doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2012.03.001

基于区间直觉梯形模糊数的群决策方法

汪新凡[1,2]，杨小娟[1]

（1. 湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007；2. 中南大学 商学院，湖南 长沙 410083）

摘　要：针对准则值为区间直觉梯形模糊数（IVITFN）的群决策问题，定义了新的区间直觉梯形模糊数的加性的运算法则；基于这些运算法则，给出了几种区间直觉梯形模糊数信息的算术集成算子，包括区间直觉梯形模糊数的加权算术平均（IVITFNWAA）算子、区间直觉梯形模糊数的有序加权平均（IVITFNOWA）算子和区间直觉梯形模糊数的混合集成（IVITFNHA）算子；基于IVITFNWAA算子和IVITFNHA算子，提出了一种准则值为区间直觉梯形模糊数而准则权重确知的群决策方法。最后，实例分析表明了该方法的可行性和有效性。

关键词：群决策；区间直觉梯形模糊数；IVITFNWAA算子；IVITFNOWA算子；IVITFNHA算子

中图分类号：N945.25　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2012)03-0001-08

Approach to Group Decision Making Based on Interval-Valued Intuitionistic Trapezoidal Fuzzy Number

Wang Xinfan[1,2]，Yang Xiaojuan[1]

（1. School of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China；
2. School of Business，Central South University，Changsha 410083，China）

Abstract：For group decision making problems in which the criteria values are interval-valued intuitionistic trapezoidal fuzzy numbers, some new additive operational laws of the interval-valued intuitionistic trapezoidal fuzzy number are defined, and based on these operational laws, some interval-valued intuitionistic trapezoidal fuzzy number arithmetic aggregation operators are proposed, such as the interval-valued intuitionistic trapezoidal fuzzy number weighted arithmetic averaging (IVITFNWAA) operator, the interval-valued intuitionistic trapezoidal fuzzy number ordered weighted averaging (IVITFNOWA) operator and the interval-valued intuitionistic trapezoidal fuzzy number hybrid aggregation (IVITFNHA) operator. Furthermore, on the basis of the IVITFNWAA operator and the IVITFNHA operator, an approach is developed for solving group decision making problems, in which the criteria values are interval-valued intuitionistic trapezoidal fuzzy numbers and the criteria weight information is known completely. Finally, an example is given to illustrate the feasibility and effectiveness of this method.

Keywords：group decision making；interval-valued intuitionistic trapezoidal fuzzy number；IVITFNWAA operator；IVITFNOWA operator；IVITFNHA operator

---

收稿日期：2012-03-30

基金项目：国家自然科学基金资助项目(70921001，61174075)，教育部人文社科基金资助项目(10YJC630338，12YJA630114)，湖南省社会科学基金资助项目（09YBB120），湖南省自然科学基金资助项目（11JJ6068）

作者简介：汪新凡（1966-），男，湖南安化人，湖南工业大学教授，中南大学博士生，主要研究方向为决策分析，信息融合等，E-mail：zzwxfydm@126.com

0 引言

1986年，保加利亚学者K. T. Atanassov[1]将传统模糊集（fuzzy sets）[2]进行扩展，提出了直觉模糊集（intuitionistic fuzzy sets）的概念。直觉模糊集同时考虑了隶属度、非隶属度和犹豫度3个方面的信息，能够更加细腻地刻画客观世界的模糊性和不确定性，在处理不确定性方面比传统模糊集更具有灵活性和实用性，因而引起了众多学者的关注，并被广泛应用于决策分析、人工智能、模式识别和智能信息处理等领域[3-4]。

直觉模糊信息集成算子及其在多准则决策中的应用是直觉模糊集研究的一个重要分支。文献[4-5]定义了直觉模糊数的加性的运算法则，给出了几种直觉模糊数信息的算术集成算子，包括IFWA算子、IFOWA算子和IFHA算子，并提出了准则值为直觉模糊数的多准则决策方法。1989年，K. T. Atanassov等人[6]用区间数表示隶属度和非隶属度，将直觉模糊集扩展至区间直觉模糊集。文献[7-8]定义了区间直觉模糊数的加性的运算法则，给出了几种区间直觉模糊数信息的算术集成算子，包括IIFWA算子、IIFOWA算子和IIFHA算子，并提出了准则值为区间直觉模糊数的多准则决策方法。2007年，刘峰等人[9]用三角模糊数表示隶属度和非隶属度，将直觉模糊集进一步扩展至模糊数直觉模糊集。文献[10]定义了模糊数直觉模糊数的加性的运算法则，给出了几种模糊数直觉模糊数信息的算术集成算子，包括FIFWA算子、FIFOWA算子和FIFHA算子，并提出了准则值为模糊数直觉模糊数的群决策方法。

文献[11-13]将直觉模糊集从另一个方向进行扩展，即把论域的离散集合扩展到连续集合，提出了直觉三角模糊数[11]、直觉梯形模糊数和区间直觉梯形模糊数（interval-valued intuitionistic trapezoidal fuzzy number，IVITFN）[12]等概念。文献[11]定义了直觉三角模糊数的4种运算，并将其应用于故障树分析。文献[13-14]定义了直觉梯形模糊数的加性的运算法则，给出了几种直觉梯形模糊数信息的算术集成算子，包括ITFWAA算子、ITFOWA算子和ITFHA算子，并将它们应用于多准则决策中。文献[15]定义了IVITFN的加性的运算法则，给出了IVITFN的加权算术平均（IVITFNWAA）算子，并提出了准则值为IVITFN的多准则决策方法。文献[16]针对准则值为区间直觉梯形模糊数且准则权重为区间数的多准则决策问题，提出了一种基于分式规划的多准则决策方法。

现有IVITFN的加性的运算法则及其相应的加权算术平均算子均存在不足，同时，一些大型或重要的决策往往需要多个决策者的共同参与，而目前尚未有基于区间直觉梯形模糊数的群决策方法研究的报道。为此，本文定义了新的IVITFN的加性的运算法则，并基于这些运算法则，提出了几种新的IVITFN信息的算术集成算子，包括IVITFN的加权算术平均算子、有序加权平均算子和混合集成算子，进而在群体决策情形下提出了一种准则值为IVITFN而准则权重确知的群决策方法。

1 IVITFN及相关定义

定义1[12-16] 设$\tilde{\beta}$是实数集上的一个正规的凸子集，其隶属函数为

$$\mu_{\tilde{\beta}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{b-a}\mu_{\tilde{\beta}}, & a\leqslant x<b;\\ \mu_{\tilde{\beta}}, & b\leqslant x\leqslant c;\\ \dfrac{d-x}{d-c}\mu_{\tilde{\beta}}, & c<x\leqslant d;\\ 0, & \text{otherwise}。\end{cases}$$

其非隶属函数为

$$\nu_{\tilde{\beta}}(x)=\begin{cases}\dfrac{b-x+\nu_{\tilde{\beta}}(x-a)}{b-a}, & a\leqslant x<b;\\ \nu_{\tilde{\beta}}, & b\leqslant x\leqslant c;\\ \dfrac{x-c+\nu_{\tilde{\beta}}(d-x)}{d-c}, & c<x\leqslant d;\\ 0, & \text{otherwise}。\end{cases}$$

