doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2014.06.001

基于正态分布优先集结算子的随机多准则群决策方法

张腊娥[1,2]，汪新凡[3]

（1. 湖南工业大学 财经学院，湖南 株洲 412007；2. 湖南有色金属职业技术学院 基础课部，湖南 株洲 412006；3. 湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007）

摘　要：对准则值为正态随机变量，而准则之间具有优先级别的随机多准则群决策问题进行了研究。首先，定义了一种集结正态分布数的优先加权平均（NDNPWA）算子，并给出了该算子的相关性质；进一步，基于NDNPWA算子和正态分布数加权算术平均（NDNWAA）算子，提出了一种准则值为正态随机变量，准则之间具有优先级别，而决策者之间不具有优先级别的随机多准则群决策方法。最后，通过实例分析表明，该方法具有可行性和有效性。

关键词：群决策；正态分布；NDNPWA 算子

中图分类号：C934　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2014)06-0001-06

Approach to Stochastic Multi-Criteria Group Decision Making Based on Normal Distribution Prioritized Aggregation Operator

Zhang Lae[1,2]，Wang Xinfan[3]

（1. School of Finance & Economics，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China；2. Department of Fundamental Courses，Hunan Nonferrous Metals Vocational and Technical College，Zhuzhou Hunan 412006，China；3. School of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China）

Abstract：Investigates stochastic multi-criteria group decision making problems in which the criterion values are normal random variables and the criteria are in different priority levels. First, defines a new aggregation operator named normal distribution number prioritized weighted averaging (NDNPWA) operator and provides the relative properties of the operator. Furthermore, based on the NDNPWA operator and the normal distribution number weighted arithmetic averaging (NDNWAA) operator, proposes an approach for solving the stochastic multi-criteria group decision making problems in which the criterion values are normal random variables, the criteria are in different priority levels and the decision makers are not in different priority levels. Finally, presents an illustrative example to demonstrate the feasibility and effectiveness of the developed method.

Keywords：group decision making; normal distribution; NDNPWA operator

---

收稿日期：2014-09-27

基金项目：国家自然科学基金资助项目（71271218，71221061），教育部人文社科基金资助项目（12YJA630114, 13YJC630200），湖南省自然科学基金资助项目（2015JJ2047）

作者简介：张腊娥（1981-），女，湖南冷水江人，湖南有色金属职业技术学院讲师，湖南工业大学硕士生，主要研究方向为投资项目决策与风险管理，E-mail：179486581@qq.com

通信作者：汪新凡（1966-），男，湖南安化人，湖南工业大学教授，博士，主要从事不确定决策和集结算子等研究，E-mail：zzwxfydm@126.com

1 研究背景

多准则决策（multi-criteria decision making，MCDM）是指决策者为了完成某项目标而在考虑多个准则的情况下，从有限个可行方案中挑选最佳方案，或者对方案进行排序的过程。MCDM是当代决策科学的重要组成部分，在工程设计、经济、管理及军事等诸多领域中有广泛应用，从而受到人们的高度关注。在随机不确定环境下，MCDM问题中的准则值往往为随机变量的形式。特别地，由于正态分布是一种非常重要的概率分布，具有普适性，在许多情形下适合于描述准则值的随机变化，因而很多随机MCDM问题中的准则值为正态随机变量的形式。这类准则值为正态随机变量的MCDM问题（称为正态随机MCDM问题）不仅大量存在，而且具有重要的理论意义和实际价值，已引起研究者的高度重视。目前，正态随机MCDM问题的处理方法一般有5种：1）SMAA（stochastic multi-objective acceptability analysis）方法[1]；2）基于粗糙集的方法[2]；3）基于随机占优的方法[3]；4）基于区间数的方法[4]；5）基于集结算子的方法[5]。基于集结算子的方法给出了正态分布数的运算法则，定义了正态分布数加权算术平均（normal distribution number weighted arithmetic averaging，NDNWAA）算子，并给出了一种准则权重信息不完全确定，而准则值为正态随机变量的动态随机多准则决策方法。上述正态随机MCDM方法各有特点，但它们仅考虑了各准则处于同一优先级别的情形。

在实际的决策过程中，有时需要考虑各准则之间优先级别不同的情形。例如，高校在引进博士时，首先需要考察应聘者的思想品德，即思想品德这个准则享有最高级别的优先权。如果某应聘者思想品德不好，那么即使其科研和教学特别突出也不能引进。R. R. Yager[6-7]最早对该类问题进行探究，并用文献检索问题、购买自行车问题和组织管理问题等来说明这类情形，并提出了集结相应决策信息的优先平均（prioritized averaging，PA）算子[6]和优先有序加权平均（prioritized ordered weighted averaging，POWA）算子[7]。

