

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2012.04.016

# 混合连接广义合作网络的度分布分析

雷敏<sup>1</sup>, 敬萍<sup>2</sup>

(1. 湖南工业大学 电气与信息工程学院, 湖南 株洲 412007; 2. 中南大学 数学与统计学院, 湖南 长沙 410075)

**摘要:** 提出了一个合作参与者数  $T$  是随机变量的广义合作网络模型, 新参与者以概率  $p$  随机选择  $T-1$  个合作者, 以概率  $1-p$  择优选择  $T-1$  个合作者。通过节点度变化满足的马尔可夫性质, 利用马尔可夫链的方法和技巧得到了度分布的精确解析表达式。概率  $p$  的取值决定了此广义合作网络的无标度特性, 当  $p < 1$  时是无标度网络, 且标度指数是参数  $p$  的函数。

**关键词:** 广义合作网络; 马氏链; 度分布; 无标度网络

中图分类号: O211

文献标志码: A

文章编号: 1673-9833(2012)04-0069-03

## The Degree Distribution of Generalized Collaboration Network with Mixed Attachments

Lei Min<sup>1</sup>, Jing Ping<sup>2</sup>

(1. School of Electrical and Information Engineering, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Central South University, Changsha 410075, China)

**Abstract:** Proposes a generalized collaboration network which the number of collaborators  $T$  is a random variable, the new member with probability  $p$  chooses  $T-1$  collaborators randomly and with probability  $1-p$  chooses  $T-1$  collaborators preferentially. Through node degree changing, meets Markov property, and by means of Markov chain theory obtains accurate analytic expression of degree distribution. The value of the parameter  $p$  determines the scale-free property of this generalized collaboration network, and when  $p < 1$ , the network is scale-free and the scale exponent is a function of  $p$ .

**Keywords:** generalized collaboration network; Markov Chain; degree distribution; scale-free network

## 0 序言

在社会科学中, 合作网络被定义为由参与者通过某些合作关系而相连的一种网络, 它是由许多完全图组合而成的。科学家们做了大量的与合作网络相关的实证研究工作, 包括科学合作网络<sup>[1-2]</sup>、个体之间友谊网络<sup>[3]</sup>、电影演员合作网络<sup>[4]</sup>。有必要指出的是, 合作网络已经不仅仅局限于社会网络内, 譬如软件合作网络<sup>[5]</sup>、生物系统网络<sup>[6-9]</sup>等也可能出现合作网络的概念。J. P. Onnela 等<sup>[10]</sup>研究了包含 460 多

万个节点的移动电话通信网络。

张培培等<sup>[11]</sup>研究了广义合作网络, 网络构造如下: “设初始  $t=0$  时有  $m_0$  个顶点, 已经连接成若干个完全图项目, 它们的项目度  $h_{i0}$  之和为  $h_0$ 。每时间步网络增加一个新节点, 然后, 按照一定的规则选取  $T-1$  个 ( $T$  为常数) 旧节点, 把这  $T-1$  个旧节点与这个新节点 (共  $T$  个节点) 中两两之间尚未连接的边都连上, 构成一个新的完全图”。利用平均场方法得到网络的度分布, 并且讨论了网络的同类性、群落、层次以及交连度等问题。黄相森等<sup>[12]</sup>讨论了合作网

收稿日期: 2012-06-13

作者简介: 雷敏 (1973-), 女, 湖南株洲人, 湖南工业大学副教授, 博士, 主要研究方向为复杂网络理论及其应用,

E-mail: 13607331653@163.com

络的分类问题。赵清贵等<sup>[13]</sup>用概率的方法给出了度分布的精确解析结果。

合作网络的提出为研究现实的合作关系提供了一个新视角, 在上面的合作网络中, 每个项目都含有相同数目的参与者 ( $T$  为常数)。现实中项目的参与者数量可能随情况的变化发生变动, 如每个电影中演员的数量, 科研论文中引用文章的数量等都不是固定不变的。为此, 本文提出一个项目参与者数  $T$  是随机变量的广义合作网络模型, 新节点以概率  $p$  随机选择合作点, 以概率  $1-p$  择优选择  $T-1$  合作节点。利用马尔可夫链的方法和技巧得到了度分布的精确解析表达式, 分析了此广义合作网络的无标度特性, 并且对两个相邻节点项目度的相关性进行了分析。

## 1 模型描述

项目参与者数  $T$  是随机变量的混合连接广义合作网络模型构造如下:

1) 增长 初始时刻  $t=0$ , 图  $G_0$  为包含  $m_0$  个节点的完全图。每个时间步, 网络增加一个新节点  $t$ ;