式中：$0\leqslant\mu_{\tilde{\beta}}\leqslant1,\ 0\leqslant\nu_{\tilde{\beta}}\leqslant1,\ \mu_{\tilde{\beta}}+\nu_{\tilde{\beta}}\leqslant1$，$a, b, c, d\in\mathbf{R}$，则称$\tilde{\beta}=\left\langle[a,b,c,d];\mu_{\tilde{\beta}},\nu_{\tilde{\beta}}\right\rangle$为直觉梯形模糊数。当$b=c$时，直觉梯形模糊数退化为直觉三角模糊数。

记$\pi_{\tilde{\beta}}=1-\mu_{\tilde{\beta}}-\nu_{\tilde{\beta}}$，则$\pi_{\tilde{\beta}}$表示$\tilde{\beta}$的犹豫度，其值越小，代表模糊数越确定。如果$\mu_{\tilde{\beta}}$和$\nu_{\tilde{\beta}}$都为区间[0, 1]上的闭子区间，则称$\tilde{\beta}$为区间直觉梯形模糊数（IVITFN）。记$\mu_{\tilde{\beta}}=\left[\mu^-,\mu^+\right]$，$\nu_{\tilde{\beta}}=\left[\nu^-,\nu^+\right]$，$\mu^-,\nu^-\geqslant0,\ \mu^++\nu^+\leqslant1$，则IVITFN可记为$\tilde{\beta}=\left\langle[a,b,c,d];\left[\mu^-,\mu^+\right],\left[\nu^-,\nu^+\right]\right\rangle$。不妨设IVITFN中的梯形模糊数均已利用文献[15]的方法进行了规范化（由规范化的知识可知，这时的梯形模糊数是正的），本文中均指此类IVITFN，且设Θ为全体IVITFN的集合。

为了方便，根据文献[17]，记$A\left(\tilde{\beta}\right)$表示梯形模糊数$[a, b, c, d]$的期望值，则

$$A\left(\tilde{\beta}\right)=\frac{a+b+c+d}{4}。\tag{1}$$

文献[15]根据区间直觉模糊数的得分函数和精确

函数[7]以及梯形模糊数的期望值计算公式（1），定义了IVITFN的得分函数$S(\tilde{\beta})$与精确函数$H(\tilde{\beta})$，并相应给出了一种IVITFN的比较与排序方法。

定义2[15]　设$\tilde{\beta}=\langle[a,b,c,d];[\mu^-,\mu^+],[v^-,v^+]\rangle$为IVITFN，其得分函数$S(\tilde{\beta})$与精确函数$H(\tilde{\beta})$分别为：

$$S(\tilde{\beta})=\frac{A(\tilde{\beta})(\mu^- - v^- + \mu^+ - v^+)}{2}, \quad (2)$$

$$H(\tilde{\beta})=\frac{A(\tilde{\beta})(\mu^- + v^- + \mu^+ + v^+)}{2}。 \quad (3)$$

定义3[15]　设$\tilde{\beta}_1=\langle[a_1,b_1,c_1,d_1];[\mu_1^-,\mu_1^+],[v_1^-,v_1^+]\rangle$和$\tilde{\beta}_2=\langle[a_2,b_2,c_2,d_2];[\mu_2^-,\mu_2^+],[v_2^-,v_2^+]\rangle$是任意2个IVITFN，则

1）若$S(\tilde{\beta}_1)<S(\tilde{\beta}_2)$，则$\tilde{\beta}_1$小于$\tilde{\beta}_2$，记作$\tilde{\beta}_1<\tilde{\beta}_2$；

2）若$S(\tilde{\beta}_1)=S(\tilde{\beta}_2)$，当$H(\tilde{\beta}_1)=H(\tilde{\beta}_2)$时，则$\tilde{\beta}_1$等于$\tilde{\beta}_2$，记作$\tilde{\beta}_1=\tilde{\beta}_2$；当$H(\tilde{\beta}_1)<H(\tilde{\beta}_2)$时，则$\tilde{\beta}_1$小于$\tilde{\beta}_2$，记作$\tilde{\beta}_1<\tilde{\beta}_2$。

文献[15]定义了一种IVITFN的加性的运算法则：

定义4[15]　设$\tilde{\beta}_1=\langle[a_1,b_1,c_1,d_1];[\mu_1^-,\mu_1^+],[v_1^-,v_1^+]\rangle$和$\tilde{\beta}_2=\langle[a_2,b_2,c_2,d_2];[\mu_2^-,\mu_2^+],[v_2^-,v_2^+]\rangle$是任意2个IVITFN，则

1）
$$\tilde{\beta}_1\oplus\tilde{\beta}_2=\langle[a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2,d_1+d_2];\\ [\mu_1^-+\mu_2^--\mu_1^-\mu_2^-,\mu_1^++\mu_2^+-\mu_1^+\mu_2^+],\\ [v_1^-v_2^-,v_1^+v_2^+]\rangle;$$

2）
$$\lambda\tilde{\beta}_1=\langle[\lambda a_1,\lambda b_1,\lambda c_1,\lambda d_1];\\ [1-(1-\mu_1^-)^\lambda,1-(1-\mu_1^+)^\lambda],\\ [(v_1^-)^\lambda,(v_1^+)^\lambda]\rangle,\ \lambda\geqslant 0。$$

分析可知，该定义存在不合理之处。例如，设有2个IVITFN$\langle[a,b,c,d];[1,1],[0,0]\rangle$与$\langle[a,b,c,d];[0,0],[1,1]$，按照定义4得它们的和为$\langle[2a,2b,2c,2d];[1,1],[0,0]\rangle$，其中的隶属度由区间数[1,1]和[0,0]变为[1,1]，非隶属度由区间数[0,0]和[1,1]变为[0,0]，这与人们的直觉不相符。又如，设有2个IVITFN$\langle[a,b,c,d];[0.5,0.5],[0.3,0.3]\rangle$与$\langle[a,b,c,d];[0.4,0.4],[0.2,0.2]\rangle$，按照定义4得它们的和为$\langle[2a,2b,2c,2d];[0.7,0.7],[0.06,0.06]\rangle$，其中的隶属度由[0.5,0.5]和[0.4,0.4]放大为[0.7,0.7]，非隶属度由[0.3,0.3]和[0.2,0.2]缩小为[0.06,0.06]，这个结果也不太合理。为此，本文进行改进，给出IVITFN的如下运算法则：

定义5　设$\tilde{\beta}_1=\langle[a_1,b_1,c_1,d_1];[\mu_1^-,\mu_1^+],[v_1^-,v_1^+]\rangle$和$\tilde{\beta}_2=\langle[a_2,b_2,c_2,d_2];[\mu_2^-,\mu_2^+],[v_2^-,v_2^+]\rangle$是任意2个IVITFN，则：

