doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2012.04.002

一类具功能反应函数生物系统的定性分析

韦 君，胡 林，王月萍，赵育林

（湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007）

摘 要：研究了一类具功能反应函数的食饵－捕食两种群生物系统的定性性质。利用Dulac判别定理，Poincare-Bendixson环域定理等，得到了该系统解的有界性，正平衡点的稳定性和至少存在一个极限环的充分条件。所得结果推广了已有文献的结论。

关键词：极限环；定性分析；食饵－捕食系统

中图分类号：O175 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9833(2012)04-0004-04

Qualitative Analysis on a Class of Biological Systems with Functional Response

Wei Jun，Hu Lin，Wang Yueping，Zhao Yulin

（School of Science，Hunan University of Techology，Zhuzhou Hunan 412007，China）

Abstract: The qualitative behavior of two-dimensional predator-prey biological systems with functional response is studied. The sufficient conditions for the bounded solution of the system, the stability of the positive equilibrium and the existence of at least one limit cycle are obtained by means of Dulac and Poincare-Bendixson theorem. The results extend the known literature findings.

Keywords: limit cycle; qualitative analysis; prey-predator system

0 引言

具有功能性反应函数的相互干扰的两种群捕食模型的一般形式[1-5]为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(t)g(x(t))-y^m(t)\varphi(x(t)),\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y(t)[-q(x(t))+c\varphi(x(t))y^{m-1}(t)]。\end{cases}$$

式中：$x(t)$是食饵种群在t时刻的密度；

$y(t)$是捕食者种群在t时刻的密度；

$g(x)$是食饵种群的增长率；

$\varphi(x)$是捕食者种群的功能性反应函数；

$m(0<m\leqslant 1)$为干扰率；

$q(x)$是捕食者种群的死亡率；

$c(c>0)$是生物种群的变换系数。

当$m=\dfrac{1}{2}, \varphi(x)=\dfrac{x}{A+x}$时，文献[1-3]讨论了如下模型：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=rx\left(1-\dfrac{x}{k}\right)-\dfrac{\alpha x\sqrt{y}}{A+x},\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-dy+\dfrac{\beta x\sqrt{y}}{A+x}。\end{cases}$$

式中r,k,α,d,A,β均为正常数。

当$m=1, \varphi(x)=\dfrac{x}{a+x^2}$时，文献[5]研究了如下一类

收稿日期：2012-06-01

作者简介：韦 君（1987-），男，四川泸县人，湖南工业大学学生，主要研究方向为数学建模与数值计算，E-mail：weij1987@163.com

通信作者：胡 林（1988-），男，湖南岳阳人，湖南工业大学学生，主要研究方向为数学建模与物流工程，E-mail：hulin198806@163.com

食饵种群具有密度制约情况下的简化 Holling IV 类功能性反应模型：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=rx\left(1-\dfrac{x}{k}\right)-\dfrac{xy}{a+x^2},\\ \dfrac{dy}{dt}=y\left(\dfrac{\mu x}{a+x^2}-d\right)。\end{cases}$$

式中 a,d 均为正常数。

受以上文献的启发，讨论如下一类具有密度制约情况下的功能反应模型：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=rx\left(1-\dfrac{x}{k}\right)-\dfrac{xy^{\frac{1}{n}}}{A+x^2},\\ \dfrac{dy}{dt}=-dy+\dfrac{\beta xy^{\frac{1}{n}}}{A+x^2}=y^{\frac{1}{n}}\left(-dy^{\frac{n-1}{n}}+\dfrac{\beta x}{A+x^2}\right)。\end{cases}\quad(1)$$

式中：$n>2$；r,k,d,A,β 均为正常数。

本文讨论在一定的条件下系统（1）的正平衡点的稳定性，解的有界性和极限环的存在性。

1　系统平衡点性态

根据系统的生物学意义，只在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$ 内讨论系统（1）。对系统（1）作尺度变换，令

$$x\to\sqrt{A}x,y\to(Ad)^n y,t\to\frac{1}{d}t,$$

$$r\to dr,k\to\sqrt{A}k,\beta\to\frac{(dA)^n}{\sqrt{A}}\beta,$$

则有

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=rx\left(1-\dfrac{x}{k}\right)-\dfrac{xy^{\frac{1}{n}}}{1+x^2},\\ \dfrac{dy}{dt}=-y+\dfrac{\beta xy^{\frac{1}{n}}}{1+x^2}。\end{cases}\quad(2)$$

