第26卷 第5期 湖 南 工 业 大 学 学 报 Vol.26 No.5
2012年9月 Journal of Hunan University of Technology Sep. 2012

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2012.05.001

两类误差下回归函数估计的收敛速度

李　强，陈志彬

（湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007）

摘　要：在收敛系统和$\tilde{\rho}$混合序列情形下，研究了固定设计下非参数回归模型中的回归函数估计。在误差为收敛系统时，得到了较弱矩条件下该估计的收敛速度；在误差为同分布$\tilde{\rho}$混合序列时，得到了该估计的收敛速度。

关键词：收敛系统；$\tilde{\rho}$混合序列；回归函数估计；收敛速度

中图分类号：O212.7　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2012)05-0001-04

Convergence Speed of the Regression Function Estimate under Two Kinds of Errors

Li Qiang，Chen Zhibin

（School of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China）

Abstract：Under convergence system and $\tilde{\rho}$ mixing sequence, the estimate of regression function in the designed nonparametric regression model is investigated. In the error convergence system, the convergence speed of the estimate is obtained under weak moment conditions, and in the error distributed $\tilde{\rho}$ mixing sequence, the convergence speed of the estimate is obtained.

Keywords：convergence system；$\tilde{\rho}$ mixing sequence；estimate of regression function；convergence speed

1　研究背景

考虑如下非参数回归模型：

$$y_i = g\left(x_i\right)+e_i，\ i=1,2,\cdots,n。\tag{1}$$

式中：$x_1, x_2,\cdots, x_n$是固定非随机设计点；

$y_1, y_2,\cdots, y_n$是观测值；

$g(\cdot)$是定义在$[0,1]$上的未知函数；

$\{e_i\}$为一均值为零的随机误差序列。

定义 1　设$\{e_i\}$是一个随机变量序列，若对任何满足$\sum_{i=1}^{\infty}c_i^2<\infty$的数列$\{c_i\}$，$\sum_{i=1}^{\infty}c_ie_i$以概率1收敛，则称$\{e_i\}$为一收敛系统。

收敛系统是界定误差序列的一个较弱的要求。特别地，均值为零、方差有界的独立同分布随机变量序列是一收敛系统；均值为零、方差有界的鞅差序列也是一收敛系统[1]。

收敛系统具有如下性质1。

性质 1　若$\{e_i\}$为一收敛系统，则$\{|e_i|\}$也是一收敛系统。

证明　由收敛系统的定义可知，对于任何满足$\sum_{i=1}^{\infty}c_i^2<\infty$的数列$\{c_i\}$，$\sum_{i=1}^{\infty}c_ie_i$以概率1收敛。

由于数列$\{c_i\}$的任意性，若取

$$c_i' = \begin{cases} c_i，\ e_i \geqslant 0； \\ -c_i, e_i < 0； \end{cases}$$

收稿日期：2012-08-06

基金项目：湖南省教育厅科学研究基金资助项目（11C0413，10C0656），湖南省自然科学基金资助项目（12GG3007）

作者简介：李　强（1975-），男，湖南湘潭人，湖南工业大学讲师，博士，主要从事非参数统计与高维数据分析研究，E-mail：lqdr2008@126.com

显然有$\sum_{i=1}^{\infty}\left(c_i'\right)^2<\infty$，那么$\sum_{i=1}^{\infty}c_i'e_i$以概率1收敛，由于$\sum_{i=1}^{\infty}c_i'e_i=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\left|e_i\right|$，可知$\sum_{i=1}^{\infty}c_i\left|e_i\right|$也以概率1收敛。

证毕。

以上为收敛系统误差，下面引入另一类误差，即同分布$\tilde{\rho}$混合序列误差。

设$\left\{X_i\middle|i=1,2,\cdots,n,\cdots\right\}$是概率空间$(\Omega,\mathfrak{B},P)$上的随机变量序列，$\mathfrak{F}_s=\sigma\left(X_i\middle|i\in S\subset\mathbf{N}\right)$为$\sigma$-域，在$\mathfrak{B}$中给定$\sigma$-域$\mathfrak{F},\mathfrak{K}$令

$$\rho(\mathfrak{F},\mathfrak{K})=\sup\left\{\operatorname{corr}(X,Y)\middle|X\in L_2(\mathfrak{F}),Y\in L_2(\mathfrak{K})\right\},$$

其中

$$\operatorname{corr}(X,Y)=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

为相关系数。

R. C. Bradley[2]首次在概率空间系统中引入如下相依系数：

对于有限子集合$S,T,k\geqslant 0$，令

$$\tilde{\rho}(k)=\sup\left\{\rho\left(\mathfrak{F}_S,\mathfrak{F}_T\right)\middle|S,T\in\mathbf{N},\text{且}\operatorname{dist}(S,T)\geqslant k\right\},$$