由上述分析可知，准则之间具有优先级别的正态随机MCDM问题缺乏研究，而现有的正态随机MCDM方法均无法解决这类问题。因此，本文将聚焦于这类问题，拟在NDNWAA算子和PA算子的基础上，提出一种正态分布数优先加权平均（normal distribution number prioritized weighted averaging，NDNPWA）算子，研究其性质，进而基于该算子提出一种准则值为正态随机变量，且准则之间具有优先级别的多准则群决策（multi-criteria group decision making，MCGDM）方法，并进行实例分析。

2 预备知识

2.1 正态分布数及其相关概念

正态分布是一种由下面的概率密度函数，即高斯函数所确定的连续的概率分布[4]：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty<x<+\infty,$$

其中，参数μ为数学期望，$\sigma>0$为标准差，σ^2为方差。一般地，用$X\sim N(\mu,\sigma^2)$表示随机变量X服从数学期望为μ，方差为σ^2的正态分布。

定义1[5] 设准则值r为随机变量，且服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，其中μ为r的数学期望，σ^2为r的方差，则称$\{\mu,\sigma\}$为随机变量r的正态分布数，记作$\tilde\beta=\{\mu,\sigma\}$。令$\Theta$为全体正态分布数的集合。

定义2[5] 设$\tilde\beta_1=\{\mu_1,\sigma_1\}$和$\tilde\beta_2=\{\mu_2,\sigma_2\}$为任意的2个正态分布数，则有：

1）$\tilde\beta_1\oplus\tilde\beta_2=\left\{\mu_1+\mu_2,\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right\}$；

2）$\lambda\tilde\beta_1=\{\lambda\mu_1,\lambda\sigma_1\}$，$\lambda\geqslant 0$。

易证：

1）$\tilde\beta_1\oplus\tilde\beta_2=\tilde\beta_2\oplus\tilde\beta_1$；

2）$\left(\tilde\beta_1\oplus\tilde\beta_2\right)\oplus\tilde\beta_3=\tilde\beta_1\oplus\left(\tilde\beta_2\oplus\tilde\beta_3\right)$；

3）$\lambda\left(\tilde\beta_1\oplus\tilde\beta_2\right)=\lambda\tilde\beta_1\oplus\lambda\tilde\beta_2,\lambda\geqslant 0$；

4）$\lambda_1\tilde\beta_1\oplus\lambda_2\tilde\beta_1=\left(\lambda_1\oplus\lambda_2\right)\tilde\beta_1,\lambda_1,\lambda_2\geqslant 0$。

在定义2的基础上，文献[5]定义了一种集结正态分布数的NDNWAA算子，即

定义3[5] 设$\tilde\beta_j=\{\mu_j,\sigma_j\}(j=1,2,\cdots,n)$为一组正态分布数，且设NDNWAA：$\Theta^n\to\Theta$，若

$$\mathrm{NDNWAA}_{\boldsymbol w}\left(\tilde\beta_1,\tilde\beta_2,\cdots,\tilde\beta_n\right)=w_1\tilde\beta_1\oplus w_2\tilde\beta_2\oplus\cdots\oplus w_n\tilde\beta_n,\quad(1)$$

其中$\boldsymbol w=\left(w_1,w_2,\cdots,w_n\right)^{\mathrm T}$为$\tilde\beta_j\left(j=1,2,\cdots,n\right)$的加权向量，$w_j\in[0,1]\left(j=1,2,\cdots,n\right)$，且$\sum_{j=1}^{n}w_j=1$，则称NDNWAA为正态分布数加权算术平均（NDNWAA）算子。特别地，若$\boldsymbol w=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}\right)^{\mathrm T}$，则相应的NDNWAA算子退化为正态分布数算术平均（NDNAA）算子

$$\mathrm{NDNAA}_w\left(\tilde\beta_1,\tilde\beta_2,\cdots,\tilde\beta_n\right)=\frac{1}{n}\left(\tilde\beta_1\oplus\tilde\beta_2\oplus\cdots\oplus\tilde\beta_n\right)。\quad(2)$$

定理1[5]　设$\tilde\beta_j=\{\mu_j,\sigma_j\}(j=1,2,\cdots,n)$为一组正态分布数，$\boldsymbol{w}=\left(w_1,w_2,\cdots,w_n\right)^{\mathrm T}$为$\tilde\beta_j\left(j=1,2,\cdots,n\right)$的加权向量，$w_j\in[0,1]\left(j=1,2,\cdots,n\right)$，且$\sum_{j=1}^n w_j=1$，则由式（1）集结得到的最终结果仍然为正态分布数，且

$$\mathrm{NDNWAA}_w\left(\tilde\beta_1,\tilde\beta_2,\cdots,\tilde\beta_n\right)=\left\{\sum_{j=1}^n w_j\mu_j,\sqrt{\sum_{j=1}^n w_j^2\sigma_j^2}\right\}。\quad(3)$$

