第26卷第5期
2012年9月

湖南工业大学学报
Journal of Hunan University of Technology

Vol.26 No.5
Sep. 2012

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2012.05.003

广义左Clifford半群的半直积

徐亚男

（山东省经济管理干部学院 基础部，山东 济南 250014）

摘　要：在不含单位元的情况下，通过半群S和T的子半群$T^e=\left\{t^e\,|\,t\in T\right\}$，给出了广义左Clifford半群的半直积的刻画，得到了2个半群的半直积为广义左Clifford半群的充要条件。

关键词：左Clifford半群；广义左Clifford半群；半直积

中图分类号：O152.7　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2012)05-0012-03

Semidirect Products of a Generalized Left Cliffofd Semigroups

Xu Ya’nan

（Foundation Department，Shandong Economic Management Institute，Jinan 250014，China）

Abstract: Without identity elements, discusses semidirect products of generalized left clifford semigroups through subsemigroups $T^e=\left\{t^e\,|\,t\in T\right\}$ of semigroups *S* and *T*, and obtains sufficient conditions that the semidirect products of two semigroups are generalized left clifford semigroups.

Keywords: left clifford semigroups; generalized left clifford semigroups; semidirect products

1　背景知识

1983年W. R. Nico在文献[1]中刻画了半直积的正则性，1989年T. Saito在文献[2]中给出了纯正半群半直积的刻画，后来，张玉芬在文献[3]中就左Clifford拟正则半群刻画了这一问题。以上这些工作都是在含幺半群的情况下进行的，本文在去掉幺元的情况下，讨论广义左Clifford半群的半直积问题。

定义1[1]　设S和T为半群，End(T)是T的自同态半群，α：$S\to\mathrm{End}(T)$，$s\to\alpha(s)$是给定的半群同态映射。对每个$s\in S$和$t\in T$，用t^s表示t在$\alpha(s)$下的像$t^{\alpha(s)}$。显然，对任意的$s,s_1,s_2\in S$，$t,t_1,t_2\in T$有$\left(t_1t_2\right)^s=t_1^{\,s}t_2^{\,s}$，$t^{s_1s_2}=\left(t^{s_1}\right)^{s_2}$。半直积$S\times_\alpha T$是集合$\left\{(s,t)\,|\,s\in S,t\in T\right\}$关于如下定义的乘法作成的一个半群：

$$\left(s_1,t_1\right)\left(s_2,t_2\right)=\left(s_1s_2,t_1^{\,s_2}t_2\right)。$$

本文中对于半群S，用$E(S)$表示S的幂等元素集，对任意的$s\in S$，$V(s)$表示元素s的逆元集。

定义2[4]　设S为正则半群，若对任意的$a\in S$，有$aS\subseteq Sa$，则称S为左Clifford半群。

定义3　设S为完全正则半群，若对任意的$e,f\in E(S)$，存在$n\in\mathbf{Z}^+$，使$(efe)^n=(ef)^n$，则称S为广义左Clifford半群。

2　半直积

引理1　设S, T为半群，α：$S\to\mathrm{End}(T)$，$s\to\alpha(s)$为给定的半群同态映射，半直积$S\times_\alpha T$是广义左Clifford半群，则有

1）对任意$e\in E(S)$，S和T^e均是广义左Clifford半

收稿日期：2012-08-07

作者简介：徐亚男（1975-），男，山东郯城人，山东省经济管理干部学院讲师，硕士，主要研究方向为代数半群，
E-mail：xuyanan2652@sina.com

群，其中$T^e=\{t^e \mid t\in T\}$；

2）对任意$e\in E(S)$，$t\in T$若$t^et=t$，则$t^e=t$；

3）对任意$e\in E(S)$，$t\in T$则$t^e=t$；

4）对任意$s\in S$，$t\in T$，存在$t_1\in V(t)$使$(t_1t)^s=tt_1$。

证明 1）对$\forall s\in S$，$t\in T$，由于$S\times_\alpha T$是广义左Clifford半群，则$\exists(s_1,t_1)\in S\times_\alpha T$，使

$$(s,t)(s_1,t_1)(s,t)=(s,t),$$
$$(s,t)(s_1,t_1)=(s_1,t_1)(s,t),$$

故

$$ss_1s=s, ss_1=s_1s,$$

从而S为完全正则半群。

对$\forall s\in E(S)$，显然T^e是T的子半群。

对$\forall s\in E(S)$，由于$S\times_\alpha T$是广义左Clifford半群，则$\exists(s_2,t_2)\in S\times_\alpha T$使

