第26卷 第4期 湖 南 工 业 大 学 学 报 Vol.26 No.4
2012年7月 Journal of Hunan University of Technology July 2012

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2012.04.001

一维有限区间波动方程定解问题的一种求解方法

朱善华，贺 希，傅学正，柳闻鹃

（湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007）

摘 要：基于用分离变量法求解一维有限区间波动方程定解问题中常见的3类非齐次边界条件，将非齐次边界条件齐次化时，常常会导致方程是非齐次化的。依据方程和边界的非齐次条件，通过判定条件，引入适当的辅助函数，获得了一种将非齐次边界条件和非齐次方程同时齐次化的求解方法。

关键词：非齐次边界条件；非齐次方程；齐次化

中图分类号：O175 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9833(2012)04-0001-03

A Solution for Wave Equation in One-Dimensional Finite Interval

Zhu Shanhua，He Xi，Fu Xuezheng，Liu Wenjuan

（School of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China）

Abstract：There are three common non-homogeneous boundary conditions for the solution of wave equation in one-dimensional finite interval by using the separation of variables. The homogeneity of non-homogeneous boundary conditions often leads to equation non-homogeneous. According to non-homogeneous conditions of the equation and the boundary, introduces appropriate auxiliary functions by judging conditions, and obtained the homogeneous solution method for non-homogeneous boundary conditions and non-homogeneous equation.

Keywords：non-homogeneous boundary condition；non-homogeneous equation；homogeneity

1 问题的提出

用分离变量法求解一维有限区间具有非齐次边界条件的波动方程定解问题时，需将未知函数的边界条件齐次化[1-2]。其方法是引入新的未知函数和辅助函数，选择辅助函数满足原未知函数所具有的非齐次边界条件，则新的未知函数的边界条件便可实现齐次化。但若方程是齐次化的，将非齐次边界条件齐次化时，常常会导致方程是非齐次化的。

对于一维有限区间具有非齐次边界条件的波动方程定解问题：

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t),\ 0\prec x\prec l,\ t\succ 0\ ; \tag{1}$$

$$\left(b_1u+c_1\,u\big|_x\right)\Big|_{x=0}=g(t),\ \ t\geqslant 0\ ; \tag{2}$$

$$\left(b_2u+c_2\,u\big|_x\right)\Big|_{x=l}=h(t),\ \ t\geqslant 0\ ; \tag{3}$$

$$u\big|_{t=0}=n_1(x),\ \ 0\leqslant x\leqslant l\ ; \tag{4}$$

$$u_t\big|_{t=0}=n_2(x),\ \ 0\leqslant x\leqslant l\ 。 \tag{5}$$

式（1）~（5）中：$a^2, b_1, b_2, c_1, c_2, l$ 均为常数；$f(x,t)$，$g(t)$，$h(t)$，$n_1(x)$，$n_2(x)$为已知函数。