根据概率统计中数学期望与方差之间的关系，文献[5]还定义了一种对正态分布数进行比较的方法。

定义4[5]　设$\tilde\beta_1=\{\mu_1,\sigma_1\}$和$\tilde\beta_2=\{\mu_2,\sigma_2\}$为任意的2个正态分布数，

1）若$\mu_1>\mu_2$，则$\tilde\beta_1>\tilde\beta_2$。

2）若$\mu_1<\mu_2$，则$\tilde\beta_1<\tilde\beta_2$。

3）若$\mu_1=\mu_2$，则有：当$\sigma_1=\sigma_2$时，$\tilde\beta_1=\tilde\beta_2$；当$\sigma_1>\sigma_2$时，$\tilde\beta_1<\tilde\beta_2$；当$\sigma_1<\sigma_2$时，$\tilde\beta_1>\tilde\beta_2$。

2.2　优先平均（PA）算子

定义5[6]　令$C=\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$为决策准则的集合，它们之间存在优先级别：$C_1\succ C_2\succ\cdots\succ C_n$，即如果$j<l$，则准则$C_j$的优先级别高于$C_l$的优先级别。设$C_j(x)$为某方案$x$在准则$C_j$下的准则值，满足$C_j(x)\in[0,1]$。如果

$$\mathrm{PA}\left(C_1(x),C_2(x),\cdots,C_n(x)\right)=\sum_{j=1}^n t_jC_j(x),\quad(4)$$

其中$t_j=\dfrac{T_j}{\sum_{j=1}^n T_j}$，$T_j=\prod_{k=1}^{j-1}C_k(x)(j=2,3,\cdots,n)$，$T_1=1$，则称PA为优先平均（PA）算子。

3　正态分布数优先集结算子

根据定义2、定义3和定义5，本章给出一种准则具有优先级别情形下，集结正态分布数的优先加权平均（NDNPWA）算子。

定义6　设$\tilde\beta_j=\{\mu_j,\sigma_j\}(j=1,2,\cdots,n)$为一组正态分布数，且设$\mathrm{NDNWAA}:\Theta^n\to\Theta$，若

$$\mathrm{NDNPWA}\left(\tilde\beta_1,\tilde\beta_2,\cdots,\tilde\beta_n\right)=\frac{T_1}{\sum_{j=1}^n T_j}\tilde\beta_1\oplus\frac{T_2}{\sum_{j=1}^n T_j}\tilde\beta_2\oplus\cdots\oplus\frac{T_n}{\sum_{j=1}^n T_j}\tilde\beta_n,\quad(5)$$

则称NDNPWA为正态分布数优先加权平均（NDNPWA）算子，其中$T_j=\prod_{k=1}^{j-1}\mu_k(j=2,3,\cdots,n)$，$T_1=1$，$\mu_k$是正态分布数$\tilde\beta_k$的数学期望。

定理2　设$\tilde\beta_j=\{\mu_j,\sigma_j\}(j=1,2,\cdots,n)$为一组正态分布数，$T_j=\prod_{k=1}^{j-1}\mu_k(j=2,3,\cdots,n)$，$T_1=1$，$\mu_k$是正态分布数$\tilde\beta_k$的数学期望，则由式（5）集结得到的结果仍为正态分布数，且

$$\mathrm{NDNPWA}\left(\tilde\beta_1,\tilde\beta_2,\cdots,\tilde\beta_n\right)=\left\{\sum_{j=1}^n\left(\frac{T_j}{\sum_{j=1}^n T_j}\right)\mu_j,\sqrt{\sum_{j=1}^n\left(\frac{T_j}{\sum_{j=1}^n T_j}\right)^2\sigma_j^2}\right\}。\quad(6)$$

证明　显然，由式（5）集结得到的结果仍为正态分布数。下面用数学归纳法证明式（6）。

1）当$n=2$时，由于

$$\frac{T_1}{\sum_{j=1}^2 T_j}\tilde\beta_1=\left\{\frac{T_1}{\sum_{j=1}^2 T_j}\mu_1,\ \frac{T_1}{\sum_{j=1}^2 T_j}\sigma_1\right\},$$

$$\frac{T_2}{\sum_{j=1}^2 T_j}\tilde\beta_2=\left\{\frac{T_2}{\sum_{j=1}^2 T_j}\mu_2,\ \frac{T_2}{\sum_{j=1}^2 T_j}\sigma_2\right\},$$