2) 混合连接 在时刻  $t$ , 新节点  $t$  在图  $G_{t-1}$  中以概率  $p$  随机或以概率  $1-p$  择优选择  $T-1$  个节点, 然后把这  $T$  个节点中两两之间尚未连接的都连接一条边, 这样就构成图  $G_t$ , 其中,  $T$  为随机变量, 其分布列为  $P(T=i)=p_i, i=2,3,\dots,m(m < m_0)$ 。

对于上面的模型, 若  $p=1$ , 新节点与随机选择的节点合作; 若  $p=0$ , 新节点与择优选择的节点合作。

## 2 项目度分布分析

由此广义合作网络的演化机制, 易知  $\{h_i(t)\}_{t=i,i+1,\dots}$  是一个非齐次马尔可夫链, 由大数定理, 知  $(T_1+T_2+\dots+T_t)/t \rightarrow M$ , 其中  $M$  为随机变量  $T$  的期望。从而当  $t$  充分大时,  $h_0+T_1+T_2+\dots+T_t \approx h_0+Mt$ 。令  $f_i(h_i)$  为  $t$  时刻节点  $i$  (在时刻  $i$  加入到网络中的节点) 得到一条新连边的概率, 即节点  $i$  增加一个项目度的概率。根据全概率公式, 有

$$f_i(h_i) = \sum_{s=2}^m P(T_{t+1}=s)(s-1) \left[ p \frac{1}{m_0+t} + (1-p) \frac{h_i}{h_0+T_1+T_2+\dots+T_t} \right] = p \frac{M-1}{m_0+t} + (1-p) \frac{(M-1)h_i}{h_0+T_1+T_2+\dots+T_t} \quad (1)$$

从而马尔可夫链  $h_i(t)$  的转移概率可表示如下:

$$P(h_i(t+1)=l|h_i(t)=h) = \begin{cases} 1-f_i(h), & l=h; \\ f_i(h), & l=h+1; \\ 0, & \text{其它。} \end{cases} \quad (2)$$

由广义合作网络的构造知, 网络中节点的度数最小为 1, 度数不会减小且每步至多增加 1。

引理 1 极限  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(1,t)$  存在且与初始网络无关, 极限记为  $P(1)$ , 且有

$$P(1) = \frac{1}{1+p(M-1) + \frac{(1-p)(M-1)}{M}} > 0. \quad (3)$$

证明 由  $h_i(t)$  的转移概率及  $P(1, t+1, t+1)$  得

$$P(1, t+1) = \frac{t}{t+1} [1-f_i(1)] P(1, t) + \frac{1}{t+1},$$

解这个差分方程可得

$$P(1,t) = \frac{1}{t} \prod_{i=1}^{t-1} [1-f_i(1)] \left\{ P(1,1) + \sum_{j=1}^{t-1} \frac{1}{\prod_{i=1}^j [1-f_i(1)]} \right\}.$$

由 Stolz 定理得

$$P(1) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(1,t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1+tf_t(1)} = \frac{1}{1+p(M-1) + \frac{(1-p)(M-1)}{M}}.$$

从而引理得证。

对于项目度数为  $h$  的节点, 可能由那些度数为  $h$  的节点不参加项目, 或由那些度数为  $h-1$  的节点参加一个新的项目而得到。从而可得引理 2。

引理 2 当  $h>1$  时, 若极限  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(h-1,t)$  存在, 则极限  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(h,t)$  也存在, 记为  $P(h)$ , 且有

$$P(h) = \frac{p(M-1) + \frac{(1-p)(M-1)(h-1)}{M}}{1+p(M-1) + \frac{(1-p)(M-1)h}{M}} P(h-1). \quad (4)$$

证明 由  $h_i(t)$  的转移概率  $P(h, t+1, t+1)=0$  得

$$P(h, t+1) = \frac{t}{t+1} [1-f_i(h)] P(h, t) + \frac{t}{t+1} f_i(h-1) P(h-1, t).$$

同引理 1 得

$$P(h) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(h, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{tf_t(h-1)}{1+tf_t(h)} P(h-1, t) = \frac{p(M-1) + \frac{(1-p)(M-1)(h-1)}{M}}{1+p(M-1) + \frac{(1-p)(M-1)h}{M}} P(h-1).$$

