

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2012.03.012

# 面齿轮啮合过程中齿面接触应力分布研究

舒陶亮, 何国旗, 孙 晓, 卢祥江

(湖南工业大学 机械工程学院, 湖南 株洲 412007)

**摘 要:** 利用微分几何学原理推导了面齿轮传动的齿面主曲率与主方向, 由此得出面齿轮传动中诱导法曲率的2个主值。分析了面齿轮传动中的主要参数对曲率的影响, 并根据面齿轮接触点主曲率和两弹性体弹性系数与接触椭圆区域的关系, 确定了面齿轮啮合的接触域; 同时, 分析了面齿轮在理想啮合状态下的齿面接触压力的分布和变化, 并进行了仿真分析。研究表明: 面齿轮啮合过程中, 齿面接触应力沿齿宽方向, 靠近边缘两端的应力较大, 靠近外边缘的应力最大, 而齿面中部的应力最小。因此, 面齿轮传动设计中应考虑齿面修型, 使面齿轮啮合的接触点靠近齿面中部, 以提高面齿轮的承载能力, 改善轮齿啮入啮出时的冲击。

**关键词:** 面齿轮传动; 齿面曲率; 接触应力; 诱导法曲率; 啮合轨迹

中图分类号: TH132.41

文献标志码: A

文章编号: 1673-9833(2012)03-0052-06

## Research on the Distribution of Face-Gear Tooth Surface Contact Stress in Meshing Process

Shu Taoliang, He Guoqi, Sun Xiao, Lu Xiangjiang

(School of Mechanical Engineering, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412007, China)

**Abstract:** By means of differential geometry principle, derives the main curvature and main direction of the tooth surface of face-gear drive, and obtains two principal values of the induced normal curvature in the face-gear drive. Analyses the impacts of main parameters on the curvature in the face-gear drive, and according to the relations of main curvature on contact point and elastic coefficient of two elastomers to the contact ellipse area, determines the face-gear meshing contact area; at the same time, analyses the tooth surface contact pressure distribution and variation of face-gear driving in the ideal meshing condition and also makes a simulation analysis. The results show that: in the face-gear meshing process, the tooth surface contact stress along the tooth width direction becomes larger close to the edge at both ends and maximum near the outer edge, while minimum in the center of the tooth surface. Therefore, the face-gear drive should consider the tooth surface modification, make the contact point of face-gear meshing near the middle of the tooth surface, in order to improve the carrying capacity of the face-gear and reduce the impact when the tooth meshing in and out.

**Keywords:** face-gear driving; tooth surface curvature; contact stress; induced normal curvature; meshing track

收稿日期: 2012-01-19

基金项目: 国家重点基础发展计划(“973”计划)基金资助项目(2011CB706800), 湖南省高等学校科学研究基金资助重点项目(11A028)

作者简介: 舒陶亮(1988-), 男, 湖南岳阳人, 湖南工业大学硕士生, 主要研究方向为机械设计与制造,

E-mail: shutaoliang3177@163.com

## 0 引言

面齿轮传动是一种圆柱齿轮与圆锥齿轮相啮合的新型齿轮传动<sup>[1]</sup>。其圆锥齿轮,是用尺寸与啮合中的渐开线圆柱齿轮相同或相近的刀具,经范成而得到的,具有许多独特的优点和几何现象,尤其是面齿轮在分流-汇流传动方面的独特性<sup>[1]</sup>,使得其在航空领域,尤其是在新型战斗直升机中的应用,表现出了潜在的优势。

要充分利用面齿轮传动,就要深入理解其几何特性与啮合特性。面齿轮齿面接触压力的大小及分布,会直接影响轮齿啮合面的摩擦热流量大小和分布,并会对面齿轮的本体温度和瞬时温度产生决定性的影响。因此,本文拟对面齿轮传动的齿面曲率及齿面诱导法曲率进行研究,以揭示齿面曲率及齿面诱导法曲率与齿面接触应力之间的关系,并且对面齿轮传动过程中齿面接触应力分布与变化进行仿真,考察面齿轮传动的啮合过程中,不同啮合位置处齿面接触应力的分布规律,这对面齿轮传动的强度计算与分析具有一定的参考价值。且通过对面齿轮接触应力分布的研究,可为面齿轮的几何设计和啮合过程中的接触点的控制提供理论参考依据。