$$(e,t)(s_2,t_2)(e,t)=(e,t),$$
$$(e,t)(s_2,t_2)=(s_2,t_2)(e,t)$$

即

$$es_2e=e,\ es_2=s_2e,$$
$$t^{s_2e}t_2{}^et=t,\ t^{s_2}t_2=t_2{}^et,$$

故

$$s_2=e^{-1}=e,\ t=t^et_2^et,\ t^et_2=t_2^et。$$

从而

$$t^e=t^et_2^et^e, t^et_2^e=t_2^et^e,$$

所以T^e为完全正则半群。

对$\forall e,f\in E(S)$，$t, u\in E(T)$，有

$$(e,t^e),(f,u^f)\in E(S\times_\alpha T)。$$

由于$S\times_\alpha T$是广义左Clifford半群，则存在$n\in\mathbf{Z}^+$使

$$\left((e,t^e)(f,u^f)(e,t^e)\right)^n=\left((e,t^e)(f,u^f)\right)^n,$$

故$(efe)^n=(ef)^n$，从而S为广义左Clifford半群。

对$\forall e\in E(S)$设$t^e,u^e\in E(T^e)$，则

$$(e,t^e),(e,u^e)\in E(S\times_\alpha T)。$$

由于$S\times_\alpha T$是广义左Clifford半群，则存在$n\in\mathbf{Z}^+$使

$$\left((e,t^e)(e,u^e)(e,t^e)\right)^n=\left((e,t^e)(e,u^e)\right)^n,$$

故$(t^eu^et^e)^n=(t^eu^e)^n$，从而T^e为广义左Clifford半群。

2）对任意$e\in E(S)$，$t\in T$，由$t^et=t$可知$t^e\in E(T^e)$，且$(e,t),(e,t^e)\in E(S\times_\alpha T)$。

由于$S\times_\alpha T$是广义左Clifford半群，则存在$n\in\mathbf{Z}^+$使

$$\left((e,t)(e,t^e)(e,t)\right)^n=\left((e,t^e)(e,t^e)\right)^n,$$

即

$$(e,t)^n=(e,t^e)^n,$$

故$(e,t)=(e,t^e)$，所以$t^e=t$。

3）对任意$e\in E(S)$，$t\in T$，由于$S\times_\alpha T$是广义左Clifford半群，则$\exists(s_2,t_2)\in S\times_\alpha T$使

$$\begin{cases}(e,t)(s_2,t_2)(e,t)=(e,t),\\(e,t)(s_2,t_2)=(s_2,t_2)(e,t)。\end{cases}\tag{1}$$

即

$$es_2e=e,\ es_2=s_2e,$$
$$t^{s_2e}t_2{}^et=t,\ t^{s_2}t_2=t_2{}^et,$$

故

$$s_2=e^{-1}=e,\ t=t^et_2{}^et,\ t^et_2=t_2{}^et,$$
$$(e,t_2)(e,t)=(e,t_2{}^et)\in E(S\times_\alpha T)。$$

由结论2）知$(t_2{}^et)^e=t_2{}^et$，即$t^et_2=t_2^et^e$且$t^e=t^et_2^et^e$，所以

$$\begin{cases}(e,t^e)(e,t_2)(e,t^e)=(e,t^e),\\(e,t^e)(e,t_2)=(e,t_2)(e,t^e)。\end{cases}\tag{2}$$

由式（1）和式（2）知$(e,t)=(e,t^e)$，所以$t^e=t$。

4）对$\forall s\in S$，$t\in T$，由于$S\times_\alpha T$是广义左Clifford半群，则$\exists(s_2,t_2)\in S\times_\alpha T$使

$$(s,t)(s_2,t_2)(s,t)=(s,t),$$
$$(s,t)(s_2,t_2)=(s_2,t_2)(s,t),$$

即

$$ss_2s=s,\ ss_2=s_2s;$$
$$t^{s_2s}t_2{}^st=t,\ t^{s_2}t_2=t_2{}^st。$$

故

$$s_2=s^{-1},\ t=t^{s^{-1}s}t_2{}^st,\ t^{s^{-1}}t_2=t_2{}^st。$$

由结论3）知

$$t=tt_2{}^st,\left(t^{s^{-1}}t_2\right)^s=\left(t_2{}^st\right)^s,$$

即

$$t=tt_2{}^st,\left(t_2{}^st\right)^s=tt_2{}^s。$$

令$t_1=t_2^s$，显然$t_1\in V(t)$，且满足$(t_1t)^s=tt_1$。

证毕。

定理1 设S, T为半群，$\alpha: S\to\mathrm{End}(T)$，$s\to\alpha(s)$是给定的半群同态映射，则半直积$S\times_\alpha T$是广义左Clifford半群的充要条件是：