再令 $dt\to(1+x^2)dt$，得如下简化模型：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=rx\left(1-\dfrac{x}{k}\right)(1+x^2)-xy^{\frac{1}{n}}=xF_1(x,y)=P(x,y),\\ \dfrac{dy}{dt}=-y^{\frac{1}{n}}\left[(1+x^2)y^{\frac{n-1}{n}}-\beta x\right]=y^{\frac{1}{n}}F_2(x,y)=Q(x,y)。\end{cases}\quad(3)$$

式中：$F_1(x,y)=r\left(1-\dfrac{x}{k}\right)(1+x^2)-y^{\frac{1}{n}}$；

$$F_2(x,y)=-(1+x^2)y^{\frac{n-1}{n}}+\beta x。$$

因为系统（3）和系统（1）是等价的，因此，只需研究系统（3）的有关定性性质。

显然，$E_1(0,0)$ 和 $E_2(k,0)$ 是系统（3）的2个平衡点。若系统存在正平衡点 $R(x,y)$，则其坐标应满足方程

$$\begin{cases}r\left(1-\dfrac{x}{k}\right)(1+x^2)-y^{\frac{1}{n}}=0,\\ (1+x^2)y^{\frac{n-1}{n}}-\beta x=0。\end{cases}\quad(4)$$

因有 $k>0$，$x<k$，对捕食者种群等倾线

$$y^{\frac{n-1}{n}}=\frac{\beta x}{1+x^2},$$

有

$$\left(y^{\frac{n-1}{n}}\right)'=\frac{\beta(1-x^2)}{(1+x^2)^2},\ y(0)=0。$$

故曲线 $y^{\frac{n-1}{n}}=\dfrac{\beta x}{1+x^2}$ 经过原点 $O(0,0)$ 且在区间 $(0,1)$ 内单调上升，在区间 $(1,+\infty)$ 内单调下降。

对食饵种群等倾线

$$y^{\frac{1}{n}}=r\left(1-\frac{x}{k}\right)(1+x^2),$$

有

$$y(k)=0,\ y(0)=r^n>0。$$

所以，系统（3）在区域 D 内存在一个正平衡点 $E_0(x_0,y_0)$。

定理1　系统（3）的平衡点具有如下性质：

1）$E_1(0,0)$ 是系统（3）的鞍点，$E_2(k,0)$ 是系统（3）的不稳定的结点。

2）当 $k^*\leqslant 0$，$\beta^*>0$ 时，正平衡点 $E_0(x_0,y_0)$ 是系统（3）稳定的焦结点，其中

$$k^*=2kx_0-3x_0^2-1,\ \beta^*=\beta y_0^{\frac{1}{n}}-2x_0y_0。$$

3）当 $\delta>0$，$k^*>0$ 且 $\beta^*\geqslant 0$ 时，$E_0(x_0,y_0)$ 是系统（3）不稳定的焦结点，其中

$$\delta=nrk^*x_0+k(1-n)(1+x_0^2)。$$

证明　系统（3）的 Jacobi 矩阵是

$$\boldsymbol{J}_{E_i}=\begin{bmatrix}r\left(1+3x^2-\dfrac{2x}{k}-\dfrac{4x^3}{k}\right)-y^{\frac{1}{n}} & -\dfrac{x}{n}y^{\frac{1-n}{n}}\\ \beta y^{\frac{1}{n}}-2xy & \dfrac{\beta xy^{\frac{1-n}{n}}}{n}-(1+x^2)\end{bmatrix}。$$

1）$E_0(x_0,y_0)$ 是系统（3）的鞍点显然成立。将 $E_2(k,0)$ 代入有

$$\det\boldsymbol{J}_{E_2}\to+\infty>0,\ \mathrm{tr}\boldsymbol{J}_{E_2}\to+\infty>0,$$

故 $E_2(k,0)$ 是系统（3）的不稳定的结点。

2）系统（3）在$E_0(x_0,y_0)$点的Jacobi矩阵是

$$\boldsymbol{J}_{E_0}=\begin{bmatrix} r\left(1+3x_0^2-\dfrac{2x_0}{k}-\dfrac{4x_0^3}{k}\right)-y_0^{\frac{1}{n}} & -\dfrac{x_0}{n}y_0^{\frac{1-n}{n}} \\ \beta y_0^{\frac{1}{n}}-2x_0y_0 & \dfrac{\beta x_0 y_0^{\frac{1-n}{n}}}{n}-\left(1+x_0^2\right) \end{bmatrix}。$$

因为$F_1(x_0,y_0)=0=F_2(x_0,y_0)$，则有

$$\boldsymbol{J}_{E_0}=\begin{bmatrix} rx_0\left(-\dfrac{1}{k}+2x_0-\dfrac{3x_0^2}{k}\right) & -\dfrac{x_0}{n}y_0^{\frac{1-n}{n}} \\ \beta y_0^{\frac{1}{n}}-2x_0y_0 & -\dfrac{n-1}{n}\left(1+x_0^2\right) \end{bmatrix}。$$