1）
$$\tilde{\beta}_1\oplus\tilde{\beta}_2=\\ \langle[a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2,d_1+d_2];\\ \left[\frac{A(\tilde{\beta}_1)\mu_1^-+A(\tilde{\beta}_2)\mu_2^-}{A(\tilde{\beta}_1)+A(\tilde{\beta}_2)},\frac{A(\tilde{\beta}_1)\mu_1^++A(\tilde{\beta}_2)\mu_2^+}{A(\tilde{\beta}_1)+A(\tilde{\beta}_2)}\right],\\ \left[\frac{A(\tilde{\beta}_1)v_1^-+A(\tilde{\beta}_2)v_2^-}{A(\tilde{\beta}_1)+A(\tilde{\beta}_2)},\frac{A(\tilde{\beta}_1)v_1^++A(\tilde{\beta}_2)v_2^+}{A(\tilde{\beta}_1)+A(\tilde{\beta}_2)}\right]\rangle;$$

2）
$$\lambda\tilde{\beta}_1=\\ \langle[\lambda a_1,\lambda b_1,\lambda c_1,\lambda d_1];[\mu_1^-,\mu_1^+],[v_1^-,v_1^+]\rangle,\ \lambda\geqslant 0。$$

易知，定义5中的所有运算结果仍为IVITFN，且满足：

1）$\tilde{\beta}_1\oplus\tilde{\beta}_2=\tilde{\beta}_2\oplus\tilde{\beta}_1$；

2）$(\tilde{\beta}_1\oplus\tilde{\beta}_2)\oplus\tilde{\beta}_3=\tilde{\beta}_1\oplus(\tilde{\beta}_2\oplus\tilde{\beta}_3)$；

3）$\lambda(\tilde{\beta}_1\oplus\tilde{\beta}_2)=\lambda\tilde{\beta}_1\oplus\lambda\tilde{\beta}_2$，$\lambda\geqslant 0$；

4）$\lambda_1\tilde{\beta}_1\oplus\lambda_2\tilde{\beta}_1=(\lambda_1+\lambda_2)\tilde{\beta}_1$，$\lambda_1,\lambda_2\geqslant 0$。

按照定义5，有

$$\langle[a,b,c,d];[1,1],[0,0]\rangle\oplus\langle[a,b,c,d];[0,0],[1,1]\rangle=\\ \langle[2a,2b,2c,2d];[0.5,0.5],[0.5,0.5]\rangle,$$

$$\langle[a,b,c,d];[0.5,0.5],[0.3,0.3]\rangle\oplus\\ \langle[a,b,c,d];[0.4,0.4],[0.2,0.2]\rangle=\\ \langle[2a,2b,2c,2d];[0.45,0.45],[0.25,0.25]\rangle。$$

显然，这些结果比较符合人们的直觉，故定义5中IVITFN的运算法则比定义4的运算法则更合理。

2　IVITFN的算术集成算子

为便于对IVITFN信息进行集成，基于定义5给出的IVITFN的运算法则，以下给出IVITFN的3种算术集成算子，即IVITFN的加权算术平均（interval-valued intuitionistic trapezoidal fuzzy number weighted arithmetic averaging，IVITFNWAA）算子、IVITFN的有序加权平均（interval-valued intuitionistic trapezoidal fuzzy number ordered weighted averaging，IVITFNOWA）算子和IVITFN的混合集成（interval-valued intuitionistic trapezoidal fuzzy number hybrid aggregation，IVITFNHA）算子。

定义6　设$\tilde{\beta}_j=\langle[a_j,b_j,c_j,d_j];[\mu_j^-,\mu_j^+],[v_j^-,v_j^+]\rangle$ $(j=1,2,\cdots,n)$为一组IVITFN，且设IVITFNWAA：$\Theta^n\to\Theta$，若

$$\mathrm{IVITFNWAA}_w\left(\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2,\cdots,\tilde{\beta}_n\right)= w_1\tilde{\beta}_1\oplus w_2\tilde{\beta}_2\oplus\cdots\oplus w_n\tilde{\beta}_n, \tag{4}$$

式中 $\boldsymbol{w}=\left(w_1,w_2,\cdots,w_n\right)^{\mathrm{T}}$ 为 $\tilde{\beta}_j\,(j=1,2,\cdots,n)$ 的加权向量，$w_j\in[0,1]\ (j=1,2,\cdots,n)$, $\sum_{j=1}^{n}w_j=1$，则称函数IVITFNWAA为IVITFN的加权算术平均算子，简称为IVITFNWAA算子。特别地，若$\boldsymbol{w}=\left(1/n,1/n,\cdots,1/n\right)^{\mathrm{T}}$，则相应的IVITFNWAA算子退化为IVITFN的算术平均（IVITFNAA）算子

$$\mathrm{IVITFNWAA}_w\left(\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2,\cdots,\tilde{\beta}_n\right)= \frac{1}{n}\left(\tilde{\beta}_1\oplus\tilde{\beta}_2\oplus\cdots\oplus\tilde{\beta}_n\right)。 \tag{5}$$

根据定义5，对式（4）进一步推导，可得：

定理1 设$\tilde{\beta}_j=\left\langle\left[a_j,b_j,c_j,d_j\right];\left[\mu_j^-,\mu_j^+\right],\left[v_j^-,v_j^+\right]\right\rangle$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 为一组IVITFN，$\boldsymbol{w}=\left(w_1,w_2,\cdots,w_n\right)^{\mathrm{T}}$ 为 $\tilde{\beta}_j\,(j=1,2,\cdots,n)$ 的加权向量，$w_j\in[0,1]\ (j=1,2,\cdots,n)$，$\sum_{j=1}^{n}w_j=1$，则由式（4）集成得到的结果仍为IVITFN，并且

$$\mathrm{IVITFNWAA}_w\left(\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2,\cdots,\tilde{\beta}_n\right)= \left\langle\left[\sum_{j=1}^{n}w_ja_j,\sum_{j=1}^{n}w_jb_j,\sum_{j=1}^{n}w_jc_j,\sum_{j=1}^{n}w_jd_j\right]; \left[\frac{\sum_{j=1}^{n}w_jA\left(\tilde{\beta}_j\right)\mu_j^-}{\sum_{j=1}^{n}w_jA\left(\tilde{\beta}_j\right)},\frac{\sum_{j=1}^{n}w_jA\left(\tilde{\beta}_j\right)\mu_j^+}{\sum_{j=1}^{n}w_jA\left(\tilde{\beta}_j\right)}\right], \left[\frac{\sum_{j=1}^{n}w_jA\left(\tilde{\beta}_j\right)v_j^-}{\sum_{j=1}^{n}w_jA\left(\tilde{\beta}_j\right)},\frac{\sum_{j=1}^{n}w_jA\left(\tilde{\beta}_j\right)v_j^+}{\sum_{j=1}^{n}w_jA\left(\tilde{\beta}_j\right)}\right]\right\rangle。 \tag{6}$$

证明 显然，由式（4）集成得到的结果仍为IVITFN。下面用数学归纳法证明式（6）。

1）当n=2时，由于

$$w_1\tilde{\beta}_1=\left\langle\left[w_1a_1,w_1b_1,w_1c_1,w_1d_1\right];\left[\mu_1^-,\mu_1^+\right],\left[v_1^-,v_1^+\right]\right\rangle;$$
$$w_2\tilde{\beta}_2=\left\langle\left[w_2a_2,w_2b_2,w_2c_2,w_2d_2\right];\left[\mu_2^-,\mu_2^+\right],\left[v_2^-,v_2^+\right]\right\rangle;$$
$$A\left(w_j\tilde{\beta}_j\right)=\frac{w_ja_j+w_jb_j+w_jc_j+w_jd_j}{4}=w_jA\left(\tilde{\beta}_j\right),\quad j=1,2,\cdots,n。$$

