第26卷 第4期
2012年7月

湖 南 工 业 大 学 学 报
Journal of Hunan University of Technology

Vol.26 No.4
July 2012

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2012.04.003

冲击次数为Geometric过程的系统损伤模型及其可靠性指标

刘罗华

（湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007）

摘　要：针对免赔保险中的理赔背景，将整个理赔过程看作一个系统损伤模型来刻画，建立了一类系统损伤的数学模型。该模型通过引入Geometric过程来刻画系统损伤次数，以指数分布来刻画系统冲击损伤值。并且针对这一分布下的系统损伤模型，研究了其寿命函数、可靠度、平均损伤、剩余寿命、平均剩余寿命、失效率等可靠性指标。

关键词：Geometric过程；系统损伤；可靠性指标

中图分类号：O211.6　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2012)04-0008-03

A Damage Model and Reliability Index with Geometric Process

Liu Luohua

（School of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China）

Abstract： Based on the deductible insurance claims background, regards the claims process as a system damage model and establishes a class of mathematical models for it. Introduces the Geometric process to describe the injury times and describes the impact damage value by means of exponential distribution. According to the distributive system damage model, researches the reliability index of life function, reliability, average damage, residual life, mean residual life and failure rate.

Keywords：Geometric process; system damage; reliability index

0 引言

冲击模型是可靠性数学理论中的重要研究内容之一，它以物理、通讯、金融等现象为背景，研究随机变化环境下系统的失败、维修等寿命现象。对于系统冲击次数为复合随机过程的系统损伤模型，已有较多报导[1-3]，如张雅清等人运用复合泊松过程建立了一类系统损伤模型，并给出了该系统在时刻t正常工作的概率和平均寿命等几个可靠性指标的计算公式[1]；邢瑞等人通过引入双参数的复合Poisson-Geometric过程来刻画损伤次数，建立了一类系统损伤模型，并针对此分布下的损伤模型，研究了其平均损伤、可靠度和平均寿命等可靠性指标，作为特例，给出了当损伤值满足指数分布时各个指标的表达式[2]；王丙参[3]等人就冲击次数为复合Poisson-Geometric过程建立了系统损伤模型，并得到了系统

收稿日期：2012-06-20
基金项目：湖南省教育厅科研基金资助项目（10C0607），湖南省教育厅教育教学改革基金资助项目（[湘教通2011-315]-263）
作者简介：刘罗华（1969-），男，湖南茶陵人，湖南工业大学副教授，硕士，主要研究方向为金融风险随机问题，
E-mail：zzgxyllh@163.com

损伤模型的相关可靠性指标。

已有研究成果多结合 Poisson 过程来刻画冲击次数，但由于系统在实际操作中受到的冲击并不一定每次都能给系统造成损伤。因此，本文拟基于这一现象，建立以几何过程的计数过程来刻画冲击次数、冲击损伤值服从指数分布的系统损伤模型，即引入了 Geometric 过程来刻画损伤次数，并以指数分布来刻画冲击损伤值的系统损伤模型，并获取该损伤模型的相关可靠性指标。

1　系统损伤模型的建立

在保险理赔中，保险公司为了防范被保险人的道德风险和进行保险成本的优化管理，通常在保险合同中对赔付额度与实际损失额度的关系作了一些技术规定。其中免赔保险[4]就是这种技术规定中的一种保险产品。

所谓免赔保险，就是在合同中规定一个免赔额度 b（$b>0$），

1）当保险标的实际损失低于或等于 b 时，保险公司不给予赔付；

2）当保险标的实际损失大于 b 时，保险公司按实际损失给予赔付。

基于这种理赔背景，可以将整个理赔过程看作一个系统损伤模型来刻画，为了建立系统的损伤模型，做如下假设：

设在$[0, t]$时间内，可将理赔次数 $N(t)$看作系统损伤模型受到冲击的次数，将个体理赔量 x_i（i=1, 2, ⋯）看作系统损伤模型的每次冲击损伤值；

由于系统在实际应用中受到的冲击并不一定每次均能给系统造成损伤，故假设 $N(t)$服从参数 p 的正值几何分布，x_i（i=1, 2, ⋯）相互独立，且服从均值为λ的指数分布。

