结果逐渐逼近真解。

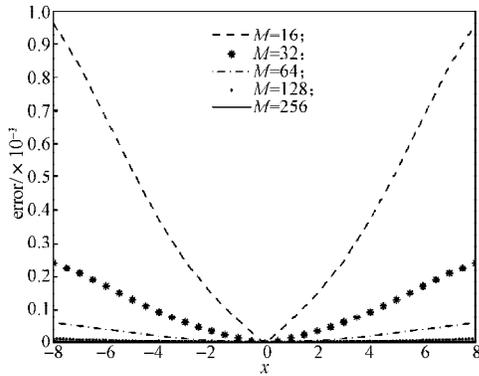


图1  $\nu=1.0, T=16$  时的相对误差 ( $K=10$ )

Fig. 1 The relative errors ( $K=10$ ) when  $\nu=1.0$  and  $T=16$

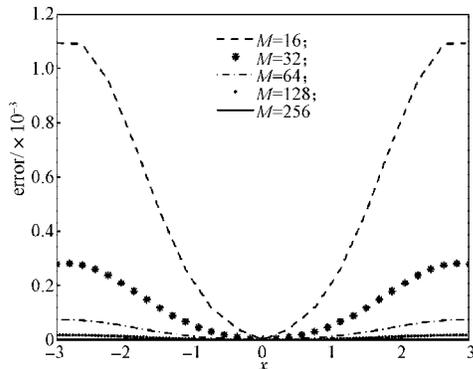


图2  $\nu=0.1, T=12$  时的相对误差 ( $K=10$ )

Fig. 2 The relative errors ( $K=10$ ) when  $\nu=0.1$  and  $T=12$

图3和图4是  $\nu=1.0, T=16$  时和  $\nu=0.1, T=12$  时, 在 Padé 逼近中取不同的  $K$  值, 边界上相对误差的变化图, 其中  $M=64$ 。由图可知, 随着  $K$  的增大, 所求的边界误差逐渐减小, 这证明了方法的有效性。

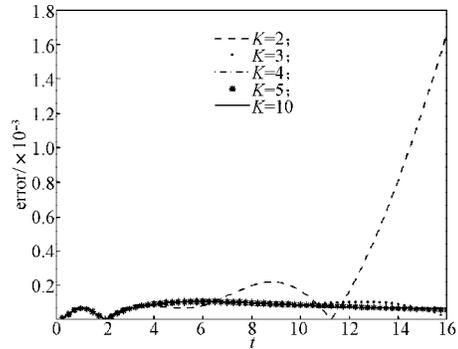


图3  $\nu=1.0, T=16, M=64$  时, 边界  $x=x_r$  上的误差随  $K$  变化情况

Fig. 3 The errors at boundary  $x=x_r$  varying with  $K$  when  $\nu=0.1, T=16$  and  $M=64$

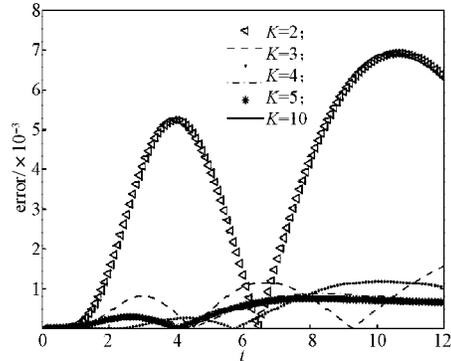


图4  $\nu=0.1, T=12, M=64$  时, 边界上的误差随  $K$  变化情况

Fig. 4 The errors at boundary varying with  $K$  when  $\nu=0.1, T=12$  and  $M=64$

## 5 结语

针对无界域上的一维 Burgers 方程, 本文首先运用 Cole-Hopf 函数变换, 将非线性的 Burgers 方程变成线性的热传导方程, 再运用 Padé 逼近得到局部的人工边界条件。这样的人工边界条件与非局部的人工边界条件相比, 计算复杂性较低, 存储空间较少。数值试验表明, 本文提出的人工边界条件, 在保证计算效果的同时提高了计算的效率, 因此方法是恰当和有效的。

(下转第 31 页)