## 1 面齿轮的齿面几何特征分析

### 1.1 面齿轮的齿面方程

由于面齿轮的齿面是用圆柱形齿轮刀具经范成法加工出来的,因此,其齿面方程可根据齿轮的啮合原理,由圆柱形齿轮刀具的齿面方程推导而得<sup>[2]</sup>。

如图1和2所示,  $z_{f0}(z_f)$ 与  $z_{s0}(z_s)$  分别为面齿轮与插齿刀的旋转轴,两轴线的交点为坐标原点。坐标系  $S_{f0}: O_{f0}x_{f0}y_{f0}z_{f0}$  与  $S_f: O_fx_fy_fz_f$  分别为面齿轮的固定坐标系和转动坐标系,  $S_{s0}: O_{s0}x_{s0}y_{s0}z_{s0}$  与  $S_s: O_sx_sy_sz_s$  为插齿刀的固定与转动坐标系。  $\varphi_f$  与  $\varphi_s$  分别为运动中面齿轮和插齿刀转过的角度。

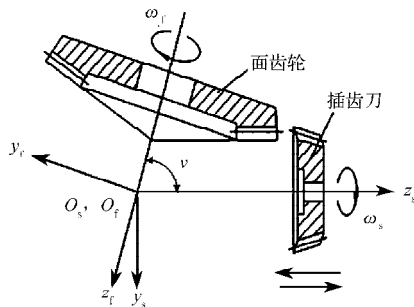


图1 面齿轮插齿加工示意图

Fig. 1 Face-gear shaping processing diagram

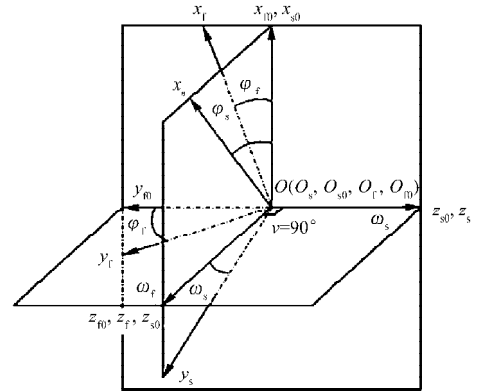


图2 正交面齿轮加工坐标系示意图

Fig. 2 The schematic of orthogonal face-gear machining coordinate system

可得到从插齿刀转动坐标系  $S_s$  到面齿轮转动坐标系  $S_f$  之间的转换矩阵为<sup>[3]</sup>

$$[M_{f,s}] = [M_{f,s0}][M_{s0,s}] = \begin{bmatrix} \cos\varphi_f \cos\varphi_s & -\sin\varphi_s \cos\varphi_f & -\sin\varphi_f & 0 \\ -\sin\varphi_f \cos\varphi_s & \sin\varphi_s \sin\varphi_f & -\cos\varphi_f & 0 \\ \sin\varphi_s & \cos\varphi_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

### 1) 刀具齿面方程

图3所示为插齿刀的截面渐开线齿形,坐标系与图1中的坐标系相对应(其中  $z_{s0}$  垂直纸面)。

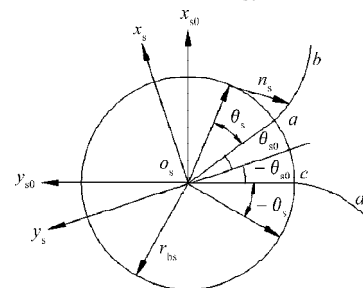


图3 插齿刀渐开线齿面参数

Fig. 3 The parameters for gear slotting cutter involute

则由图3所示可以得出插齿刀渐开线齿面向量  $r_s$  的方程为<sup>[3]</sup>

$$r_s(u_s, \theta_s) = [x_s \ y_s \ z_s \ t]^T = \begin{bmatrix} \pm r_{bs} [\sin(\theta_{s0} + \theta_s) - \theta_s \cos(\theta_{s0} + \theta_s)] \\ -r_{bs} [\cos(\theta_{s0} + \theta_s) + \theta_s \sin(\theta_{s0} + \theta_s)] \\ u_s \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中:  $r_{bs} = mN_s \cos\alpha_s / 2$  为渐开线插齿刀基圆半径,其中  $m$  为插齿刀模数,  $N_s$  为插齿刀齿数,  $\alpha_s$  为插齿刀压力角;