1）S和T均是广义左Clifford半群；

2）对任意$e\in E(S)$，$t\in T$，则$t^e=t$；

3）对任意$s\in S$，$t\in T$，存在$t_1\in V(t)$使$(t_1t)^s=tt_1$。

证明 先证必要性

由引理1的1）和3）可得定理1的1）。

2）和3）的证明与引理1的3）和4）相同。

再证充分性

对$\forall (s,t)\in \left(S\times_{\alpha} T\right)$，由条件3）知，$\exists t_1\in V(t)$使$\left(t_1 t\right)^{s}=tt_1$。

再由条件2）知，

$$(s,t)\left(s^{-1},t_1^{s^{-1}}\right)(s,t)=\left(s,t^{s^{-1}s}t_1^{s^{-1}s}t\right)=\left(s,tt_1t\right)=(s,t)$$

$$(s,t)\left(s^{-1},t_1^{s^{-1}}\right)=\left(ss^{-1},t^{s^{-1}}t_1^{s^{-1}}\right),$$

$$\left(s^{-1},t_1^{s^{-1}}\right)(s,t)=\left(s^{-1}s,t_1^{s^{-1}s}t\right)=$$

$$\left(ss^{-1},t_1t\right)=\left(ss^{-1},(t_1t)^{ss^{-1}}\right)=$$

$$\left(ss^{-1},(t_1t)^{s^{-1}}\right)=\left(ss^{-1},t^{s^{-1}}t_1^{s^{-1}}\right)。$$

即

$$(s,t)\left(s^{-1},t_1^{s^{-1}}\right)(s,t)=$$

$$(s,t),(s,t)\left(s^{-1},t_1^{s^{-1}}\right)=$$

$$\left(s^{-1},t_1^{s^{-1}}\right)(s,t)。$$

所以$S\times_{\alpha} T$为完全正则半群。

对$\forall (e,u),(f,v)\in E\left(S\times_{\alpha} T\right)$，有$e,f\in E(S)$。

由条件2）知，有$u,v\in E(T)$。

由条件1）知，存在n_1, $n_2\in\mathbf{Z}^+$使

$$(efe)^{n_1}=(ef)^{n_1}，(uvu)^{n_2}=(uv)^{n_2}。$$

令$n=n_1n_2$，则

$$(efe)^{n}=(ef)^{n}，(uvu)^{n}=(uv)^{n}。$$

再由条件2）知，

$$(e,u)(f,v)(e,u)^{n}=\left(efe,u^{fe}v^{e}u\right)^{n}=$$

$$(efe,uvu)^{n}=\left((efe)^{n},(uvu)^{n}\right),$$

$$((e,u)(f,v))^{n}=\left(ef,u^{f}v\right)^{n}=$$

$$(ef,uv)^{n}=\left((ef)^{n},(uv)^{n}\right)。$$

即

$$((e,u)(f,v)(e,u))^{n}=((e,u)(f,v))^{n}。$$

所以$S\times_{\alpha} T$是广义左Clifford半群。

定理证毕。

参考文献:

[1] Nico W R. On the Regularity of Semidirect Products[J]. Journal of Algebra，1983，80(1)：29–36.

[2] Saito T. Orthodox Semidirect Products and Wreath Products of Monoids[J]. Semigroup Forum，1989，38(1)：347–354.

[3] 张玉芬. 左Clifford拟正则半群的半直积及结构[J]. 数学研究与评论，1997，17(4)：633–634.
Zhang Yufen，Structure and Semidirect Products of Left Clifford Quasi-Regular Semigroups[J]. Journal of Mathematical Research and Exposition，1997，17(4)：633–634.

[4] 朱聘瑜，郭聿琦，岑嘉评. 左Clifford半群的特征与结构[J]. 中国科学：A辑，1991(6)：582–590.
Zhu Pinyu，Guo Yuqi，Cen Jiaping，Structure and Chacterizations of Left Clifford Semigroups[J]. Science in China：Ser. A，1991(6)：582–590.

[5] 徐亚男，董 星. GV–半群的半直积[J]. 科学技术与工程，2007，7(17)：4415–4416.
Xu Ya'nan，Dong Xing. Semidirect of Two Semigroups to Be a GV-Semigroups[J]. Science Technology and Engineering，2007，7(17)：4415–4416.

[6] 徐亚男，李 刚. 右群的nil–扩张的半格的半直积[J]. 山东师范大学学报：自然科学版，2006，21(1)：31–33.
Xu Ya'nan，Li Gang. Semidirect Product of Two Semigroups to Be a Semilattices of nil-Extensions of Right Groups[J]. Journal of Shandong Normal University：Natural Science，2007，7(17)：4415–4416.

（责任编辑：邓光辉）