则$\mathrm{IVITFNWAA}_w\left(\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2\right)=w_1\tilde{\beta}_1\oplus w_2\tilde{\beta}_2=$

$$\left\langle\left[w_1a_1+w_2a_2,w_1b_1+w_2b_2,w_1c_1+w_2c_2,w_1d_1+w_2d_2\right]; \left[\frac{A\left(w_1\tilde{\beta}_1\right)\mu_1^-+A\left(w_2\tilde{\beta}_2\right)\mu_2^-}{A\left(w_1\tilde{\beta}_1\right)+A\left(w_2\tilde{\beta}_2\right)},\frac{A\left(w_1\tilde{\beta}_1\right)\mu_1^++A\left(w_2\tilde{\beta}_2\right)\mu_2^+}{A\left(w_1\tilde{\beta}_1\right)+A\left(w_2\tilde{\beta}_2\right)}\right], \left[\frac{A\left(w_1\tilde{\beta}_1\right)v_1^-+A\left(w_2\tilde{\beta}_2\right)v_2^-}{A\left(w_1\tilde{\beta}_1\right)+A\left(w_2\tilde{\beta}_2\right)},\frac{A\left(w_1\tilde{\beta}_1\right)v_1^++A\left(w_2\tilde{\beta}_2\right)v_2^+}{A\left(w_1\tilde{\beta}_1\right)+A\left(w_2\tilde{\beta}_2\right)}\right]\right\rangle=$$

$$\left\langle\left[\sum_{j=1}^{2}w_ja_j,\sum_{j=1}^{2}w_jb_j,\sum_{j=1}^{2}w_jc_j,\sum_{j=1}^{2}w_jd_j\right]; \left[\frac{\sum_{j=1}^{2}w_jA\left(\tilde{\beta}_j\right)\mu_j^-}{\sum_{j=1}^{2}w_jA\left(\tilde{\beta}_j\right)},\frac{\sum_{j=1}^{2}w_jA\left(\tilde{\beta}_j\right)\mu_j^+}{\sum_{j=1}^{2}w_jA\left(\tilde{\beta}_j\right)}\right], \left[\frac{\sum_{j=1}^{2}w_jA\left(\tilde{\beta}_j\right)v_j^-}{\sum_{j=1}^{2}w_jA\left(\tilde{\beta}_j\right)},\frac{\sum_{j=1}^{2}w_jA\left(\tilde{\beta}_j\right)v_j^+}{\sum_{j=1}^{2}w_jA\left(\tilde{\beta}_j\right)}\right]\right\rangle。$$

2）假设当n=k时，式（6）成立，即

$$\mathrm{IVITFNWAA}_w\left(\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2,\cdots,\tilde{\beta}_k\right)= \left\langle\left[\sum_{j=1}^{k}w_ja_j,\sum_{j=1}^{k}w_jb_j,\sum_{j=1}^{k}w_jc_j,\sum_{j=1}^{k}w_jd_j\right]; \left[\frac{\sum_{j=1}^{k}w_jA\left(\tilde{\beta}_j\right)\mu_j^-}{\sum_{j=1}^{k}w_jA\left(\tilde{\beta}_j\right)},\frac{\sum_{j=1}^{k}w_jA\left(\tilde{\beta}_j\right)\mu_j^+}{\sum_{j=1}^{k}w_jA\left(\tilde{\beta}_j\right)}\right], \left[\frac{\sum_{j=1}^{k}w_jA\left(\tilde{\beta}_j\right)v_j^-}{\sum_{j=1}^{k}w_jA\left(\tilde{\beta}_j\right)},\frac{\sum_{j=1}^{k}w_jA\left(\tilde{\beta}_j\right)v_j^+}{\sum_{j=1}^{k}w_jA\left(\tilde{\beta}_j\right)}\right]\right\rangle。$$

则当n=k+1时，由定义5可得：

$$\mathrm{IVITFNWAA}_w\left(\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2,\cdots,\tilde{\beta}_k,\tilde{\beta}_{k+1}\right)= \mathrm{IVITFNWAA}_w\left(\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2,\cdots,\tilde{\beta}_k\right)\oplus w_{k+1}\tilde{\beta}_{k+1}=$$

$$\left\langle\left[\sum_{j=1}^{k}w_ja_j,\sum_{j=1}^{k}w_jb_j,\sum_{j=1}^{k}w_jc_j,\sum_{j=1}^{k}w_jd_j\right]; \left[\frac{\sum_{j=1}^{k}w_jA\left(\tilde{\beta}_j\right)\mu_j^-}{\sum_{j=1}^{k}w_jA\left(\tilde{\beta}_j\right)},\frac{\sum_{j=1}^{k}w_jA\left(\tilde{\beta}_j\right)\mu_j^+}{\sum_{j=1}^{k}w_jA\left(\tilde{\beta}_j\right)}\right], \left[\frac{\sum_{j=1}^{k}w_jA\left(\tilde{\beta}_j\right)v_j^-}{\sum_{j=1}^{k}w_jA\left(\tilde{\beta}_j\right)},\frac{\sum_{j=1}^{k}w_jA\left(\tilde{\beta}_j\right)v_j^+}{\sum_{j=1}^{k}w_jA\left(\tilde{\beta}_j\right)}\right]\right\rangle\oplus$$

$$\left\langle\left[w_{k+1}a_{k+1},w_{k+1}b_{k+1},w_{k+1}c_{k+1},w_{k+1}d_{k+1}\right];\left[\mu_1^-,\mu_1^+\right],\left[v_1^-,v_1^+\right]\right\rangle=$$

$$\left\langle\left[\sum_{j=1}^{k}w_ja_j+w_{k+1}a_{k+1},\sum_{j=1}^{k}w_jb_j+w_{k+1}b_{k+1},\sum_{j=1}^{k}w_jc_j+w_{k+1}c_{k+1},\sum_{j=1}^{k}w_jd_j+w_{k+1}d_{k+1}\right];\right.$$

$$\left[\frac{\sum_{j=1}^{k}w_jA(\tilde\beta_j)\mu_j^-+A(w_{k+1}\tilde\beta_{k+1})\mu_{k+1}^-}{\sum_{j=1}^{k}w_jA(\tilde\beta_j)+A(w_{k+1}\tilde\beta_{k+1})},\frac{\sum_{j=1}^{k}w_jA(\tilde\beta_j)\mu_j^++A(w_{k+1}\tilde\beta_{k+1})\mu_{k+1}^+}{\sum_{j=1}^{k}w_jA(\tilde\beta_j)+A(w_{k+1}\tilde\beta_{k+1})}\right],$$

$$\left.\left[\frac{\sum_{j=1}^{k}w_jA(\tilde\beta_j)v_j^-+A(w_{k+1}\tilde\beta_{k+1})v_{k+1}^-}{\sum_{j=1}^{k}w_jA(\tilde\beta_j)+A(w_{k+1}\tilde\beta_{k+1})},\frac{\sum_{j=1}^{k}w_jA(\tilde\beta_j)v_j^++A(w_{k+1}\tilde\beta_{k+1})v_{k+1}^+}{\sum_{j=1}^{k}w_jA(\tilde\beta_j)+A(w_{k+1}\tilde\beta_{k+1})}\right]\right\rangle=$$