$\theta_{s0}$  为插齿刀齿槽对称线到渐开线起点的角度参数;

$\theta_s$  为插齿刀渐开线上一点的角度参数;

$\mu_s$  为插齿刀齿面上一点的轴向参数;

式中的“±”分别对应齿槽对称线两侧的渐开线  $ab$  和  $cd$ 。其中  $\theta_{s0}$  由下式确定:

$$\theta_s = \pi/2N_s - \text{inv}\alpha_s, \quad (3)$$

式中  $\text{inv}\alpha_s$  为关于  $\alpha_s$  的渐开线函数, 其函数值为

$$\text{inv}\alpha_s = \tan\alpha_s - \alpha_s. \quad (4)$$

## 2) 面齿轮的齿面方程

将插齿刀齿面方程由坐标系  $S_s$  到  $S_f$  之间转换, 得到插齿刀齿面在坐标系  $S_f$  中的面族方程为<sup>[4]</sup>

$$\mathbf{r}_f(u_s, \theta_s, \varphi_s) = [M_{f,s}] (\varphi_s) \mathbf{r}_s(u_s, \theta_s), \quad (5)$$

联立式 (4), 最终可得如下面齿轮的齿面方程:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_f(u_s, \theta_s, \varphi_s) = [M_{f,s}] (\varphi_s) \mathbf{r}_s(u_s, \theta_s), \\ F_f(u_s, \theta_s, \varphi_s) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

则面齿轮齿面坐标方程展开为

$$\begin{cases} x_f = r_{bs} \left[ \cos\varphi_f (\sin\varphi_0 \mp \theta_s \cos\varphi_0) - \frac{\sin\varphi_f}{q_{2s} \cos\varphi_0} \right], \\ y_f = -r_{bs} \left[ \sin\varphi_f (\sin\varphi_0 \mp \theta_s \cos\varphi_0) + \frac{\cos\varphi_f}{q_{2s} \cos\varphi_0} \right], \\ z_f = -r_{bs} (\cos\varphi_0 \pm \theta_s \sin\varphi_0). \end{cases} \quad (7)$$

## 1.2 面齿轮齿面的主曲率及其主方向的确定

由微分几何学原理可知, 式 (3) 可以用矢量式表示为

$$\mathbf{r} = x_s \mathbf{i} + y_s \mathbf{j} + z_s \mathbf{k},$$

因此, 可求出  $\mathbf{r}_{\theta_s}, \mathbf{r}_{\varphi_s}, \mathbf{r}_{\mu_s}, \mathbf{r}_{\varphi_s}, \mathbf{r}_{\theta_s}, \mathbf{r}_{\mu_s}$ 。此处  $\mathbf{r}_{\theta_s}$  表示  $\mathbf{r}$  对参数  $\theta_s$  求偏导数, 其余类推<sup>[5]</sup>。

$$\text{设 } \mathbf{E} = \mathbf{r}_{\theta_s} \cdot \mathbf{r}_{\theta_s}, \mathbf{F} = \mathbf{r}_{\theta_s} \cdot \mathbf{r}_{\varphi_s}, \mathbf{G} = \mathbf{r}_{\varphi_s} \cdot \mathbf{r}_{\varphi_s};$$

$$\mathbf{L} = -\mathbf{n}_{\theta_s} \cdot \mathbf{r}_{\theta_s}, \mathbf{M} = -\mathbf{n}_{\theta_s} \cdot \mathbf{r}_{\varphi_s}, \mathbf{N} = -\mathbf{n}_{\varphi_s} \cdot \mathbf{r}_{\varphi_s},$$