则

$$\mathrm{NDNPWA}\left(\tilde\beta_1,\tilde\beta_2\right)=\frac{T_1}{\sum_{j=1}^2 T_j}\tilde\beta_1\oplus\frac{T_2}{\sum_{j=1}^2 T_j}\tilde\beta_2=$$

$$\left\{\frac{T_1}{\sum_{j=1}^2 T_j}\mu_1,\ \frac{T_1}{\sum_{j=1}^2 T_j}\sigma_1\right\}\oplus\left\{\frac{T_2}{\sum_{j=1}^2 T_j}\mu_2,\ \frac{T_2}{\sum_{j=1}^2 T_j}\sigma_2\right\}=$$

$$\left\{\frac{T_1}{\sum_{j=1}^2 T_j}\mu_1+\frac{T_2}{\sum_{j=1}^2 T_j}\mu_2,\ \sqrt{\left(\frac{T_1}{\sum_{j=1}^2 T_j}\sigma_1\right)^2+\left(\frac{T_2}{\sum_{j=1}^2 T_j}\sigma_2\right)^2}\right\}=$$

$$\left\{\frac{T_1}{\sum_{j=1}^2 T_j}\mu_1+\frac{T_2}{\sum_{j=1}^2 T_j}\mu_2,\ \sqrt{\left(\frac{T_1}{\sum_{j=1}^2 T_j}\right)^2\sigma_1{}^2+\left(\frac{T_2}{\sum_{j=1}^2 T_j}\right)^2\sigma_2{}^2}\right\}=$$

$$\left\{\sum_{j=1}^2\left(\frac{T_j}{\sum_{j=1}^2 T_j}\right)\mu_j,\ \sqrt{\sum_{j=1}^2\left(\frac{T_j}{\sum_{j=1}^2 T_j}\right)^2\sigma_j^2}\right\}。$$

2）假设当$n=k$时式（6）成立，即

$$\mathrm{NDNPWA}\left(\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2,\cdots,\tilde{\beta}_n\right)=$$

$$\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{n}T_j}\right)\mu_j,\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{n}T_j}\right)^2\sigma_j^2}\right\}。$$

则当 $n=k+1$ 时，由定义2可得：

$$\mathrm{NDNPWA}\left(\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2,\cdots,\tilde{\beta}_k,\tilde{\beta}_{k+1}\right)=$$

$$\frac{T_1}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}\tilde{\beta}_1\oplus\frac{T_2}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}\tilde{\beta}_2\oplus\cdots\oplus\frac{T_k}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}\tilde{\beta}_k\oplus\frac{T_{k+1}}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}\tilde{\beta}_{k+1}=$$

$$\left\{\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}\right)\mu_j,\sqrt{\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}\right)^2\sigma_j^2}\right\}\oplus$$

$$\left\{\frac{T_{k+1}}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}\mu_{k+1},\ \frac{T_{k+1}}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}\sigma_{k+1}\right\}=$$

$$\left\{\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}\right)\mu_j+\frac{T_{k+1}}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}\mu_{k+1},\right.$$

$$\left.\sqrt{\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}\right)^2\sigma_j^2+\left(\frac{T_{k+1}}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}\sigma_{k+1}\right)^2}\right\}=$$

$$\left\{\sum_{j=1}^{k+1}\left(\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}\right)\mu_j,\sqrt{\sum_{j=1}^{k+1}\left(\frac{T_j}{\sum_{j=1}^{k+1}T_j}\right)^2\sigma_j^2}\right\}。$$

即当 $n=k+1$ 时，式（6）也成立。

综合1）和2）可得，对 $n\in\mathbf{N}$ 且 $n\geqslant 2$ 时，式（6）均成立。定理2证毕。

NDNPWA算子具有以下些性质：

定理3（幂等性）　设 $\tilde{\beta}_j=\{\mu_j,\sigma_j\}(j=1, 2, \cdots, n)$ 为一组正态分布数，$T_j=\prod_{k=1}^{j-1}\mu_k(j=2, 3, \cdots, n)$，$T_1=1$，$\mu_k$ 是正态分布数 $\tilde{\beta}_k$ 的数学期望。如果所有 $\tilde{\beta}_j(j=1, 2, \cdots, n)$ 都相等，即 $\tilde{\beta}_j=\tilde{\beta}$，那么

$$\mathrm{NDNPWA}\left(\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2,\cdots,\tilde{\beta}_n\right)=\tilde{\beta}。\quad（7）$$