显然有

$$0\leqslant\tilde{\rho}(k+1)\leqslant\tilde{\rho}(k)\leqslant 1,$$

且$\tilde{\rho}(0)=1$。

定义2 对于随机序列$\left\{X_i\middle|i=1,2,\cdots,n,\cdots\right\}$，若存在$k\in\mathbf{N}$，使得$\tilde{\rho}(k)\leqslant 1$，则称$\{X_i\}$是$\tilde{\rho}$混合序列。

对于独立随机变量序列，显然有$\tilde{\rho}(k)=0\leqslant 1$，所以独立随机变量序列是$\tilde{\rho}$混合序列的特殊情形。$\tilde{\rho}$混合序列要求对某距离为$k$的任意有限子集之间的相关度不大（相关系数要求小于1），这是一种很弱的相依性要求，因此，$\tilde{\rho}$混合序列是一类很广泛且很有研究价值的随机变量序列。自从R. C. Bradley[2]在其研究报告中引入$\tilde{\rho}$混合序列的概念以来，引起了许多相关学者的关注，有关$\tilde{\rho}$混合序列极限理论的研究已经取得了不少成果[3-6]。

对于模型（1）中的未知函数$g(\cdot)$，定义g的估计为

$$\hat{g}_n(x)=\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(x)y_i\,, \tag{2}$$

式中$W_{ni}(x)=W_{ni}\left(x;x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$是非负权函数。

对于$\hat{g}_n(x)$性质方面的研究，已经获得了较多的成果[7-10]。而该方面研究的一个重点是对于各种不同误差情形进行讨论，科研工作者们在NA序列[7]、鞅差序列[8]、ψ混合序列[9]和独立序列[10]等情形下，都获得了很好的研究结果。但是到目前为止，对于收敛系统和$\tilde{\rho}$混合序列情形下的收敛速度还未见报道，因此，本文将在误差为收敛系统和$\tilde{\rho}$混合序列的两种情形下，给出式（1）所示非参数回归模型的估计收敛速度。

2 主要结果与证明

为了得到本文的主要结果，需给出条件1和2所示假设。

条件1 $g(\cdot)$在$[0,1]$上满足一阶李普希茨条件，即对于任意的$t_1,t_2\in[0,1]$，存在绝对常数L，有

$$\left|g\left(t_1\right)-g\left(t_2\right)\right|\leqslant L\left|t_1-t_2\right|。$$

条件2 当n充分大时，$W_{ni}(\cdot)$满足

i）$\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}W_{ni}(x)=O\left(n^{-2/3}\right)$；

ii）$\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\sum\limits_{i=1}^{n}W_{ni}(x)I\left(\left|x-x_i\right|>a_n\right)=O\left(a_n\right)$，

其中$a_n=n^{-\frac{1}{3}}\log n$；

iii）$\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\sum\limits_{i=1}^{n}W_{ni}(x)\leqslant C$，

其中C表示与n无关的绝对正常数，在同一式子中不同位置的C的值可能不同；

ⅳ) 存在绝对常数$M>0$，使得对于任意$x,y\in[0,1]$及$n\geqslant 1$，都有

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|W_{ni}(x)-W_{ni}(y)\right|\leqslant M\left|x-y\right|。$$

上述关于$g(\cdot)$和$W_{ni}(\cdot)$的条件是一种较为基本的假设，已被许多文献所采用[8, 11]。

下面就模型（1）给出本文的主要结果。

引理1 若$\{e_i\}$是一收敛系统，且条件2中的i）满足，则

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(x)e_i\right|\leqslant O\left(n^{-1/3}\right),\ \text{a.s.}$$

证明 由条件2，有

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\sum_{i=1}^{n}W_{ni}^2(x)\leqslant\sum_{i=1}^{n}W_{ni}\left(x_j\right).\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}W_{ni}\left(x_j\right)\leqslant Cn^{2/3},$$

故而

$$\sum_{i=1}^{n}n^{2/3}W_{nl}^2(x)=\sum_{i=1}^{n}\left(n^{1/3}W_{nl}(x)\right)^2\leqslant C。$$

由收敛系统的定义可知，$\sum_{i=1}^{n}n^{1/3}W_{ni}\left(x_j\right)e_i$以概率1收敛，那么，

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{n}W_{ni}\left(x_j\right)e_i\right|\leqslant O\left(n^{-1/3}\right),\ \text{a.s.}$$

引理1得证。

引理2[8] 若条件1和2全部满足，则

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|E\left(\hat{g}_n(x)\right)-g(x)\right|=O\left(n^{-1/3}\log n\right)。$$