定解问题（1）~（5）式包含了常见的3类非齐次边界条件且方程是非齐次的，求解方程（1）~（5）

收稿日期：2012-06-13

基金项目：湖南工业大学教学改革基金资助项目（2008TD4）

作者简介：朱善华（1959-），男，湖南茶陵人，湖南工业大学教授，主要研究方向为非线性物理，非线性光学，E-mail：zsh200850@163.com

的方法通常有2种。

方法1

首先将解定解问题（2）~（3）的非齐次边界条件齐次化。令

$$u(x,t)=w(x,t)+v(x,t), \tag{6}$$

式中：$w(x,t)$是新的未知函数；

$v(x,t)$是辅助函数。

将式（6）代入定解问题（1）~（5）式可得定解问题：

$$w_{tt}-a^2w_{xx}=f_1(x,t),\ 0\prec x\prec l,\ t\succ 0; \tag{7}$$

$$\left(b_1w+c_1w|_x\right)\Big|_{x=0}=0,\ t\geqslant 0; \tag{8}$$

$$\left(b_2w+c_2w|_x\right)\Big|_{x=l}=0,\ t\geqslant 0; \tag{9}$$

$$w|_{t=0}=N_1(x),\ 0\leqslant x\leqslant l; \tag{10}$$

$$w_t|_{t=0}=N_2(x),\ 0\leqslant x\leqslant l。 \tag{11}$$

式中：$f_1(x,t)=f(x,t)-v_{tt}+a^2v_{xx}$；

$N_1(x)=n_1(x)-v|_{t=0}$；$N_2(x)=n_2(x)-v_t|_{t=0}$；

$\left(b_1v+c_1v|_x\right)\Big|_{x=0}=g(t)$；$\left(b_2v+c_2v|_x\right)\Big|_{x=l}=h(t)$。

再利用解的叠加原理和冲量定理等方法求解定解问题（7）~（11）。

方法2

首先利用解的叠加原理，令

$$u(x,t)=w(x,t)+v(x,t), \tag{12}$$

式中，$w(x,t)$，$v(x,t)$是未知函数。将式（12）代入定解问题（1）~（5）式可得定解问题：

$$v_{tt}-v^2u_{xx}=f(x,t),\ 0\prec x\prec l,\ t\succ 0; \tag{13}$$

$$\left(b_1v+c_1v|_x\right)\Big|_{x=0}=0,\ t\geqslant 0; \tag{14}$$

$$\left(b_2v+c_2v|_x\right)\Big|_{x=l}=0,\ t\geqslant 0; \tag{15}$$

$$v|_{t=0}=0,\ 0\leqslant x\leqslant l; \tag{16}$$

$$v_t|_{t=0}=0,\ 0\leqslant x\leqslant l。 \tag{17}$$

和

$$w_{tt}-a^2w_{xx}=0,\ 0\prec x\prec l,\ t\succ 0; \tag{18}$$

$$\left(b_1w+c_1w|_x\right)\Big|_{x=0}=g(t),\ t\geqslant 0; \tag{19}$$

$$\left(b_2w+c_2w|_x\right)\Big|_{x=l}=h(t),\ t\geqslant 0; \tag{20}$$

$$w|_{t=0}=n_1(x),\ 0\leqslant x\leqslant l; \tag{21}$$

$$w_t|_{t=0}=n_2(x),\ 0\leqslant x\leqslant l。 \tag{22}$$

对于定解问题（13）~（17）可用冲量定理求解，对于定解问题（18）~（22）可由方法1求解。

用分离变量法求解非齐次边界条件的定解问题的关键是将非齐次边界条件齐次化，但齐次化有可能使齐次化方程变为非齐次方程。对于解定解问题（1）~（5）中给定的$f(x,t)$，$g(t)$，$h(t)$，能否找到一种辅助函数$v(x,t)$使方程（1）~（3）都能齐次化？对于某些特定的$f(x,t)$，$g(t)$，$h(t)$，选择合适的辅助函数$v(x,t)$是有可能的。

2 辅助函数

若方程（1）中$f(x,t)=F(x)q(t)$或$f(x,t)=F(x)+q(t)$，可找到一类辅助函数$v(x,t)$，使方程（1）~（3）都能齐次化。显然$f(x,t)=F(x)+q(t)$是$f(x,t)=F(x)q(t)$的线性组合。