定理4（单调性）　设 $\tilde{\beta}_j=\{\mu_j,\sigma_j\}$ 和 $\tilde{\beta}^*_j=\{\mu^*_j,\sigma^*_j\}$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ 为2组正态分布数，$T_j=\prod_{k=1}^{j-1}\mu_k$，$T^*_j=\prod_{k=1}^{j-1}\mu^*_k$ $(j=2,3,\cdots,n)$，$T_1=T^*_1=1$，μ_k 是正态分布数 $\tilde{\beta}_k$ 的数学期望，μ^*_k 是正态分布数 $\tilde{\beta}^*_k$ 的数学期望。若 $\tilde{\beta}_j\leqslant\tilde{\beta}^*_j$，那么

$$\mathrm{NDNPWA}\left(\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2,\cdots,\tilde{\beta}_n\right)\leqslant$$

$$\mathrm{NDNPWA}\left(\tilde{\beta}^*_1,\tilde{\beta}^*_2,\cdots,\tilde{\beta}^*_n\right)。\quad（8）$$

定理5（有界性）　设 $\tilde{\beta}_j=\{\mu_j,\sigma_j\}(j=1, 2, \cdots, n)$ 为一组正态分布数，$T_j=\prod_{k=1}^{j-1}\mu_k(j=2, 3, \cdots, n)$，$T_1=1$，$\mu_k$ 是正态分布数 $\tilde{\beta}_k$ 的数学期望。令

$$\tilde{\beta}^-=\min_j\left\{\tilde{\beta}_j\right\},\ \tilde{\beta}^+=\max_j\left\{\tilde{\beta}_j\right\},$$

则

$$\tilde{\beta}^-\leqslant\mathrm{NDNPWA}\left(\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2,\cdots,\tilde{\beta}_n\right)\leqslant\tilde{\beta}^+。\quad（9）$$

定理6　设 $\tilde{\beta}_j=\{\mu_j,\sigma_j\}(j=1, 2, \cdots, n)$ 为一组正态分布数，$T_j=\prod_{k=1}^{j-1}\mu_k(j=2, 3, \cdots, n)$，$T_1=1$，$\mu_k$ 是正态分布数 $\tilde{\beta}_k$ 的数学期望。如果 $\tilde{\alpha}=\{\mu_m,\sigma_m\}$ 是一个正态分布数，那么

$$\mathrm{NDNPWA}\left(\tilde{\beta}_1\oplus\tilde{\alpha},\tilde{\beta}_2\oplus\tilde{\alpha},\cdots,\tilde{\beta}_n\oplus\tilde{\alpha}\right)=$$

$$\mathrm{NDNPWA}\left(\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2,\cdots,\tilde{\beta}_n\right)\oplus\tilde{\alpha}。\quad（10）$$

4　基于NDNPWA算子的MCGDM方法

在某个MCGDM问题中，设 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 为决策方案集；$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_p\}$ 为决策专家集，其加权向量为 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p)$，满足 $\lambda_k\geqslant 0$，$\sum_{k=1}^{p}\lambda_k=1$；$C=\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$ 为准则集，各准则之间具有优先级别 $C_1\succ C_2\succ\cdots\succ C_n$，即如果 $j<l$，则准则 C_j 的优先级别高于 C_l 的优先级别。假设专家 $e_k(k=1, 2, \cdots, p)$ 关于决策方案 $A_i(i=1, 2, \cdots, m)$ 在准则 $C_j(j=1, 2, \cdots, n)$ 下的评价值为 $X_{ij}(k)$，这里 $X_{ij}(k)\sim N\left(\mu_{ij}(k),(\sigma_{ij}(k))^2\right)$ 为正态随机变量，可用正态分布 $\tilde{\beta}_{ij}(k)=\{\mu_{ij}(k),\sigma_{ij}(k)\}$ 表示，其中 $\mu_{ij}(k)$ 和 $\sigma_{ij}(k)$ 均已知，从而得到各决策专家 $e_k(k=1, 2, \cdots, p)$ 给出的初始随机决策矩阵

$$\boldsymbol{D}(k)=\left(N\left(\mu_{ij}(k),(\sigma_{ij}(k))^2\right)\right)_{m\times n}(k=1,2,\cdots,p),$$

试确定这些方案的排序。

根据上述决策信息，以下给出一种基于NDNPWA算子的MCGDM方法，具体步骤如下：

步骤1　利用NDNWAA算子

$$\tilde{\beta}_{ij}=\mathrm{NDNWAA}_{\lambda}\left(\tilde{\beta}_{ij}(1),\tilde{\beta}_{ij}(2),\cdots,\tilde{\beta}_{ij}(p)\right) \tag{11}$$