从而

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{J}_{E_0}=rx_0\left(-\frac{1}{k}+2x_0-\frac{3x_0^2}{k}\right)-\frac{n-1}{n}\left(1+x_0^2\right)<0,$$

$$\det\boldsymbol{J}_{E_0}=rx_0\left(-\frac{1}{k}+2x_0-\frac{3x_0^2}{k}\right)\left[-\frac{n-1}{n}\left(1+x_0^2\right)\right]+\frac{x_0}{n}y_0^{\frac{1-n}{n}}\left(\beta y_0^{\frac{1}{n}}-2x_0y_0\right)>0。$$

所以$E_0(x_0, y_0)$是稳定的焦结点。

3）因 为

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{J}_{E_0}=rx_0\left(-\frac{1}{k}+2x_0-\frac{3x_0^2}{k}\right)-\frac{n-1}{n}\left(1+x_0^2\right)=\frac{\delta}{nk}>0,$$

$$\det\boldsymbol{J}_{E_0}=rx_0\left(-\frac{1}{k}+2x_0-\frac{3x_0^2}{k}\right)\left[-\frac{n-1}{n}\left(1+x_0^2\right)\right]+\frac{x_0}{n}y_0^{\frac{1-n}{n}}\left(\beta y_0^{\frac{1}{n}}-2x_0y_0\right)=\frac{\delta}{nk}+\frac{x_0}{n}y_0^{\frac{1-n}{n}}\beta^*>0,$$

所以$E_0(x_0, y_0)$是不稳定的焦结点。

2 系统解的有界性和极限环的存在性

定理2 对于系统（3），当$x<\frac{1}{k}$时，它的一切正初始条件的解有界。

证明 设$x=x(t)$，$y=y(t)$是从集合D中任一点$(\bar{x},\bar{y})$出发的解。过点$A(k,0)$作直线$x=k$交$F_2(x,y)=0$于点$B(k,h)$，其中$h=\left(\frac{\beta k}{1+k^2}\right)^{\frac{n}{n-1}}$；过点$B(k,h)$作直线$y=h$交$y$轴于点$C(0,h)$。

显然，在闭折线$OABCO$内只有一个正平衡点，OA，OC是系统（3）的轨线段。

在线段AB上，当$x<\frac{1}{k}$时，

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{x=k}=-ky^{\frac{1}{n}}<0,$$

故AB为无切的直线段。

在线段BC上，当$x<\frac{1}{k}$时，

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{y=h}=\frac{\beta^{\frac{n}{n-1}}k^{\frac{1}{n-1}}(k-x)(kx-1)}{\left(1+k^2\right)^{\frac{n}{n-1}}}<0,$$

故BC也为无切直线段。

从而在闭折线$OABCO$上，系统（3）的轨线当t增加时均不跑出其所围成的区域，即当$x<\frac{1}{k}$的一切正初始条件的解有界。

当$x<\frac{1}{k}$时，$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{y=h}>0$，系统（3）的解的有界性依$k$而定。

定理3 当$0<r\leqslant\frac{n-1}{2n}$时，系统（3）在集合$D$内不存在极限环。

证明 取Dulac函数$B(x,y)=x^{-1}y^{-\frac{1}{n}}$，则有

$$\frac{\partial(PB)}{\partial x}+\frac{\partial(QB)}{\partial y}=$$

$$B(x,y)\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)+P(x,y)\frac{\partial B}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial B}{\partial y}=$$

$$B(x,y)\left[F_1(x,y)+\frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}F_2(x,y)+xF_1(x,y)+y^{\frac{1}{n}}F_2(x,y)+x\frac{\partial F_1}{\partial x}+y^{\frac{1}{n}}\frac{\partial F_2}{\partial x}\right]+$$

$$xF_1(x,y)\left(-x^{-2}y^{-\frac{1}{n}}\right)+y^{\frac{1}{n}}F_2(x,y)\left(-\frac{1}{n}x^{-1}y^{-\frac{1}{n}-1}\right)=$$

$$B(x,y)\left[x\frac{\partial F_1}{\partial x}+y^{\frac{1}{n}}\frac{\partial F_2}{\partial y}\right]=$$

$$B(x,y)\left[-\frac{n-1}{n}-\frac{rx}{k}+\left(2r-\frac{n-1}{n}\right)x^2-\frac{3rx^3}{k}\right]<0。$$