因损害会累加，于是系统的累计模型可表述为

$$Y(t)=\sum_{i=0}^{N(t)} x_i\,,\tag{1}$$

式（1）所示为系统的累计损伤模型，它显然是一个复合 Geometric 过程。

2　损伤模型的可靠性指标

定义 1[5]　若用非负随机变量 Y 来描述系统的寿命，则 Y 相应的分布函数为

$$F(t)=p\{Y\leqslant t\}, t\geqslant 0\,。$$

定义 $F(t)$为系统的寿命分布，$\bar{F}(t)$为系统的可靠度，$EY=\int_0^\infty t\mathrm{d}F(t)$ 为系统的平均寿命。

定义 2　假定系统工作到时刻 t 还在工作的条件下，用 $F_t(y)$表示系统的剩余寿命分布，且

$$F_t(y)=p\{Y-t\leqslant y|Y>t\},$$

则系统的平均剩余寿命为

$$m(t)=E\{Y-t\leqslant y|Y>t\}=\int_0^\infty y\mathrm{d}F_t(y)\,。$$

定义 3　若系统工作到时刻 t 还正常工作，则它在（t, $t+\Delta t$）中失效的概率为

$$r(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p\left\{Y\leqslant t+\Delta t|Y>t\right\}}{\Delta t},$$

其中，$r(t)$为失效率函数，简称失效率。若失效率函数 $r(t)$是 t 的增函数，则称 $F(t)$属于递增失效率类，记作 $F\in\{IFR\}$；若失效率函数 $r(t)$是 t 的减函数，则称 $F(t)$属于递减失效率类，记作 $F\in\{DFR\}$。

以下讨论的对象仍然是系统损伤模型（1），设系统损伤的数学模型为$Y(t)=\sum_{i=0}^{N(t)}x_i$，其中 $N(t)$服从参数 p 的几何分布，x_i（i=1, 2, ⋯）相互独立并服从均值为λ的指数分布，且与 $N(t)$独立，则该系统具有以下特征的可靠性指标。

定理 1　如果系统的寿命分布函数为 $F(t)$，则 $F(t)$服从参数为 $p\lambda$ 的指数分布，即$F(t)\sim E_t(p\lambda)$密度函数$f(t)=p\lambda\mathrm{e}^{-p\lambda t}$，$t\geqslant 0, p\lambda>0$。

证明　因为

$$M_{N(t)}=\frac{p\mathrm{e}^t}{1-q\mathrm{e}^t},\quad p+q=1;$$

$$M_{x(t)}=\frac{\lambda}{\lambda-t},\quad t<\lambda;$$

$$M_{Y(t)}=M_N\left[\ln M_{x(t)}\right]=M_N\left[\ln\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)\right]=$$

$$\frac{p\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)}}{1-q\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)}}=\frac{p\lambda}{\lambda-t-q\lambda}=\frac{p\lambda}{p\lambda-t},$$

即$F(t)\sim E_t(p\lambda)$，则密度函数

$$f(t)=p\lambda\mathrm{e}^{-p\lambda t}, t\geqslant 0, p\lambda>0。$$

定理证毕。

定理 2　系统在 t 时的可靠度为

$$\bar{F}(t)=1-F(t)=\mathrm{e}^{-p\lambda t},$$

平均损伤、方差为：

$$E[Y(t)]=\frac{1}{p\lambda}, \mathrm{Var}[Y(t)]=\frac{1}{(p\lambda)^2}\,。$$

证明

$$\bar{F}(t)=1-F(t)=1-\left(1-\mathrm{e}^{-p\lambda t}\right)=\mathrm{e}^{-p\lambda t},$$

$$E[Y(t)]=\int_0^\infty t\mathrm{d}F(t)=\int_0^\infty\bar{F}(t)\mathrm{d}t=\int_0^\infty\mathrm{e}^{-p\lambda t}\mathrm{d}t=\frac{1}{p\lambda},$$

$$\mathrm{Var}[Y(t)]=\left[\ln M_{Y(t)}\right]''\Big|_{t=0}=\left[\ln\frac{p\lambda}{p\lambda-t}\right]''\Big|_{t=0}=\frac{1}{(p\lambda)^2}。$$