式中:  $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$  为曲面的第一基本量;  $\mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}$  为曲面的第二基本量。

则面齿轮齿面主曲率半径  $R$  应满足以下方程:

$$(\mathbf{E}\mathbf{G} - \mathbf{F}^2) + (2\mathbf{F}\mathbf{M} - \mathbf{E}\mathbf{N} - \mathbf{G}\mathbf{L})R + (\mathbf{L}\mathbf{N} - \mathbf{M}^2)R^2 = 0. \quad (8)$$

令  $K_1^H = 1/R_1$  和  $K_2^H = 1/R_2$ , 则由欧拉 (Euler) 公式可得任意方向的法曲率为

$$K^H = H^H + R^H \cos(2\varphi), \quad (9)$$

式中:  $H^H = (K_1^H + K_2^H)/2$ ,

$$R^H = (K_1^H - K_2^H)/2,$$

$\varphi$  为任意方向的矢量与  $\mathbf{e}_1^H$  的夹角。

## 1.3 面齿轮传动齿面接触点处的诱导法曲率

圆柱齿轮齿面  $\Sigma_l$  的法曲率为

$$K^I = H^I - R^I \cos(2\varphi).$$

在同一个方向上, 面齿轮齿面  $\Sigma_n$  的法曲率为

$$K^H = H^H - R^H \cos 2(\varphi - \varphi_1),$$

式中  $\varphi_1$  为面齿轮与圆柱齿轮主方向间的夹角<sup>[5]</sup>。

该方向的诱导法曲率  $K^H$  为

$$\begin{aligned} K^H &= K^I - K^H = H^I - H^H + \\ & (R^I - R^H \cos(2\varphi_1)) \cos(2\varphi) - \\ & R^H \sin(2\varphi_s) \sin(2\varphi_1), \end{aligned} \quad (10)$$

其主方向为

$$\text{tg}(2\alpha) = -R^H \sin(2\varphi_1) / (R^I - R^H \cos(2\varphi_1)). \quad (11)$$

由式 (8) 可解出 2 个  $\varphi$  值, 一个用  $\varphi_g$  表示, 它的方向为诱导法曲率  $K^H$  的第一个主方向  $\mathbf{e}_1^H$ , 相应的第一个主值用  $K_1^H$  表示; 另一个用  $\pi/2 + \varphi_g$  表示, 它的方向为诱导法曲率  $K^H$  的第二个主方向  $\mathbf{e}_2^H$ , 相应的第二个主值用  $K_2^H$  表示<sup>[6-7]</sup>。  $K_1^H$  和  $K_2^H$  可表示为

$$\begin{cases} K_1^H = H^H + R^H, \\ K_2^H = H^H - R^H. \end{cases} \quad (12)$$

则该方向的诱导法曲率为<sup>[6]</sup>

$$\begin{aligned} K^H &= H^H + R^I \cos 2(\varphi_R + \theta) - R^H \cos 2(\varphi_R + \theta - \varphi_1) = \\ & K_1^H \cos^2 \theta + K_2^H \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (13)$$

## 2 面齿轮传动的齿面接触应力方程

设面齿轮传动中, 圆柱齿轮和面齿轮接触点处在各自两个正交平面上的法曲率分别为  $K_1^I, K_2^I$  和  $K_1^H, K_2^H$ , 正交主平面与公切面的交线分别为坐标轴  $(x_1, y_1)$  和  $(x_2, y_2)$  的连线。根据接触点主曲率和两弹性体弹性系数与接触椭圆区域的关系可知, 接触区域椭圆长短半轴  $\rho_x$  和  $\rho_y$  分别为<sup>[7]</sup>

$$\begin{cases} \rho_x = u^3 \sqrt{\frac{1.5F}{K_1^I + K_2^I + K_1^H + K_2^H} \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}, \\ \rho_y = v^3 \sqrt{\frac{1.5F}{K_1^I + K_2^I + K_1^H + K_2^H} \left( \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right)}. \end{cases} \quad (14)$$