从而引理得证。

**定理3** 项目参与者数  $T$  是随机变量的混合连接的广义合作网络的稳态分布存在, 且项目度分布有如下的表达式:

当  $p=1$  时,

$$P(h) = \frac{1}{M-1} \left( \frac{M}{M-1} \right)^{-h}; \quad (5)$$

当  $p<1$  时,

$$P(h) = C \frac{\Gamma\left(h + \frac{Mp}{1-p}\right)}{\Gamma\left(h+1 + \frac{Mp}{1-p} + \frac{M}{(1-p)(M-1)}\right)} \propto h^{-\left(1 + \frac{M}{(1-p)(M-1)}\right)}, \quad (6)$$

$$\text{式中 } C = \frac{\Gamma\left(2 + \frac{Mp}{1-p} + \frac{M}{(1-p)(M-1)}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{Mp}{1-p}\right)} \cdot \frac{1}{1 + p(M-1) + \frac{(1-p)(M-1)}{M}}.$$

**证明** 根据引理1和引理2, 知此广义合作网络的稳态分布存在。由公式(3)及(4)可得公式(5)与(6)成立。当  $p=1$  时, 此广义合作网络不是无标度的; 当  $p<1$  时,  $P(h)$  服从度指数  $\gamma = 1 + \frac{M}{(1-p)(M-1)}$  的幂率分布, 即此时的网络是无标度的。

定理得证。

### 3 结语

本文提出了一个项目参与者数  $T$  是一个随机变量广义合作网络模型, 新参与者以一个混合连接方式选择合作者。通过节点的项目度满足的马氏性, 利用马尔可夫链的方法和技巧证明了该广义合作网络的稳态分布是存在, 并且给出了项目度分布的精确解析表达式。概率  $p$  的值决定了网络中节点项目度的分布形式, 仅当  $p<1$  时, 该广义合作网络是标度指数  $\gamma = 1 + \frac{M}{(1-p)(M-1)}$  的无标度网络。在新节点选择合作者的方式中只要  $p<1$ , 就包含了择优的成分, 这时网络就是无标度的, 这进一步验证了择优是产生无标度的必要条件。

参考文献:

- [1] Hajra K B, Sen P. Aging in Citation Networks[J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2005, 346(1/2): 44-48.
- [2] Ramasco J J, Dorogovtsev S N, Pastor-Satorras R. Self-Organization of Collaboration Networks[J]. Physical Review E, 2004, 70(3): 036106.
- [3] Parker S L, Parker G R, McCann J A. Opinion Taking within Friendship Networks[J]. American Journal of Political Science, 2008, 52(2): 412-420.
- [4] Watts D J, Strogatz S H. Collective Dynamics of Small-World Networks[J]. Nature, 1998, 393: 440-442.
- [5] Myers Christopher R. Software Systems as Complex Networks: Structure, Function, and Evolvability of Software Collaboration Graphs[J]. Physical Review E, 2001, 68: 046116.
- [6] Wagner A, Fell D. The Small World inside Large Metabolic Networks[J]. Proc. Roy. Soc. London Ser. B, 2001, 268: 1803-1810.
- [7] Fell D A, Wagner A. The Small World of Metabolism[J]. Nature Biotechnology, 2000, 18: 1121-1122.
- [8] Jeong H, Tombor B, Albert R, et al. The Large-Scale Organization of Metabolic Networks[J]. Nature, 2000, 407: 651-654.
- [9] Ravase E, Somera A L, Mongru D A, et al. Hierarchical Organization of Modularity in Metabolic Network[J]. Science, 2002, 297(5586): 1551-1555.
- [10] Onnela J P, Saramaki J, Hyvonen J, et al. Structure and Tie Strengths in Mobile Communication Networks[J]. Proceeding of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2007, 104(18): 7332-7336.
- [11] 张培培, 何 阅, 周 涛, 等. 一个描述合作网络顶点度分布的模型[J]. 物理学报, 2006, 55(1): 60-67.  
Zhang Peipei, He Yue, Zhou Tao, et al. A Model Describing the Degree Distribution of Collaboration Networks[J]. Acta Physic Sinica, 2006, 55(1): 60-67.
- [12] 黄相森, 张淑华. 基于合作网络的分类讨论[J]. 科技与生产, 2011, 11(8), 141-144.  
Huang Xiangsen, Zhang Shuhua. Based on the Discussion of Cooperative Networks on Categories[J]. Science Technology and Industry, 2011, 11(8): 141-144.
- [13] 赵清贵, 孔祥星, 侯振挺. 简易广义合作网络度分布的稳定性[J]. 物理学报, 2009, 58(10): 6682-6685.  
Zhao Qinggui, Kong Xiangxing, Hou Zhenting. The Degree Distribution of Simple Generalized Collaboration Networks [J]. Acta Physica Sinica, 2009, 58(10): 6682-6685.

(责任编辑: 申 剑)