类型1 $v(x,t)=p(x)q(t)$型辅助函数

若$f(x,t)=F(x)q(t)$，令

$$u(x,t)=w(x,t)+v(x,t), \tag{23}$$

式中：$w(x,t)$是新的未知函数；$v(x,t)=p(x)q(t)$是辅助函数；$p(x)$是未知函数。

将式（23）代入定解问题（1）~（5）得：

$$w_{tt}-a^2w_{xx}=0,\ 0\prec x\prec l,\ t\succ 0; \tag{24}$$

$$\left(b_1w+c_1w|_x\right)\Big|_{x=0}=0,\ t\geqslant 0; \tag{25}$$

$$\left(b_2w+c_2w|_x\right)\Big|_{x=l}=0,\ t\geqslant 0; \tag{26}$$

$$w|_{t=0}=n_1(x)-p(x)q(0)=N_1(x),\ 0\leqslant x\leqslant l; \tag{27}$$

$$w_t|_{t=0}=n_2(x)-p(x)q'(0)=N_2(x),\ 0\leqslant x\leqslant l。 \tag{28}$$

和

$$q''(t)p(x)-a^2q(t)p''(x)=f(x,t)=F(x)q(t), \tag{29}$$

$$b_1q(t)p(0)+c_1q(t)p'(0)=g(t), \tag{30}$$

$$b_2q(t)p(l)+c_2q(t)p'(l)=h(t)。 \tag{31}$$

对于定解问题（24）~（28），当$p(x)$已知时，可用分离变量法求解。

由方程（29）~（31）可知，若

$q''(t)=Aq(t)$，$q(t)=C_1g(t)$，$q(t)=C_2h(t)$，

式中，A, C_1, C_2为常数，则$q(t), g(t), h(t)$具有的函数类型为：

当$A\succ 0$时，为$e^{\omega t}, e^{-\omega t}, \omega=\sqrt{A}$或$\operatorname{sh}\omega t$，$\operatorname{ch}\omega t$；

当$A\prec 0$时，为$\sin\omega t$，$\cos\omega t, \omega=\sqrt{-A}$；

当A=0时，为t，常数C。

当$g(t)$=0（或$h(t)$=0）时，限制条件$q(t)=C_1g(t)$（或$q(t)=C_2g(t)$）自然取消。

$p(x)$满足的条件为：

$$p''(x)+a_1p(x)=a_2F(x), \tag{32}$$

$$a_{11}p(0)+a_{12}p'(0)=1, \tag{33}$$

$$a_{21}p(l)+a_{22}p'(l)=1。 \tag{34}$$

式（32）~（34）中：$a_1=-A/a^2, a_2=-1/a^2$；

$a_{11}=b_1C_1$，$a_{12}=c_1C_1$；

$a_{21}=b_2C_2$，$a_{22}=c_2C_2$。

方程（32）~（34）是含初值条件的二阶常系数线性非齐次常微分方程，解的性质由系数 a_1 和 $F(x)$ 决定，其求解过程见文献[3]。

类型2　$v(x,t)=\dfrac{h(t)-g(t)}{l}p(x)+g(t)$ 型辅助函数

令

$$u(x,t)=w(x,t)+v(x,t), \tag{35}$$

式中：$w(x,t)$是新的未知函数；$v(x,t)$是辅助函数。

将式（35）代入定解问题（1）~（5）得：

$$w_{tt}-a^2w_{xx}=0,\ 0\prec x\prec l,\ t\succ 0; \tag{36}$$

$$\left(b_1w+c_1\,w\big|_x\right)\Big|_{x=0}=0,\ t\geqslant 0; \tag{37}$$

$$\left(b_2w+c_2\,w\big|_x\right)\Big|_{x=l}=0,\ t\geqslant 0; \tag{38}$$

$$\begin{cases} w\big|_{t=0}=n_1(x)-\dfrac{h(0)-g(0)}{l}p(x)-g(0)=N_1(x), \\ 0\leqslant x\leqslant l; \end{cases} \tag{39}$$

$$\begin{cases} w_t\big|_{t=0}=n_2(x)-\dfrac{h'(0)-g'(0)}{l}p(x)-g'(0)=N_2(x), \\ 0\leqslant x\leqslant l。 \end{cases} \tag{40}$$

和

$$\left[\frac{h''(t)-g''(t)}{l}p(x)+g''(t)\right]- a^2\left[\frac{h(t)-g(t)}{l}p''(x)\right]=f(x,t), \tag{41}$$

$$b_1\left[\frac{h(t)-g(t)}{l}p(0)+g(t)\right]+ c_1\left[\frac{h(t)-g(t)}{l}p'(0)\right]=g(t), \tag{42}$$

$$b_2\left[\frac{h(t)-g(t)}{l}p(l)+g(t)\right]+ c_2\left[\frac{h(t)-g(t)}{l}p'(l)\right]=h(t)。 \tag{43}$$