由Dulac定理[6]知，当$0<r\leqslant\frac{n-1}{2n}$时，系统（3）在$D$内不存在极限。

因$2kx-1-3x^2\leqslant 0$恒成立的条件是$0<k\leqslant\sqrt{3}$，根据Poincare-Bendixson环域定理[6]可得定理4。

定理4 当$0<k\leqslant\sqrt{3}$，$0<r\leqslant\frac{n-1}{2n}$且$\beta^*>0$时，

$E_0(x_0,y_0)$是系统（3）全局渐近稳定的结点。

定理4的生物意义是，当参数$0<k\leqslant\sqrt{3}$，$0<r\leqslant\frac{n-1}{2n}$时，食饵与捕食者种群长期稳定共存，种群数量最终分别趋于各自的平衡点，均不会灭绝。

定理5　当$\delta>0$，$k^*>0$且$\beta^*\geqslant 0$时，系统（3）在正平衡点的外围至少存在一稳定的极限环。

证明　对正平衡点$E_0(x_0,y_0)$，首先作直线L_1：$x-k=0$和直线L_2：$y+\beta x-M=0$，则

$$\left.\frac{\mathrm{d}L_1}{\mathrm{d}t}\right|_{L_1}=-ky^{\frac{1}{n}}<0\ (y>0),$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}L_2}{\mathrm{d}t}\right|_{L_2}=\beta\left[rx\left(1-\frac{x}{k}\right)\left(1+x^2\right)-xy^{\frac{1}{n}}\right]-y^{\frac{1}{n}}\left[\left(1+x^2\right)y^{\frac{n-1}{n}}-\beta x\right]=r\beta x\left(1-\frac{x}{k}\right)\left(1+x^2\right)-\left(1+x^2\right)\left(M-\beta x\right)。$$

由于$0<x<y$，所以只要取M充分大，就有$\left.\frac{\mathrm{d}L_2}{\mathrm{d}t}\right|_{L_2}<0$。又因为直线$x=0$和直线$y=0$是系统（3）的轨线，从而直线$x=0$，$y=0$和直线$L_1$，$L_2$构成环域的外境界线。而当$\delta>0$，$k^*>0$且$\beta^*\geqslant 0$时，正平衡点$E_0(x_0,y_0)$是不稳定的平衡点。根据Bendixson环域定理[6]，定理5得证。

参考文献：

[1] 田晓红，徐　瑞. 一类具Holling-Ⅲ类功能性反应的食物有限捕食-被捕食模型的极限环[J]. 军械工程学院学报，2008，20(3)：73-75.
Tian Xiaohong，Xu Rui. Limit Cycles for a Food-Limited Predatory-Prey Model with Holling Type-Ⅲ Functional Response[J]. Journal of Ordnance Engineering College，2008，20(3)：73-75.

[2] 何德明，窦霁红，彭书新. 具收获率的一类食饵捕食系统定性分析[J]. 西北大学学报：自然科学版，2009，39(1)：19-22.
He Deming，Dou Jihong，Peng Shuxin. A Qualitative Analysis of a Kind of Food-Predator System with Harvesting Rates[J]. Journal of Northwest University：Natural Science Edition，2009，39(1)：19-22.

[3] 路亚朋，张　睿，户红艳. 一类被开发的食饵捕食系统[J]. 重庆工学院学报：自然科学版，2009，23(1)：157-60.
Lu Yapeng，Zhang Rui，Hu Honayan. Analysis on a Kind of Exploited Predator-Prey System[J]. Journal of Chongqing Institute of Technology：Natural Science，2009，23(1)：157-160.

[4] 赵育林，陈海波. 具功能性反应函数的捕－食系统极限环的存在唯一性[J]. 生物数学学报，2006，21(4)：515-520.
Zhao Yulin，Chen Haibo. Existence and Uniqueness of Limit Cycles of a Predator-Prey System with Functional Response[J]. Journal of Biomathematics，2006，21(4)：515-520.

[5] 王继华，曾宪武. 一类具有简化Holling Ⅳ类功能反应的捕食－食饵模型的定性分析[J]. 数学杂志，2004，24 (6)：701-705.
Wang Jihua，Zeng Xianwu. The Qualiative Analysis of a Predator-Prey System with Holling Type-Ⅳ Functional Response[J]. Journal of Mathematics，2004，24 (6)：701-705.

[6] 张芷芬，丁同仁，黄文灶. 微分方程定性理论[M]. 北京：科学出版社，1985：147-148.
Zhang Zhifen，Ding Tongren，Hunag Wenzao. Qualiative Theory of Differential Equations[M]. Beijing：Science Publishers，1985：147-148.

（责任编辑：邓光辉）