式中:  $\mu_i$  和  $E_i$  ( $i=1, 2$ ) 分别为两齿轮材料的泊松比和弹性模量;

系数  $u$  和  $v$  均为椭圆积分函数。

按照赫兹接触理论, 齿面的平均接触压力为<sup>[7]</sup>

$$P_{av} = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{F_{nc} E}{2\pi \rho_{ec} b (1 - \nu^2)}}, \quad (15)$$

式(15)中:  $\rho_{ec}$  为啮合齿轮齿面的等效曲率半径,且

$$\rho_{ec} = \frac{\rho_{e1}\rho_{e2}}{\rho_{e1} + \rho_{e2}}, \text{ 其中}$$

$$\rho_{e1} = \frac{1}{2}d_1 \sin \alpha \pm g_{yc}, \rho_{e2} = \frac{1}{2}d_2 \sin \alpha \pm g_{yc}。$$

$g_{yc}$  为齿面任意接触点  $C$  在啮合线上的位置,且

$$g_{yc} = \pm \frac{1}{2}d_1 \sin \alpha \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}d_1 \sin \alpha\right)^2 - \left(\frac{1}{2}d_1\right)^2 + r_c^2}。 \quad (16)$$

在接触椭圆表面上,接触应力按椭圆体分布,其最大接触应力  $\sigma_{max}$  在接触椭圆中心。因此,面齿轮传动啮合点处的最大接触应力  $\sigma_{max}$  为<sup>[7]</sup>

$$\sigma_{max} = \frac{3F}{2\pi\rho_x\rho_y}。 \quad (17)$$

面齿轮传动过程中,齿轮是单、双齿交替啮合传动的,齿间载荷与啮合位置有关。根据面齿轮传动的重合度方程,采用无量纲线性坐标法计算齿间载荷分配系数  $X_\Gamma$ , 则任意啮合位置齿面法向载荷  $F$  为  $F = X_\Gamma F_t$ 。

综上所述,面齿轮传动的齿面最大接触应力主要由齿面法向载荷  $F$ 、啮合点处的曲率半径和材料的特性决定。

### 3 面齿轮啮合的接触应力动态仿真

#### 3.1 面齿轮啮合有限元分析模型

面齿轮啮合的具体参数如表1所示。

表1 面齿轮啮合的参数及材料特性

Table 1 The face-gear meshing parameters and the material properties

齿轮名称	齿轮参数						
	齿数	模数 / mm	压力角 / (°)	材质	热处理	弹性模量 / MPa	泊松比
圆柱齿轮	18	5	20	40TiMnCr	调质 HB=260	$2.06 \times 10^5$	0.3
面齿轮	49	5	20	45	调质 HB=240	$2.06 \times 10^5$	0.3

根据式(2)和(7)推导出的理论齿面,通过MATLAB 7.0求解非线性方程组,得到圆柱齿轮和面齿轮齿面的离散点,拟合后分别得到圆柱齿轮和面齿轮的一个齿面。将经MATLAB 7.0求解得到的齿面导入Pro/E中,根据Pro/E参数化建模功能,建立准确的圆柱齿轮和面齿轮参数化的齿轮模型,并对其进行啮合装配,使圆柱齿轮和面齿轮正确啮合(面齿轮啮合的三维模型见图4)。再将其导入ANSYS环

境中生成有限元模型。进行网格划分时,考虑到面齿轮啮合过程的受力特点,故轮齿处网格应较密,远离轮齿处可适当降低网格密度。因考虑到计算机的资源有限,故选取五齿进行面齿轮啮合,得到的面齿轮五齿啮合网格模型见图5。同时,对面齿轮进行接触界面、加载、约束和边界条件等的定义,并设面齿轮传动时的圆周力  $F_t$  为 6 000 N。