$$\left\langle\left[\sum_{j=1}^{k+1}w_ja_j,\sum_{j=1}^{k+1}w_jb_j,\sum_{j=1}^{k+1}w_jc_j,\sum_{j=1}^{k+1}w_jd_j\right];\left[\frac{\sum_{j=1}^{k+1}w_jA(\tilde\beta_j)\mu_j^-}{\sum_{j=1}^{k+1}w_jA(\tilde\beta_j)},\frac{\sum_{j=1}^{k+1}w_jA(\tilde\beta_j)\mu_j^+}{\sum_{j=1}^{k+1}w_jA(\tilde\beta_j)}\right],\left[\frac{\sum_{j=1}^{k+1}w_jA(\tilde\beta_j)v_j^-}{\sum_{j=1}^{k+1}w_jA(\tilde\beta_j)},\frac{\sum_{j=1}^{k+1}w_jA(\tilde\beta_j)v_j^+}{\sum_{j=1}^{k+1}w_jA(\tilde\beta_j)}\right]\right\rangle。$$

即当$n=k+1$时，式（6）成立。

综合1）和2）可知，对一切$n\in\mathbf{N}$，式（6）成立。

注：IVITFNWAA算子改进了文献[15]中提出的IVITFN的加权算术平均算子，同时将IVITFNWAA算子应用于文献[15]的实例中，得到了同样的结果，可知IVITFNWAA算子是有效的。

定义7　设

$$\tilde\beta_j=\left\langle\left[a_j,b_j,c_j,d_j\right];\left[\mu_j^-,\mu_j^+\right],\left[v_j^-,v_j^+\right]\right\rangle(j=1,2,\cdots,n)$$

为一组IVITFN，且设IVITFNOWA: $\Theta^n\to\Theta$，若

$$\text{IVITFNWAA}_{\omega}\left(\tilde\beta_1,\tilde\beta_2,\cdots,\tilde\beta_n\right)=\omega_1\tilde\beta_{\tau(1)}\oplus\omega_2\tilde\beta_{\tau(2)}\oplus\cdots\oplus\omega_n\tilde\beta_{\tau(n)}\text{，}\tag{7}$$

式中：$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm T}$是与函数IVITFNOWA相关联的加权向量，$\omega_j\in[0,1]\ (j=1,2,\cdots,n),\ \sum_{j=1}^{n}\omega_j=1$；

$(\tau(1),\tau(2),\cdots,\tau(n))$是$(1,2,\cdots,n)$的一个置换，使得对任意$j$，都有$\tilde\beta_{\tau(j-1)}\geqslant\tilde\beta_{\tau(j)}$。

则称函数IVITFNOWA为IVITFN的有序加权平均算子，简称为IVITFNOWA算子。特别地，若$\boldsymbol{\omega}=(1/n,1/n,\cdots,1/n)^{\mathrm T}$，则相应的IVITFNOWA算子退化为IVITFN的算术平均（IVITFNAA）算子。

定理2　设

$$\tilde\beta_j=\left\langle\left[a_j,b_j,c_j,d_j\right];\left[\mu_j^-,\mu_j^+\right],\left[v_j^-,v_j^+\right]\right\rangle(j=1,2,\cdots,n)$$

为一组IVITFN，则由式（7）集成得到的结果仍为IVITFN，且

$$\text{IVITFNOWA}_{\omega}\left(\tilde\beta_1,\tilde\beta_2,\cdots,\tilde\beta_n\right)=\left\langle\left[\sum_{j=1}^{n}\omega_ja_{\tau(j)},\sum_{j=1}^{n}\omega_jb_{\tau(j)},\sum_{j=1}^{n}\omega_jc_{\tau(j)},\sum_{j=1}^{n}\omega_jd_{\tau(j)}\right];\left[\frac{\sum_{j=1}^{n}\omega_jA(\tilde\beta_{\tau(j)})\mu_{\tau(j)}^-}{\sum_{j=1}^{n}\omega_jA(\tilde\beta_{\tau(j)})},\frac{\sum_{j=1}^{n}\omega_jA(\tilde\beta_{\tau(j)})\mu_{\tau(j)}^+}{\sum_{j=1}^{n}\omega_jA(\tilde\beta_{\tau(j)})}\right],\left[\frac{\sum_{j=1}^{n}\omega_jA(\tilde\beta_{\tau(j)})v_{\tau(j)}^-}{\sum_{j=1}^{n}\omega_jA(\tilde\beta_{\tau(j)})},\frac{\sum_{j=1}^{n}\omega_jA(\tilde\beta_{\tau(j)})v_{\tau(j)}^+}{\sum_{j=1}^{n}\omega_jA(\tilde\beta_{\tau(j)})}\right]\right\rangle。\tag{8}$$

IVITFNOWA算子的特点是，对

$$\text{IVITFN}\tilde\beta_j=\left\langle\left[a_j,b_j,c_j,d_j\right];\left[\mu_j^-,\mu_j^+\right],\left[v_j^-,v_j^+\right]\right\rangle$$

$(j=1,2,\cdots,n)$，

按从大到小的顺序重新排序后加权集成，且ω_j只与集成过程中的第j位置有关，与元素$\tilde\beta_j$没有任何联系。有关IVITFNOWA算子的加权向量$\boldsymbol{\omega}$，文献[18]已对目前主要的赋权方法进行了综述，并给出了一种基于正态分布的赋权法。

由于IVITFNWAA算子仅考虑了每个IVITFN自身的重要性程度，IVITFNOWA算子仅对每个IVITFN所在的位置进行赋权，二者均有一定的片面性。为克服此缺陷，下面给出IVITFN的混合集成算子。

定义8　设

$$\tilde\beta_j=\left\langle\left[a_j,b_j,c_j,d_j\right];\left[\mu_j^-,\mu_j^+\right],\left[v_j^-,v_j^+\right]\right\rangle(j=1,2,\cdots,n)$$

为一组IVITFN，且设IVITFNHA: $\Theta^n\to\Theta$，若

$$\text{IVITFNHA}_{w,\omega}\left(\tilde\beta_1,\tilde\beta_2,\cdots,\tilde\beta_n\right)=\omega_1\tilde\beta'_{\tau(1)}\oplus\omega_2\tilde\beta'_{\tau(2)}\oplus\cdots\oplus\omega_n\tilde\beta'_{\tau(n)},\tag{9}$$

式中：$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$是与函数IVITFNHA相关联的加权向量，$\omega_j\in[0,1]\ (j=1,2,\cdots,n)$, $\sum_{j=1}^{n}\omega_j=1$；

$\tilde{\beta}'_{\tau(j)}$是加权的IVITFN组$\left(nw_1\tilde{\beta}_1,nw_2\tilde{\beta}_2,\cdots,nw_n\tilde{\beta}_n\right)$中第$j$个最大的元素，这里$\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$是IVITFN组$\tilde{\beta}_j\ (j=1,2,\cdots,n)$的加权向量，$w_j\in[0,1]\ (j=1,2,\cdots,n)$，$\sum_{j=1}^{n}w_j=1$，且$n$是平衡因子。