把所有决策者的初始随机决策矩阵

$$\boldsymbol{D}(k)=\left(N\left(\mu_{ij}(k),\left(\sigma_{ij}(k)\right)^2\right)\right)_{m\times n}\ (k=1,2,\cdots,p)$$

集结为群体评价值矩阵

$$\boldsymbol{B}=\left(\tilde{\beta}_{ij}\right)_{m\times n},$$

式中$\tilde{\beta}_{ij}=\{\mu_{ij},\sigma_{ij}\}$，其中$\mu_{ij}=\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\mu_{ij}(k)$，$\sigma_{ij}=\sqrt{\sum_{k=1}^{p}\lambda_k^2\left(\sigma_{ij}(k)\right)^2}$　$(i=1,2,\cdots,m；j=1,2,\cdots,n)$。

步骤2　利用下面的式（12）~（14）将群体评价值$\tilde{\beta}_{ij}=\{\mu_{ij},\sigma_{ij}\}(i=1,2,\cdots,m；j=1,2,\cdots,n)$转化为规范化的群体评价值$\bar{\beta}_{ij}=\{\bar{\mu}_{ij},\bar{\sigma}_{ij}\}(i=1,2,\cdots,m；j=1,2,\cdots,n)$，得到规范化的群体评价值矩阵

$$\bar{\boldsymbol{B}}=\left(\bar{\beta}_{ij}\right)_{m\times n}。$$

若准则为效益型，则

$$\bar{\mu}_{ij}=\frac{\mu_{ij}}{\max\limits_{i}\left(\mu_{ij}\right)}； \tag{12}$$

若准则为成本型，则

$$\bar{\mu}_{ij}=\frac{\min\limits_{i}\left(\mu_{ij}\right)}{\mu_{ij}}。 \tag{13}$$

由于方差是相对于数学期望而言的，故无论准则是效益型还是成本型，都有

$$\bar{\sigma}_{ij}=\frac{\sigma_{ij}}{\max\limits_{i}\left(\mu_{ij}\right)}。 \tag{14}$$

步骤3　根据决策矩阵$\bar{\boldsymbol{B}}=\left(\bar{\beta}_{ij}\right)_{m\times n}$，利用下面的式（15）计算准则优先权重$T_{ij}(i=1,2,\cdots,m；j=1,2,\cdots,n)$：

$$Y_{i1}=1，T_{ij}=\prod_{l=1}^{j-1}\bar{\mu}_{il}，j=2,\cdots,n。 \tag{15}$$

步骤4　利用NDNPWA算子

$$\bar{\beta}_i=\mathrm{NDNPWA}\left(\bar{\beta}_{i1},\bar{\beta}_{i2},\cdots,\bar{\beta}_{in}\right)=\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{T_{ij}}{\sum\limits_{j=1}^{n}T_{ij}}\right)\bar{\mu}_{ij},\ \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{T_{ij}}{\sum\limits_{j=1}^{n}T_{ij}}\right)^2\bar{\sigma}_{ij}^2}\right\} \tag{16}$$

对决策矩阵$\bar{\boldsymbol{B}}=\left(\bar{\beta}_{ij}\right)_{m\times n}$中第$i$行的群体评价值进行集结，得到方案$A_i(i=1,2,\cdots,m)$的综合群体评价值$\bar{\beta}_i$（$i=1,2,\cdots,m$）。

步骤5　根据定义4对各方案$A_i(i=1,2,\cdots,m)$的综合群体评价值$\bar{\beta}_i$（$i=1,2,\cdots,m$）进行比较，进而对各方案$A_i(i=1,2,\cdots,m)$进行排序，并选择最优方案。

5　实例分析

某风险投资公司决定选择一些项目进行投资。现有5个投资方案$A_i(i=1,2,\cdots,5)$可供选择，考核指标（即准则）有：投资额C_1（万元），风险损失值C_2（万元），风险盈利值C_3（万元）[5]，它们之间存在优先级别$C_1\succ C_2\succ C_3$。现由3位决策专家（决策专家e_1为董事长，决策专家e_2为投资公司经理，决策专家e_3为专家，他们的权重向量为$\boldsymbol{\lambda}=\left(\frac{3}{7},\frac{2}{7},\frac{2}{7}\right)^{\mathrm{T}}$）对上述3项指标进行评估。评估的初始随机决策矩阵$\boldsymbol{D}(k)=\left(N\left(\mu_{ij}(k),\left(\sigma_{ij}(k)\right)^2\right)\right)_{5\times 3}$（$k=1,2,3$）见表1~3，试确定最优方案。