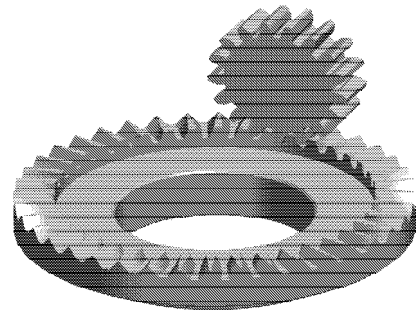


图4 面齿轮啮合三维模型

Fig. 4 The three-dimensional model of face-gear meshing

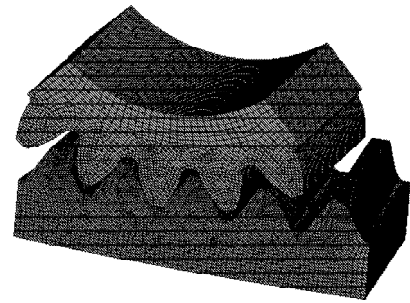
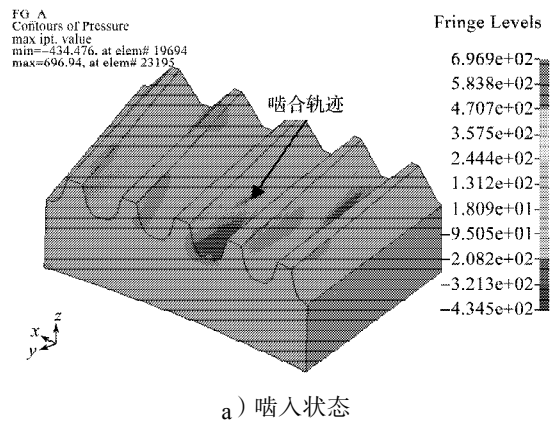


图5 面齿轮五齿啮合有限元网格模型

Fig. 5 The finite element analysis grid model of face-gear transmission

#### 3.2 面齿轮传动过程中齿面接触应力云图

对面齿轮五齿啮合区域进行接触应力有限元分析,分析面齿轮从开始进入啮合到退出啮合的各位置应力情况,基本上能反映面齿轮传动过程中两对齿轮在接触处的应力变化情况<sup>[12-14]</sup>。图3所示为齿轮在一个啮合周期内不同时刻的等效应力云图,整个过程历时 0.001 s。



a) 啮入状态

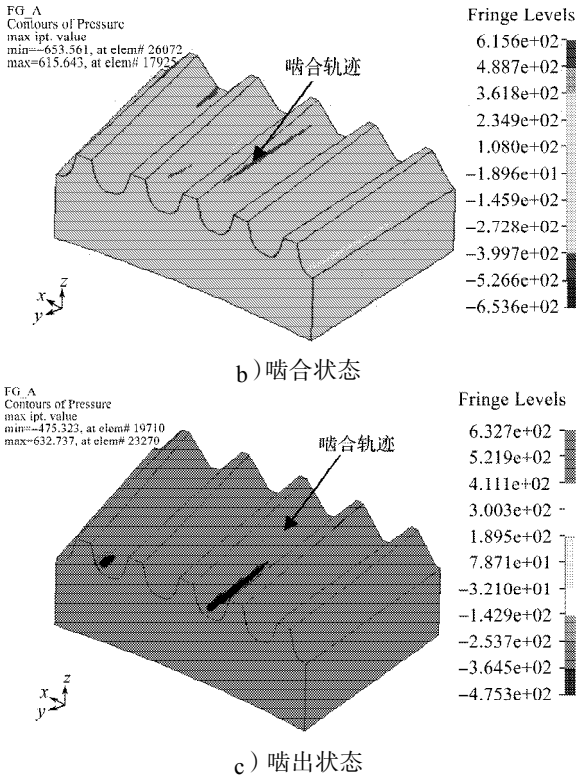


图6 面齿轮在一个啮合周期内不同时刻的等效应力云图  
Fig. 6 Equivalent stress contour of a face-gear in a meshing cycle for different times

从图6中可以看出,面齿轮啮合过程中,基本上处于双齿啮合状态;而且,即便是直齿面齿轮,其啮合轨迹也类似于斜齿轮,使得传动较平稳;从齿轮啮入到啮出,其啮合轨迹由内向外移动。