则称函数IVITFNHA为IVITFN的混合集成算子，简称为IVITFNHA算子。

定理3 设

$$\tilde{\beta}_j=\left\langle\left[a_j,b_j,c_j,d_j\right];\left[\mu_j^-,\mu_j^+\right],\left[v_j^-,v_j^+\right]\right\rangle (j=1,2,\cdots,n)$$

为一组IVITFN，

$$\tilde{\beta}'_{\tau(j)}=\left\langle\left[a'_{\tau(j)},b'_{\tau(j)},c'_{\tau(j)},d'_{\tau(j)}\right];\left[\left(\mu_{\tau(j)}^-\right)',\left(\mu_{\tau(j)}^+\right)'\right],\left[\left(v_{\tau(j)}^-\right)',\left(v_{\tau(j)}^+\right)'\right]\right\rangle,$$

则由式（9）集成得到的结果仍为IVITFN，且有

$$\mathrm{IVITFNWAA}_{w,\omega}\left(\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2,\cdots,\tilde{\beta}_n\right)=\left\langle\left[\sum_{j=1}^{n}\omega_j a'_{\tau(j)},\sum_{j=1}^{n}\omega_j b'_{\tau(j)},\sum_{j=1}^{n}\omega_j c'_{\tau(j)},\sum_{j=1}^{n}\omega_j d'_{\tau(j)}\right];\right.$$
$$\left[\frac{\sum_{j=1}^{n}\omega_j A\left(\tilde{\beta}'_{\tau(j)}\right)\left(\mu_{\tau(j)}^-\right)'}{\sum_{j=1}^{n}\omega_j A\left(\tilde{\beta}'_{\tau(j)}\right)},\frac{\sum_{j=1}^{n}\omega_j A\left(\tilde{\beta}'_{\tau(j)}\right)\left(\mu_{\tau(j)}^+\right)'}{\sum_{j=1}^{n}\omega_j A\left(\tilde{\beta}'_{\tau(j)}\right)}\right],$$
$$\left.\left[\frac{\sum_{j=1}^{n}\omega_j A\left(\tilde{\beta}'_{\tau(j)}\right)\left(v_{\tau(j)}^-\right)'}{\sum_{j=1}^{n}\omega_j A\left(\tilde{\beta}'_{\tau(j)}\right)},\frac{\sum_{j=1}^{n}\omega_j A\left(\tilde{\beta}'_{\tau(j)}\right)\left(v_{\tau(j)}^+\right)'}{\sum_{j=1}^{n}\omega_j A\left(\tilde{\beta}'_{\tau(j)}\right)}\right]\right\rangle。 \tag{10}$$

定理4 IVITFNWAA算子是IVITFNHA算子的特例；IVITFNOWA算子也是IVITFNHA算子的特例。

证明 在IVITFNHA算子中令$\boldsymbol{\omega}=(1/n,1/n,\cdots,1/n)^{\mathrm{T}}$和$\boldsymbol{w}=(1/n,1/n,\cdots,1/n)^{\mathrm{T}}$即可。

显然，IVITFNHA算子同时推广了IVITFNWAA算子和IVITFNOWA算子，它不仅体现了IVITFN自身的重要性，而且还反映了IVITFN所在位置的重要性程度。

3 基于IVITFN的群决策方法

基于以上分析，利用IVITFNWAA算子和IVITFNHA算子，下面给出一种群体决策情形下准则值为IVITFN，且准则权重确知的群决策方法。

对于某模糊群决策问题，设$A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$为方案集；$I=\{I_1,I_2,\cdots,I_n\}$为准则集，相应的准则权重为，$\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$，$w_j\in[0,1]\ (j=1,2,\cdots,n)$，$\sum_{j=1}^{n}w_j=1$ ；$D=\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$ 为决策者集；$\boldsymbol{e}=(e_1,e_2,\cdots,e_p)^{\mathrm{T}}$为决策者的权重向量，$e_t\in[0,1]$，$\sum_{t=1}^{p}e_t=1$。

设决策者d_t给出方案A_i在准则I_j下的准则值为$\tilde{\beta}_{ij}^{(t)}$，得到的决策矩阵记为

$$\boldsymbol{R}^{(t)}=\left(\tilde{\beta}_{ij}^{(t)}\right)_{m\times n},$$
$$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n;\ t=1,2,\cdots,p),$$

式中$\tilde{\beta}_{ij}^{(t)}=\left\langle\left[h_{ij}^{1(t)},h_{ij}^{2(t)},h_{ij}^{3(t)},h_{ij}^{4(t)}\right];\left[\mu_{ij}^{-(t)},\mu_{ij}^{+(t)}\right],\left[v_{ij}^{-(t)},v_{ij}^{+(t)}\right]\right\rangle$为IVITFN，其中$\mu_{ij}^{-(t)},v_{ij}^{-(t)}\geqslant 0$, $\mu_{ij}^{+(t)}+v_{ij}^{+(t)}\leqslant 1$, $\left[\mu_{ij}^{-(t)},\mu_{ij}^{+(t)}\right]$表示由决策者$d_t$给出的方案$A_i$在准则$I_j$下属于梯形模糊数$\left[h_{ij}^{1(t)},h_{ij}^{2(t)},h_{ij}^{3(t)},h_{ij}^{4(t)}\right]$的程度区间，$\left[v_{ij}^{-(t)},v_{ij}^{+(t)}\right]$表示由决策者$d_t$给出的方案$A_i$在准则$I_j$下不属于梯形模糊数$\left[h_{ij}^{1(t)},h_{ij}^{2(t)},h_{ij}^{3(t)},h_{ij}^{4(t)}\right]$的程度区间。试确定方案的排序。

上述问题的决策步骤如下：

Step1 利用文献[15]的方法规范化决策矩阵的梯形模糊数$\left[h_{ij}^{1(t)},h_{ij}^{2(t)},h_{ij}^{3(t)},h_{ij}^{4(t)}\right]$为$\left[r_{ij}^{1(t)},r_{ij}^{2(t)},r_{ij}^{3(t)},r_{ij}^{4(t)}\right]$ $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$。不妨将规范化后的IVITFN仍记为$\tilde{\beta}_{ij}^{(t)}$，决策矩阵也记为$\boldsymbol{R}^{(t)}=\left(\tilde{\beta}_{ij}^{(t)}\right)_{m\times n}$。

Step2 利用IVITFNWAA算子

$$\tilde{\beta}_i^{(t)}=\mathrm{IITFNWAA}_w\left(\tilde{\beta}_{i1}^{(t)},\tilde{\beta}_{i2}^{(t)},\cdots,\tilde{\beta}_{in}^{(t)}\right) \tag{11}$$

对决策矩阵$\boldsymbol{R}^{(t)}=\left(\tilde{\beta}_{ij}^{(t)}\right)_{m\times n}$中第$i$行的准则值进行加权集成，得到决策者$d_t$所给出的方案$A_i$的综合准则值$\tilde{\beta}_i^{(t)}$ $(i=1,2,\cdots,m;\ t=1,2,\cdots,p)$。