证明 具体参见文献[8]中引理3.4的证明，本文

从略。

定理1　设在模型（1）中，误差为收敛系统，若条件1和2都满足，则

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|\hat{g}_n(x)-g(x)\right|=o\left(n^{-1/3}\log n\right),\ \text{a.s.}\qquad（3）$$

证明

$$\left|\hat{g}_n(x)-g(x)\right|\leqslant$$

$$\left|\hat{g}_n(x)-E\left(\hat{g}_n(x)\right)\right|+\left|E\left(\hat{g}_n(x)\right)-g(x)\right|=$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(x)e_i\right|+\left|E\left(\hat{g}_n(x)\right)-g(x)\right|\triangleq I_1+I_2。$$

由引理1，知$\left|I_1\right|\leqslant Cn^{-1/3}$，

由引理2，知$\left|I_2\right|=O\left(n^{-1/3}\log n\right)$，

故式（3）成立。

定理1证毕。

引理3[3]　设$\left\{X_i\left|i=1,2,\cdots,n\right.\right\}$为同分布$\tilde{\rho}$混合随机变量序列，

$$E\left(X_i\right)=0，\quad E\left(\left|X_i\right|^{\frac{2}{\alpha}}\right)<\infty，\ 0<\alpha\leqslant 1，$$

$$\left|a_{ni}\right|\leqslant Cn^{-\frac{\alpha}{2}-\delta}，\quad 0<\delta\leqslant\frac{\alpha}{2}，$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ni}^2\leqslant Cn^{\theta},$$

则$T=\sum_{i=1}^{n}a_{ni}X_i\xrightarrow{\text{a.s.}}0$。

证明　参见文献[3]中第232–233页，本文从略。

定理2　设在模型（1）中，误差为同分布$\tilde{\rho}$混合序列，若条件1和2都满足，且$E\left(\left|e_i\right|^{\frac{6}{2-3\beta}}\right)<\infty$，则

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|\hat{g}_n(x)-g(x)\right|=o\left(n^{-\beta}\right),\ \text{a.s.}\ 0<\beta<\frac{1}{3}。$$

证明　关键在于证明

$$\left|I_1\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(x)e_i\right|=o\left(n^{-\beta}\right),\ \text{a.s.}$$

令$a_{ni}=n^{\beta}W_{ni}(x),\ 0<\beta<\frac{1}{3}$，

那么

$$\left|a_{ni}\right|\leqslant Cn^{\beta-\frac{2}{3}},$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ni}^2\leqslant\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\sum_{i=1}^{n}n^{2\beta}W_{ni}^2(x)\leqslant$$

$$n^{2\beta}\cdot\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}W_{ni}(x)\cdot\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(x)\leqslant Cn^{2\beta-\frac{2}{3}},$$

在引理3中，取

$$\frac{2}{3}-\beta<\alpha\leqslant 1,\ 0<\delta\leqslant\frac{\alpha}{2},\ \theta=2\left(\beta-\frac{1}{3}\right)<0,$$

则有

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ni}X_i\xrightarrow{\text{a.s.}}0，$$

故$\left|I_1\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(x)e_i\right|=o\left(n^{-\beta}\right)$，a.s.

剩余部分与定理1的证法相同，此处从略。

定理2证毕。

引理4[12]　设$\left\{X_n\right\}$是随机变量序列，对某个正数$p\leqslant 1$和$n\in\mathbf{N}$有$E\left(\left|X_n\right|^p\right)<\infty$。

记$M_n=\sum_{k=1}^{n}E\left(\left|X_k\right|^p\right)$，且$M_n\to\infty$。

设$\psi(x)$满足：存在$x_0>0$时，当$x>x_0$时大于0且非降，且级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\psi(n)}$收敛，则

$$\sum_{i=1}^{n}X_n=o\left(\left(M_n\psi(M_n)\right)^{1/p}\right),\ \text{a.s.}$$

证明　参见文献[12]第270页，本文从略。

定理3　设在模型（1）中，若误差满足

$$\sup_{1\leqslant i\leqslant n}E\left(\left|e_i\right|\right)<\infty，$$

$$\sum_{i=1}^{n}E\left(\left|e_i\right|\right)\leqslant Cn^{\frac{1}{3}}(\log n)^{1-\beta}，$$

且条件1和2都满足，则

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|\hat{g}_n(x)-g(x)\right|=o\left(n^{-1/3}\log n\right),\ \text{a.s.}$$