### 3.3 面齿轮传动过程中齿面接触应力分布

本文主要从面齿轮齿面的齿宽方向和齿高方向进行接触应力仿真分析<sup>[15-16]</sup>。

图7所示为A, B, C 3个节点沿齿面齿宽方向的应力云图,图8所示为A, B, C 3个节点沿齿面齿高方向的应力云图。图9和图10所示分别为面齿轮齿面A, B, C 3个节点齿宽和齿高方向上的接触应力随时间变化曲线。

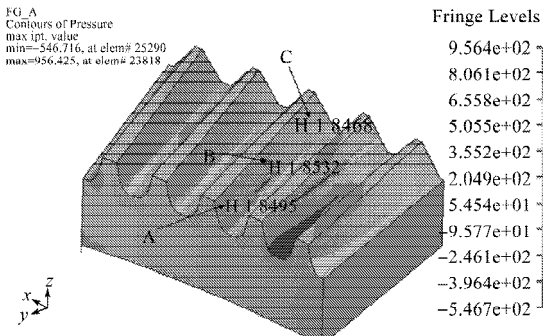


图7 沿齿面齿宽方向的3个节点的应力云图  
Fig. 7 Three nodes stress contour along the tooth width direction of the tooth surface

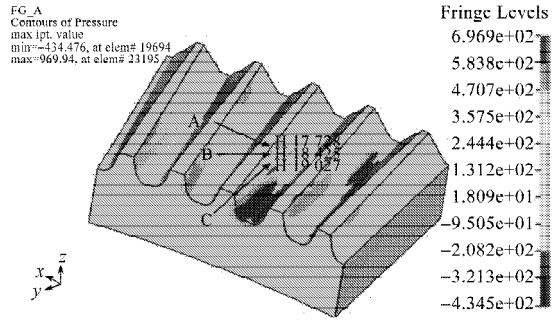


图8 沿齿面齿高方向的3个节点的应力云图  
Fig. 8 Three nodes stress contour along the tooth height direction of the tooth surface

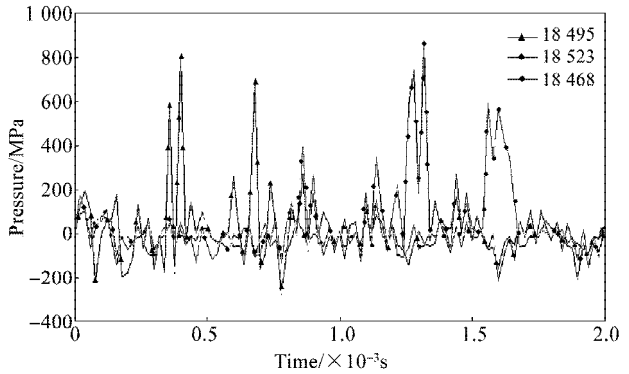


图9 齿面沿齿宽方向的应力分布  
Fig. 9 Tooth surface stress distribution along the tooth width direction

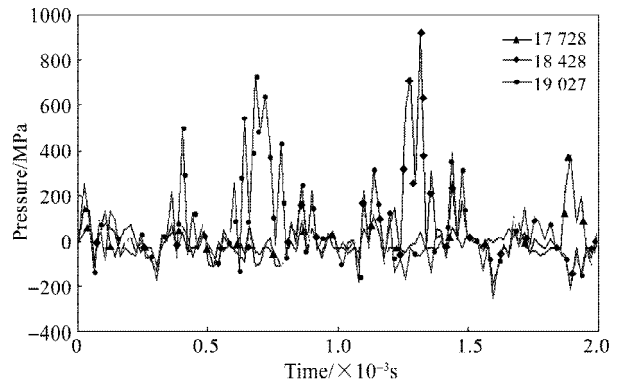


图10 齿面沿齿高方向的应力分布  
Fig. 10 Tooth surface stress distribution along the face depth direction