Step3 利用IVITFNHA算子

$$\tilde{\beta}_i=\mathrm{IITFNHA}_{e,\omega}\left(\tilde{\beta}_i^{(1)},\tilde{\beta}_i^{(2)},\cdots,\tilde{\beta}_i^{(p)}\right)=\omega_1\left(\tilde{\beta}_i^{\prime(\sigma(1))}\right)\oplus\omega_2\left(\tilde{\beta}_i^{\prime(\sigma(2))}\right)\oplus\cdots\oplus\omega_p\left(\tilde{\beta}_i^{\prime(\sigma(p))}\right) \tag{12}$$

对p位决策者给出的方案A_i的综合准则值$\tilde{\beta}_i^{(t)}$ $(t=1,2,\cdots,p)$进行集成，得到方案A_i的群体综合准则值$\tilde{\beta}_i\ (i=1,2,\cdots,m)$。式中，$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm{T}}$是与IVITFNHA算子相关联的加权向量，$\omega_t\in[0,1]$，

$\sum_{j=1}^{n}\omega_t=1$；$\tilde{\beta}_i^{\prime(\sigma(t))}$ 是加权的 IVITFN 组 $\left(pe_1\tilde{\beta}_i^{(1)},pe_2\tilde{\beta}_i^{(2)},\cdots,pe_p\tilde{\beta}_i^{(p)}\right)$ 中第 t 个最大的元素，$(\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(p))$ 是 $(1,2,\cdots,p)$ 的一个置换，p 是平衡因子，$\boldsymbol{e}=\left(e_1,e_2,\cdots,e_p\right)^{\mathrm{T}}$ 为决策者的权重向量，$e_t\in[0,1]$，$\sum_{t=1}^{p}e_t=1$。

Step4　利用式（2）和（3）分别计算方案 A_i 的记分函数值 $S\left(\tilde{\beta}_i\right)$ 和精确函数值 $H\left(\tilde{\beta}_i\right)$ $(i=1,2,\cdots,m)$。

Step5　根据定义 3 对方案 A_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 进行排序，并选择最优方案。

4　实例分析

某个风险投资公司进行项目投资，有 4 个备选企业 A_i (i=1,2,3,4)，3 个一级评估准则：获利能力 I_1、竞争能力 I_2 和风险承担能力 I_3，准则权重为 $\boldsymbol{w}=\left(0.37,0.35,0.28\right)^{\mathrm{T}}$。现有 3 个专家 d_t (t=1,2,3)，已知专家权重为 $\boldsymbol{e}=\left(0.4,0.3,0.3\right)^{\mathrm{T}}$，依照评估标准对 4 个备选企业 A_i (i=1,2,3,4) 进行评估，经过统计处理后的各准则下的评估信息用 IVITFN 表示（由于所有指标的量纲一致，不把决策矩阵规范化），决策矩阵见表 1~3，试确定最佳投资企业。

表 1　决策矩阵 $\boldsymbol{R}^{(1)}$

Table 1　Decision matrix $\boldsymbol{R}^{(1)}$

企业	准则		
	I_1	I_2	I_3
A_1	$\langle[5,6,7,8];[0.8,0.9],[0.1,0.1]\rangle$	$\langle[8,9,9,10];[0.7,0.8],[0.1,0.2]\rangle$	$\langle[6,7,7,8];[0.7,0.8],[0.1,0.2]\rangle$
A_2	$\langle[4,5,6,7];[0.7,0.8],[0.1,0.2]\rangle$	$\langle[7,8,8,9];[0.6,0.7],[0.2,0.3]\rangle$	$\langle[7,7,7,7];[0.8,0.9],[0.1,0.1]\rangle$
A_3	$\langle[6,7,8,9];[0.6,0.7],[0.2,0.3]\rangle$	$\langle[7,9,9,10];[0.7,0.8],[0.1,0.2]\rangle$	$\langle[8,9,9,10];[0.6,0.7],[0.1,0.2]\rangle$
A_4	$\langle[5,6,7,9];[0.7,0.8],[0.1,0.2]\rangle$	$\langle[8,8,8,8];[0.8,0.9],[0.1,0.1]\rangle$	$\langle[7,8,8,9];[0.6,0.8],[0.1,0.2]\rangle$

表 2　决策矩阵 $\boldsymbol{R}^{(2)}$

Table 2　Decision matrix $\boldsymbol{R}^{(2)}$

企业	准则		
	I_1	I_2	I_3
A_1	$\langle[6,7,8,9];[0.8,0.9],[0.1,0.1]\rangle$	$\langle[7,8,8,9];[0.6,0.7],[0.1,0.1]\rangle$	$\langle[7,7,7,7];[0.7,0.8],[0.1,0.2]\rangle$
A_2	$\langle[5,6,7,8];[0.6,0.7],[0.1,0.2]\rangle$	$\langle[8,8,9,9];[0.7,0.8],[0.2,0.2]\rangle$	$\langle[8,8,8,8];[0.8,0.9],[0.1,0.1]\rangle$
A_3	$\langle[5,7,8,9];[0.7,0.8],[0.1,0.2]\rangle$	$\langle[8,8,9,9];[0.8,0.9],[0.1,0.1]\rangle$	$\langle[7,8,8,9];[0.6,0.7],[0.2,0.3]\rangle$
A_4	$\langle[6,6,7,9];[0.6,0.8],[0.2,0.2]\rangle$	$\langle[9,9,9,9];[0.7,0.8],[0.1,0.2]\rangle$	$\langle[6,7,7,8];[0.6,0.8],[0.1,0.1]\rangle$

表 3　决策矩阵 $\boldsymbol{R}^{(3)}$

Table 3　Decision matrix $\boldsymbol{R}^{(3)}$

企业	准则		
	I_1	I_2	I_3
A_1	$\langle[5,6,7,8];[0.7,0.8],[0.1,0.2]\rangle$	$\langle[6,8,8,9];[0.6,0.7],[0.1,0.3]\rangle$	$\langle[8,8,8,8];[0.8,0.8],[0.2,0.2]\rangle$
A_2	$\langle[6,7,8,9];[0.8,0.9],[0.1,0.1]\rangle$	$\langle[6,7,7,8];[0.5,0.7],[0.2,0.3]\rangle$	$\langle[6,7,7,8];[0.7,0.8],[0.1,0.2]\rangle$
A_3	$\langle[4,6,7,8];[0.5,0.6],[0.3,0.4]\rangle$	$\langle[7,8,8,9];[0.6,0.7],[0.1,0.3]\rangle$	$\langle[6,8,9,9];[0.5,0.7],[0.2,0.3]\rangle$
A_4	$\langle[7,8,8,9];[0.8,0.9],[0.1,0.1]\rangle$	$\langle[7,7,7,7];[0.8,0.8],[0.2,0.2]\rangle$	$\langle[5,6,8,9];[0.7,0.8],[0.1,0.2]\rangle$