当$p(x)$求得后，定解问题（36）~（40），可用分离变量法求得其解。

由方程（41）~（43）可知，

1）若$f(x,t)=F(x)g''(t), g''(t)=Ag(t)$，$h(x)=eg(t)$，$A$, e 为均常数，则 $g(t)$, $h(t)$具有的函数类型为：

当$A\succ 0$时，为$e^{\omega t}, e^{-\omega t}, \omega=\sqrt{A}$或 sh$\omega t$，ch$\omega t$；

当$A\prec 0$时，为 sinωt，cos$\omega t, \omega=\sqrt{-A}$；

当$A=0$ 时，为t，常数C。

当 $g(t)=0$（或$h(t)=0$）时，限制条件$h(t)=eg(t)$自然取消。

$p(x)$满足的条件为：

$$p''(x)+a_1p(x)=F_1(x), \tag{44}$$

$$b_1p(0)+c_1p'(0)=a_2, \tag{45}$$

$$b_2p(l)+c_2p'(l)=a_3。 \tag{46}$$

式（44）~（46）中：$F_1(x)=lA(1-F(x))/(e-1)a^2$；

$a_1=-A/a^2, a_2=(1-b_1)l/(e-1), a_3=(e-b_2)l/(e-1)$。

方程（44）~（46）是含初值条件的二阶常系数线性非齐次常微分方程，解的性质由系数 a_1 和 $F_1(x)$ 决定，其求解过程见文献[3]。

2）若有$\dfrac{f(x,t)}{h(t)-g(t)}=F(x)$,

$$\frac{g''(t)}{h(t)-g(t)}=e_1,\quad \frac{h''(t)}{h(t)-g(t)}=e_2,$$

$$\frac{g(t)}{h(t)-g(t)}=e_3,\quad \frac{h(t)}{h(t)-g(t)}=e_4,$$

式中：e_1, e_2, e_3, e_4 均为常数，即$g''(t)=Ag(t)$，$h(x)=eg(t)$。则$g(t)$，$h(t)$具有的函数类型为：

当$A\succ 0$时，为$e^{\omega t}, e^{-\omega t}, \omega=\sqrt{A}$或 sh$\omega t$，ch$\omega t$；

当$A\prec 0$时，为 sinωt，cos$\omega t, \omega=\sqrt{-A}$；

当$A=0$ 时，为t，常数C。

$p(x)$满足的条件为：

$$p''(x)+a_1p(x)=F_1(x), \tag{47}$$

$$b_1p(0)+c_1p'(0)=e_5, \tag{48}$$

$$b_2p(l)+c_2p'(l)=e_6。 \tag{49}$$

式中：$a_1=-(e_2-e_1)/a^2$；$F_1(x)=(e_1-F(x))l/a^2$；

$e_5=(1-b_1)le_3$；$e_6=l(e_4-b_2e_3)$。

方程（47）~（49）是含初值条件的二阶常系数线性非齐次常微分方程，解的性质由系数 a_1 和 $F_1(x)$ 决定，其求解过程见文献[3]。

3　结语

基于一维有限区间波动方程定解问题，对非齐次条件的判定，引入适当的辅助函数，找到了一种将非齐次边界条件和非齐次方程同时齐次化的求解方法。当$f(x,t)=F(x)q(t), q''(t)\propto q(t), q(t)\propto g(t)$，$g(t)\propto h(t)$时，可引入$v(x,t)=\dfrac{h(t)-g(t)}{l}p(x)+g(t)$或$v(x,t)=p(x)q(t)$。$q(t)$，$g(t)$，$h(t)$具有的函数类型为：$e^{\omega t}, e^{-\omega t}$或 sh$\omega t$，ch$\omega t$；sin$\omega t$，cos$\omega t$；$t$，常数$C$。

（下转第36页）