从图9中可看出,面齿轮齿面沿齿宽方向的接触应力出现了2次应力峰值,第1次是由于面齿轮轮齿啮入时的冲击作用,使得齿轮刚接触时刻的应力较大,最大应力达812 MPa。随着时间的增加,冲击载荷所造成的应力迅速衰减,在0.000 050 s时,齿轮间的最大应力衰减为50 MPa。而随着齿面接触变得平稳,接触应力逐渐增大,到0.000 065 s时,出现了第2次应力峰值,这是由齿轮啮出时的冲击作用造成的,最大应力达715 MPa。

通过以上数据分析可以看出,面齿轮传动过程

中, 齿轮啮入和啮出的冲击载荷较大, 会给面齿轮传动带来不利影响。由此可见, 齿轮传动的动态仿真对面齿轮的精确设计与校核相当重要。

面齿轮啮合过程中, 沿齿高方向的齿面接触应力的分布规律仿真结果见图 10。由图 10 可得, 在不考虑齿间载荷分配的情况下, 沿齿高方向的轮齿中部齿顶位置啮合点接触域上分布应力最大, 轮齿底部的接触应力次之, 顶部的啮合域分布力最小。同时, 从图 9 中还可看出, 节点 B 和节点 C 将滞后于节点 A 的峰值, 且节点 B 的接触应力最大, 节点 C 的峰值明显降低, 说明面齿轮啮合过程中, 接触区域靠近面齿轮的内圈部分, 外圈的接触应力很小。这一点对面齿轮的承载传动来说是有意义的, 因为, 面齿轮外圈及轮齿的顶部强度相较内圈及轮齿底部弱。

## 4 结论

本文的研究结果表明, 面齿轮在啮合过程中, 齿面接触应力的分布情况为: 沿齿宽方向, 靠近边缘两端的应力较大, 其中, 靠近外边缘的应力最大, 而齿面中部的应力最小。其原因为面齿轮齿面的不同位置处的主曲率是不一样的, 这对面齿轮啮合不利。因此, 面齿轮传动应考虑齿面修型, 使面齿轮啮合的接触点靠近齿面中部, 以提高面齿轮的承载能力, 同时改善轮齿啮入啮出时的冲击。

### 参考文献:

- [1] Litvin F L, Fuentes A, Handschuh R F, et al. Face-Gear Drive with Spur Involute Pinion: Geometry, Generation by a Worm, Stresses Analysis[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2002, 191: 2785-2813.
- [2] Barone S, Borgianni L, Forte P. Evaluation of the Effect of Misalignment and Profile Modification in Face Gear Drive by a Finite Element Meshing Simulation[J]. *Transactions of ASME, Journal of Mechanical Design*, 2004, 126: 916-924.
- [3] 王优强, 卞荣. 连续波状粗糙度对直齿轮热弹流润滑的影响[J]. *机械工程学报*, 2009, 45(8): 112-118.  
Wang Youqiang, Bian Rong. Influence of Surface Roughness Wave on Thermal Elastohydrodynamic Lubrication of Involute Spur Gears[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2009, 45(8): 112-118.
- [4] 李政民卿, 朱如鹏. 正交面齿轮齿廓的几何设计和根切研究[J]. *华南理工大学学报: 自然科学版*, 2008, 36(2): 78-82.  
Li Zhengminqing, Zhu Rupeng. Investigation into Geometrical Design of Tooth Profile and Undercut for Orthogonal Face Gear[J]. *Journal of South China University of Technology: Natural Science Edition*, 2008, 36(2): 78-82.
- [5] 李政民卿, 朱如鹏. 面齿轮传动的承载接触分析[J]. *南京航空航天大学学报*, 2010, 42(2): 219-223.  
Li Zhengminqing, Zhu Rupeng. Load Tooth Contact Analysis on Face Gear Driver[J]. *Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics*, 2010, 42(2): 219-223.
- [6] Litvin F L, Fuentes A, Howkins M. Design, Generation and TCA of New Type of Asymmetric Face-Gear Drive with Modified Geometry[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, 190(43/44): 5837-5865.
- [7] Guingand M, Vaujany D J P, Jacquin C Y. Quasi-Static Analysis of a Face Gear under Torque[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, 194: 4301-4318.

(责任编辑: 廖友媛)