定理证毕。

定理3 系统在t时的剩余寿命分布为

$$F_t(y)=1-\mathrm{e}^{-p\lambda y},$$

平均剩余寿命为$m(t)=\dfrac{1}{p\lambda}$。

证明 因为

$$F_t(y)=p\{Y-t\leqslant y|Y>t\}=\frac{F(y+t)-F(t)}{1-F(t)}=$$

$$\frac{F(y+t)-F(t)}{\bar{F}(t)}=\frac{1-\mathrm{e}^{-p\lambda(y+t)}-\left(1-\mathrm{e}^{-p\lambda t}\right)}{\mathrm{e}^{-p\lambda t}}=$$

$$1-\mathrm{e}^{-p\lambda y},\ t<p\lambda。$$

$$m(t)=E\{Y-t\leqslant y|Y>t\}=\int_0^\infty y\mathrm{d}F_t(y)=$$

$$\int_0^\infty y\mathrm{d}\,F_t(y)=\int_0^\infty \bar{F}_t(y)\mathrm{d}y=$$

$$\int_0^\infty\frac{\bar{F}_t(y+t)}{\bar{F}_t(y)}\mathrm{d}y=\int_t^\infty\frac{\bar{F}(u)}{\bar{F}_t(y)}\mathrm{d}u\,(令\,u=y+t)=$$

$$\frac{1}{\bar{F}_t(t)}\left\{\int_0^\infty\bar{F}(u)\mathrm{d}u-\int_0^t\bar{F}(u)\mathrm{d}u\right\}=$$

$$\frac{1}{\mathrm{e}^{-p\lambda t}}\left\{E[Y(t)]-\int_0^t\mathrm{e}^{-p\lambda u}\mathrm{d}y\right\}=\frac{1}{p\lambda}。$$

定理证毕。

定理3 系统在t时的失效率为

$$r(t)=p\lambda,F(t)\notin\{IFR\},F(t)\notin\{DFR\}。$$

证明 因为

$$r(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p\{Y\leqslant t+\Delta t|Y>t\}}{\Delta t}=$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t(1-F(t))}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t\bar{F}(t)}=$$

$$\frac{1}{\bar{F}(t)}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}=\frac{f(t)}{\bar{F}(t)}=\frac{p\lambda\mathrm{e}^{-p\lambda t}}{\mathrm{e}^{-p\lambda t}}=p\lambda。$$

由于$r(t)=p\lambda$为常量，所以

$$F(t)\notin\{IFR\},F(t)\notin\{DFR\}。$$

定理证毕。

3 结语

本文在基于保险的理赔背景下，建立了一类复合Geometric系统损伤模型，并研究了该系统损伤模型的寿命函数、可靠度、平均损伤、剩余寿命、平均剩余寿命、失效率等可靠性指标，从可靠性理论角度为该类险种的经营提供了一定的理论参考依据。同时，从复合模型系统损伤模型的剩余寿命、平均剩余寿命的结果上来看，本模型的建立也不失为从可靠性理论上对指数分布的“无记忆性”性质的一种验证。

参考文献：

[1] 张雅清，王艳玲，李小红. 复合泊松过程在系统可靠性中的应用[J]. 河南师范大学学报：自然科学版，2007，35(1)：38-40.
Zhang Yaqing, Wang Yanling, Li Xiaohong. Application of Compound Poisson Process in System Reliability[J]. Journal of Henan Normal University：Natural Science，2007，35(1)：38-40.

[2] 邢 瑞，贾旭杰，郑更新，等. 冲击次数为复合Poisson-Geometric过程的系统损伤模型及其可靠性指标[J]. 数学的实践与认识，2009，39(22)：105-109.
Xing Rui，Jia Xujie，Zheng Gengxin，et al. A Damage Modle and Reliability Index with Compound Poisson-Geometric Process[J]. Mathematic in Practice and Theory，2009，39(22)：105-109.

[3] 王丙参，魏艳华，戴 宁. 损伤可加冲击模型的可靠性指标[J]. 北京联合大学学报：自然科学版，2012，26(1)：66-69.
Wang Bingcan，Wei Yanhua，Dai Ning. Reliability Index of Shock Model with Increasing Damage[J]. Journal of Beijing Union University：Natural Sciences，2012，26(1)：66-69.

[4] 熊福生. 风险理论[M]. 武汉：武汉大学出版社，2006：53-102.
Xiong Fusheng. The Theory of Risk[M]. Wuhan：Wuhan University Press, 2006：53-102.

[5] 曹晋华，程 侃. 可靠性数学引论[M]. 北京：高等教育出版社，2006：7-37.
Cao Jinhua，Cheng Kan. Introduction to Reliability Mathematics[M]. Beijing：Higher Education Press，2006：7-37.

（责任编辑：廖友媛）