下面利用本文提出的群决策方法求解。

Step1　利用 IVITFNWAA 算子，即式（11）对决策矩阵中 $\boldsymbol{R}^{(t)}=\left(\tilde{\beta}_{ij}^{(t)}\right)_{m\times n}$ 第 i 行的准则值进行加权集成，得到决策者 d_t 所给出的方案 A_i 的综合准则值 $\tilde{\beta}_i^{(t)}$ $(i=1,2,3,4$；$t=1,2,3)$。

$$\tilde{\beta}_1^{(1)}=\langle[6.33,7.33,7.70,8.70];[0.732\,0,0.832\,0],[0.100\,0,0.167\,0]\rangle,$$

$$\tilde{\beta}_2^{(1)}=\langle[5.89,6.61,6.98,7.70];[0.687\,6,0.787\,6],[0.141\,2,0.212\,4]\rangle,$$

$$\tilde{\beta}_3^{(1)}=\langle[6.91,8.26,8.63,9.63];[0.636\,6,0.736\,6],[0.133\,2,0.233\,2]\rangle,$$

$$\tilde{\beta}_4^{(1)}=\langle[6.61,7.26,7.63,8.65];[0.707\,4,0.837\,1],[0.100\,0,0.162\,9]\rangle,$$

$$\tilde{\beta}_1^{(2)}=\langle[6.63,7.35,7.72,8.44];[0.699\,7,0.799\,7],[0.100\,0,0.126\,0]\rangle,$$

$\tilde{\beta}_2^{(2)} = \langle[6.89,7.26,7.98,8.35];[0.697\,8,0.797\,8],[0.139\,0,0.170\,6]\rangle$,

$\tilde{\beta}_3^{(2)} = \langle[6.61,7.63,8.35,9.00];[0.709\,3,0.809\,3],[0.128\,4,0.190\,7]\rangle$,

$\tilde{\beta}_4^{(2)} = \langle[7.05,7.33,7.70,8.72];[0.640\,9,0.800\,0],[0.133\,6,0.174\,5]\rangle$,

$\tilde{\beta}_1^{(3)} = \langle[6.19,7.26,7.63,8.35];[0.693\,6,0.763\,1],[0.130\,4,0.236\,9]\rangle$,

$\tilde{\beta}_2^{(3)} = \langle[6.00,7.00,7.37,8.37];[0.670\,4,0.804\,5],[0.134\,1,0.195\,5]\rangle$,

$\tilde{\beta}_3^{(3)} = \langle[5.61,7.26,7.91,8.63];[0.538\,1,0.668\,5],[0.193\,4,0.331\,5]\rangle$,

$\tilde{\beta}_4^{(3)} = \langle[6.44,7.09,7.65,8.30];[0.773\,4,0.840\,2],[0.133\,2,0.159\,8]\rangle$,

Step 2 利用IVITFNHA算子，即式（12）对3位决策者给出的方案A_i的综合准则值$\tilde{\beta}_i^{(t)}(t=1,2,3)$进行集成，从而得到方案$A_i$的群体综合准则值$\tilde{\beta}_i(i=1,2,3,4)$，其中IVITFNHA算子的加权向量可根据文献[18]中基于正态分布的赋权方法确定为$\boldsymbol{\omega}=(0.242\,9,0.514\,2,0.242\,9)^{\mathrm{T}}$。

$\tilde{\beta}_1 = \langle[6.266\,5,7.125\,1,7.485\,1,8.267\,1];[0.708\,0,0.801\,3],[0.106\,7,0.163\,1]\rangle$,

$\tilde{\beta}_2 = \langle[6.217\,0,6.816\,7,7.338\,7,7.938\,4];[0.688\,9,0.796\,5],[0.138\,6,0.187\,8]\rangle$,

$\tilde{\beta}_3 = \langle[6.299\,5,7.525\,7,8.108\,9,8.858\,6];[0.650\,6,0.756\,9],[0.143\,5,0.233\,5]\rangle$,

$\tilde{\beta}_4 = \langle[6.448\,2,6.999\,7,7.447\,6,8.268\,7];[0.722\,9,0.830\,0],[0.123\,3,0.164\,1]\rangle$,

Step3 利用式（2）计算方案A_i的记分函数值：

$$S(\tilde{\beta}_1)=4.515\,6,\ S(\tilde{\beta}_2)=4.101\,5,$$
$$S(\tilde{\beta}_3)=3.966\,4,\ S(\tilde{\beta}_4)=4.613\,2。$$

Step4 根据定义3对方案进行排序，有$A_4 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_3$，因此，最佳投资企业为$A_4$。

5 结语

针对现有文献中关于IVITFN的加性的运算法则存在的缺陷，本文定义了新的IVITFN的加性运算法则，并基于这些运算法则，改进了文献[15]中提出的IVITFN的加权算术平均算子，且另外提出了2种新的IVITFN的算术集成算子，即IVITFNOWA算子和IVITFNHA算子，进而基于IVITFNWAA算子和IVITFNHA算子，提出了一种准则值为IVITFN而准则权重确知的群决策方法。该方法可广泛应用于供应链选择、投资决策、项目评估以及经济效益综合评价等相关决策中。值得指出的是，IVITFNWAA算子仅考虑了每个IVITFN自身的重要性程度，IVITFNOWA算子仅对每个IVITFN所在的位置进行赋权，而IVITFNHA算子则同时推广了IVITFNWAA算子和IVITFNOWA算子，它不仅体现了IVITFN自身的重要性程度，而且还反映了IVITFN所在位置的重要性程度。将IVITFNHA算子应用于群决策中，能在一定程度上消除不公正因素的影响，并增加中间值的作用（一般是对过高或过低的方案综合准则值赋予较小的权重），从而增强决策结果的合理性。

参考文献：

[1] Atanassov K T. Intuitionistic Fuzzy Sets[J]. Fuzzy Sets and Systems，1986，20(1)：87-96.

[2] Zadeh L A. Fuzzy Sets[J]. Information and Control，1965，8(3)：338-356.

[3] Atanassov K T. Intuitionistic Fuzzy Sets: Theory and Applications[M]. Heidelberg：Physica-Verlag，1999：1-189.

[4] 徐泽水. 直觉模糊信息集成理论及应用[M]. 北京：科学出版社，2008：1-214.
Xu Zeshui. Intuitionistic Fuzzy Information: Aggregation Theory and Application[M]. Beijing：Science Press，2008：1-214.

[5] Xu Z S. Intuitionistic Fuzzy Aggregation Operators[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems，2007，15(6)：1179-1187.

[6] Atanassov K T，Gargov G. Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Sets[J]. Fuzzy Sets and Systems，1989，31(3)：343-349.

[7] 徐泽水. 区间直觉模糊信息的集成方法及其在决策中的应用[J]. 控制与决策，2007，22(2)：215-219.
Xu Zeshui. Methods for Aggregating Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Information and Application to Decision Making[J]. Control and Decision，2007，22 (2)：215-219.

[8] 徐泽水，陈 剑. 一种基于区间直觉判断矩阵的群决策方法[J]. 系统工程理论与实践，2007，27(4)：126-133.
Xu Zeshui，Chen Jian. An Approach to Group Decision Making Based on Interval-Valued Intuitionistic Judgment Matrices[J]. Systems Engineering-Theory & Practice，2007，27(4)：126-133.

[9] 刘 锋，袁学海. 模糊数直觉模糊集[J]. 模糊系统与数学，2007，21(1)：88-91.
Liu Feng，Yuan Xuehai. Fuzzy Number Intuitionistic Fuzzy Set[J]. Fuzzy Systems and Mathematics，2007，21(1)：88-91.

（下转第51页）