表1　初始随机决策矩阵$\boldsymbol{D}(1)$

Table 1　Initial random decision matrix $\boldsymbol{D}(1)$

方案	准则		
	C_1	C_2	C_3
A_1	$N(268, 81)$	$N(164, 64)$	$N(98, 31)$
A_2	$N(295, 126)$	$N(175, 92)$	$N(112, 38)$
A_3	$N(256, 99)$	$N(168, 78)$	$N(104, 38)$
A_4	$N(347, 99)$	$N(245, 102)$	$N(125, 66)$
A_5	$N(234, 108)$	$N(216, 108)$	$N(121, 68)$

表2　初始随机决策矩阵$\boldsymbol{D}(2)$

Table 2　Initial nitial random decision matrix $\boldsymbol{D}(2)$

方案	准则		
	C_1	C_2	C_3
A_1	$N(267, 79)$	$N(164, 62)$	$N(98, 31)$
A_2	$N(283, 101)$	$N(179, 93)$	$N(112, 38)$
A_3	$N(256, 94)$	$N(169, 76)$	$N(104, 38)$
A_4	$N(342, 98)$	$N(246, 103)$	$N(125, 66)$
A_5	$N(235, 110)$	$N(217, 109)$	$N(121, 68)$

表3　初始随机决策矩阵$\boldsymbol{D}(3)$

Table 3　Initial random decision matrix $\boldsymbol{D}(3)$

方案	准则		
	C_1	C_2	C_3
A_1	$N(266, 78)$	$N(167, 62)$	$N(99, 23)$
A_2	$N(293, 108)$	$N(178, 92)$	$N(113, 36)$
A_3	$N(254, 93)$	$N(171, 77)$	$N(105, 37)$
A_4	$N(345, 93)$	$N(243, 102)$	$N(127, 69)$
A_5	$N(238, 105)$	$N(216, 108)$	$N(121, 68)$

下面利用本文提出的决策方法求解。

步骤1　利用NDNWAA算子，即式（11），把3个决策专家e_k（$k=1,2,3$）给出的初始随机决策矩阵$\boldsymbol{D}(k)=\left(N\left(\mu_{ij}(k),\left(\sigma_{ij}(k)\right)^2\right)\right)_{5\times 3}$（$k=1,2,3$）集结为群体评价值矩阵$\boldsymbol{B}=\left(\tilde{\beta}_{ij}\right)_{5\times 3}$，见表4。

表4 群体评价值矩阵$\boldsymbol{B}$

Table 4 Group evaluation value matrix $\boldsymbol{B}$

方案	准则		
	C_1	C_2	C_3
A_1	(267.142 9,8.147 9)	(164.857 1,4.677 3)	(98.571 4,3.191 2)
A_2	(291.000 0,6.340 7)	(177.000 0,5.656 9)	(112.285 7,3.585 7)
A_3	(255.428 6,5.783 5)	(169.142 9,5.178 4)	(104.571 4,3.608 4)
A_4	(345.000 0,5.860 6)	(244.714 3,5.955 6)	(125.857 1,4.827 6)
A_5	(235.428 6,6.114 6)	(216.285 7,6.127 9)	(120.714 3,4.865 5)

步骤2 利用式（12）~（14）将群体评价值矩阵$\boldsymbol{B}=\left(\tilde{\beta}_{ij}\right)_{5\times3}$转化为规范化的决策矩阵$\overline{\boldsymbol{B}}=\left(\overline{\tilde{\beta}}_{ij}\right)_{5\times3}$，见表5。

表5 规范化的群体评价值矩阵$\overline{\boldsymbol{B}}$

Table 5 Normalized group evaluation value matrix $\overline{\boldsymbol{B}}$

方案	准则		
	C_1	C_2	C_3
A_1	(0.881 3, 0.023 6)	(1.000 0, 0.019 1)	(0.783 2, 0.025 4)
A_2	(0.809 0, 0.018 4)	(0.931 4, 0.023 1)	(0.892 2, 0.028 5)
A_3	(0.921 7, 0.016 8)	(0.974 7, 0.021 2)	(0.830 9, 0.028 7)
A_4	(0.682 4, 0.017 0)	(0.673 7, 0.024 3)	(1.000 0, 0.038 4)
A_5	(1.000 0, 0.017 7)	(0.762 2, 0.025 0)	(0.959 1, 0.038 7)