证明　在引理4中，取

$$p=1,\quad \psi(x)=(\log x)^{\gamma},\quad \gamma>1，$$

可得

$$\sum_{i=1}^{n}\left|e_i\right|=o\left(n^{1/3}\log n\right),\ \text{a.s.}$$

又由条件2中的i）可知，此时

$$\left|I_1\right|=o\left(n^{-1/3}\log n\right),\ \text{a.s.}$$

剩余部分与定理1的证法相同，此处从略。

定理3证毕。

3　结论

在非参数回归模型已有研究成果中，文献[10]要求误差高于二阶矩存在时，模型才能达到收敛速度$n^{-\frac{1}{3}}\log n$；而文献[7]和[8]均要求误差高于三阶矩存在时，模型才能达到收敛速度$n^{-\frac{1}{3}}\log n$；文献[6]仅在三阶矩存在的情形下，模型才能达到本文的收敛速度$n^{-\frac{1}{3}}\log n$。而在本文的研究中，模型在较弱的收敛系统误差序列条件下，即得到了回归函数估计的较快

的收敛速度$n^{-\frac{1}{3}}\log n$；同时，在较弱的同分布$\tilde{\rho}$混合误差序列条件下，也得到了回归函数估计的收敛速度，即

$$o\left(n^{-\beta}\right),0<\beta<\frac{1}{3}。$$

因此，本文在两类误差下对回归函数估计的收敛速度研究是有意义的。

事实上，定理3的证明只要误差序列满足一些矩的条件即可。

参考文献：

[1] 陈希孺，陈桂景，吴启光，等. 线性模型参数的估计理论[M]. 北京：科学出版社，2010：23.
Chen Xiru，Chen Guijing，Wu Qiguang，et al. Estimation Theory of Parameters in Linear Models[M]. Beijing：Science Press，2010：23.

[2] Bradley R C. Equivalent Mixing Conditions for Random Fields[R]. Chapel Hill：Technical Report，1990.

[3] 吴群英. 混合序列的概率极限理论[M]. 北京：科学出版社，2006：206-247.
Wu Qunying. Probability Limit Theory for Mixing Sequences[M]. Beijing：Science Press，2006：206-247.

[4] 蔡光辉，郭宝才. $\tilde{\rho}$混合序列的对数律和强大数律[J]. 科技通报，2006，22(3)：288-291.
Cai Guanghui，Guo Baocai. Law of Logarithm and Strong Law of Large Numbers for $\tilde{\rho}$ Mixing Sequences[J]. Bulletin of Science and Technology，2006，22(3)：288-291.

[5] Wang Xuejun，Hu Shuhe，Shen Yan. Convergence Properties about the Partial Sum of $\tilde{\rho}$-Mixing Random Variable Sequences[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics，2009，26 (2)：320-330.

[6] 邱德华. $\tilde{\rho}$混合随机变量加权和的收敛性[J]. 数学物理学报，2011，31A(1)：132-141.
Qiu Dehua. Convergence Properties for Weighted Sums of $\tilde{\rho}$-Mixing Random Variable[J]. Acta Mathematica Scientia，2011，31A(1)：132-141.

[7] 朱春浩. NA样本下回归函数估计的收敛速度[J]. 大学数学，2008，24(4)：69-75.
Zhu Chunhao. Convergence Rate of the Estimate of the Regression Function under NA Sequence[J]. College Mathematics，2008，24(4)：69-75.

[8] 李国亮，刘禄勤. 误差为鞅差序列的回归函数估计的收敛速度[J]. 系统科学与数学，2007，27(1)：152-160.
Li Guoliang，Liu Luqin. Convergence Rate of the Regression Function under Martingale Difference Sequence[J]. Journal of System Science and Mathmatical Science，2007，27(1)：152-160.

[9] 薛留根. 混合误差下回归函数小波估计的一致收敛度[J]. 数学物理学报，2002，22A(4)：528-535.
Xue Liugen. Uniform Convergence Rates of the Wavelet Estimator of Regression Function Under Mixing Error[J]. Acta Mathematica Scientia，2002，22A(4)：528-535.

[10] 胡舒合. 非参数回归函数估计的渐近正态性[J]. 数学学报，2002，45(3)：433-442.
Hu Shuhe. Asymptotic Normality for Nonparametric Regression Function Estimate[J]. Acta Mathematica Sinica，2002，45(3)：433-442.

[11] 高集体，洪圣岩，梁 华. 部分线性模型中估计的收敛速度[J]. 数学学报，1995，38(5)：658-669.
Gao Jiti，Hong Shengyan，Liang Hua. Convergence Rates of a Class of Estimators in Partly Linear Models[J]. Acta Mathematica Sinica，1995，38(5)：658-669.

[12] 佩特罗夫 B B. 独立随机变量之和的极限定理[M]. 苏 淳，黄可明，译. 合肥：中国科学技术大学出版社，1991：270.
Petrov B B. Limit Theorems for Sum of Independent Random Variables[M]. Su Chun，Huang Keming，Translator. Hefei：Press of University of Science and Technology of China，1991： 270.

（责任编辑：廖友媛）