步骤3 利用式（15）计算得到准则优先权重T_{ij} (i=1, 2, …, 5；j=1, 2, 3)：

$$\boldsymbol{T}_{ij}=\begin{pmatrix}1 & 0.881\,3 & 0.881\,3\\ 1 & 0.809\,0 & 0.753\,5\\ 1 & 0.921\,7 & 0.898\,4\\ 1 & 0.682\,4 & 0.459\,7\\ 1 & 1.000\,0 & 0.762\,2\end{pmatrix}。$$

步骤4 利用NDNPWA算子，即式（16）对决策矩阵$\overline{\boldsymbol{B}}$中第$i$行的群体评价值进行集结，得到方案$A_i$ (i=1, 2, …, 5)的综合群体评价值$\overline{\tilde{\beta}}_i$($i$=1, 2, …, 5)：

$\overline{\tilde{\beta}}_1=(0.887\,9,\ 0.013\,3)$，$\overline{\tilde{\beta}}_2=(0.872\,1,\ 0.013\,2)$，

$\overline{\tilde{\beta}}_3=(0.910\,1,\ 0.012\,9)$，$\overline{\tilde{\beta}}_4=(0.747\,8,\ 0.013\,8)$，

$\overline{\tilde{\beta}}_5=(0.902\,6,\ 0.015\,4)$。

步骤5 根据定义4对各方案A_i(i=1, 2, …, 5)的综合群体评价值$\overline{\tilde{\beta}}_i$($i$=1, 2, …, 5)进行比较，并选择最优方案。由于$\bar{\mu}_1=0.887\,9$，$\bar{\mu}_2=0.872\,1$，$\bar{\mu}_3=0.910\,1$，$\bar{\mu}_4=0.747\,8$，$\bar{\mu}_5=0.902\,6$，

$$\bar{\mu}_3>\bar{\mu}_5>\bar{\mu}_1>\bar{\mu}_2>\bar{\mu}_4,$$

各方案A_i(i=1, 2, …, 5)的排序为：

$$A_3\succ A_5\succ A_1\succ A_2\succ A_4。$$

因此，最优投资方案为A_3。

6 结语

本文针对准则值为正态随机变量，而准则之间具有优先级别的随机MCGDM问题，在NDNWAA算子和PA算子的基础上，定义了一种考虑准则之间具有优先级别的正态分布数集结算子，即NDNPWA算子，并研究了该算子的相关性质。进一步，基于NDNPWA算子和NDNWAA算子，提出了一种准则值为正态随机变量，准则之间具有优先级别，而决策者之间不具有优先级别的随机MCGDM方法，且详细给出了该方法的步骤。最后，通过一个实际例子对本文提出方法的可行性和有效性进行了验证。实例验证表明，本文提出的决策方法是可行的、有效的。由于现实中准则值为正态随机变量的MCDM问题大量存在，准则之间具有优先级别的情形也大量存在，因而本文的研究具有重要的实际意义和应用价值，可广泛应用于供应链管理、应急管理、项目评估、维修服务以及军事系统效能评价等相关决策中。

参考文献：

[1] Lahdelma R，Makkonen S，Salminen P. Multivariate Gaussian Criteria in SMAA[J]. European Journal of Operational Research，2006，170 (3)：957-970.

[2] Yao S B，Yue C Y. Approach to Stochastic Multi-Attribute Decision Problems Using Rough Sets Theory[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics，2006，17 (1)：103-108.

[3] 姜广田，樊治平，刘 洋，等. 一种具有正态随机变量的多属性决策方法[J]. 控制与决策，2009，24(8)：1187-1191.
Jiang Guangtian，Fan Zhiping，Liu Yang，et al. Method for Multiple Attribute Decision Making with Normal Random Variables[J]. Control and Decision，2009，24(8)：1187-1191.

[4] 王坚强，任 剑. 基于WC-OWA算子的随机多准则决策方法[J]. 控制与决策，2007，22 (12)：1429-1432.
Wang Jianqiang，Ren Jian. Stochastic Multi-Criteria Decision-Making Method Based on WC-OWA Operator [J]. Control and Decision，2007，22(12)：1429-1432.

[5] 汪新凡，杨小娟. 信息不完全确定的动态随机多属性决策方法[J]. 系统工程理论与实践，2010，30 (2)：332-338.
Wang Xinfan，Yang Xiaojuan. Dynamic Stochastic Multiple Attribute Decision Making Method with Incomplete Certain Information[J]. Systems Engineering-Theory & Practice，2010，30(2)：332-338.

[6] Yager R R. Prioritized Aggregation Operators[J]. International Journal of Approximate Reasoning，2008，48 (1)：263-274.

[7] Yager R R. Prioritized OWA aggregation[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making，2009，8(3)：245-262.

（责任编辑：邓光辉）