doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2012.01.012

中立型变时滞系统鲁棒稳定性分析

白　雷，肖伸平，曾红兵，程五彬

（湖南工业大学 电气与信息工程学院，湖南 株洲 412008）

摘　要：利用Lyapunov-Krasovskii泛函方法对中立型变时滞系统的时滞相关鲁棒稳定性问题进行了分析。通过在新构建的Lyapunov-Krasovskii泛函的导数中恰当地引入零项，并且对泛函导数中的$\dot{d}(t)$项进行了新的界定，获得中立型变时滞系统的时滞相关稳定性条件。数值实例表明：采用所提方法得到的结果相比已有文献结果，具有更小的保守性。

关键词：中立型系统；鲁棒稳定；线性矩阵不等式（LMI）

中图分类号：TP13　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2012)01-0050-05

Analysis on Robust Stability of Neutral Systems with Time-Varying Delay

Bai Lei，Xiao Shenping，Zeng Hongbing，Cheng Wubin

（School of Electrical and Information Engineering，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan，412008，China）

Abstract：The delay-dependent robust stability for neutral systems with time-varying delay is analyzed by means of the Lyapunov-Krasovskii functional method. A new delay-dependent stability sufficient condition is obtained by introducing some zero-item in the derivative of the Lyapunov-Krasovskii functional and employing new bounding technique for $\dot{d}(t)$. The numerical examples show that the result of the proposed method has less conservative comparing to the existing result.

Keywords：neutral system; robust stability; linear matrix inequality(LMI)

0　引言

时滞是自然界中广泛存在的一种物理现象，如生物系统、经济系统、机械系统等许多系统中都含有时滞，它是使得系统不稳定和系统性能变差的根源，同时，它会使对系统稳定性进行分析变得困难。由于其广泛的应用背景，时滞系统得到了许多学者的关注[1-4]。

中立型时滞系统是指在系统的状态和状态的导数中都存在时滞项的一类时滞系统，它是应用更为广泛的一类时滞微分系统。由于该系统考虑了中立项的存在问题，从而使得对这种系统的研究比通常的时滞系统更加复杂和困难[5-7]。

学者们在对中立型变时滞系统进行研究时，采取了各种有效方法来分析其稳定性，如文献[8]采用了积分不等式方法，文献[6]则采用模型变换的方法。但是，多数文献所得到的时滞相关稳定性定理，都采取了对积分项进行放大或转化的方式，如文献[9]

收稿日期：2011-12-29

基金项目：湖南省自然科学基金资助项目（10JJ6098），2011年湖南省研究生科研创新基金资助项目（CX2011B394）

作者简介：白　雷（1986-），男，湖北鄂州人，湖南工业大学硕士生，主要研究方向为时滞系统鲁棒稳定性分析与控制器设计，E-mail：loveberlin@yeah.net

通信作者：肖伸平（1965-），男，湖南东安人，湖南工业大学教授，博士，主要从事时滞系统的鲁棒控制理论及应用方面的教学与研究，E-mail：xsph_519@163.com

在对 Lyapunov-Krasovskii 泛函导数变换时，式中系统状态导数的积分区间被放大，导致最终得到的结论具有一定的保守性，这使得 Lyapunov- Krasovskii 泛函形式具有较大的改进空间。

本文在文献[10]的基础上，采用构造新的增广 Lyapunov-Krasovskii 泛函，获得新的时滞相关稳定条件。然后，通过数值实例比较来说明此方法与已有结果相比的优越性。

1　主要结果

考虑如下具有不确定性时变的中立型时滞系统：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}(t-\tau)=(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}(t)+\\ \qquad(\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}+\Delta\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}})\boldsymbol{x}(t-d(t)),\\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t),\ t\in[-r,0]。\end{cases}\tag{1}$$

式（1）中：$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$为系统的状态向量，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}$，$\boldsymbol{C}$为具有合适维数的常数矩阵，而且矩阵$\boldsymbol{C}$的谱半径满足$\rho(\boldsymbol{C})<1$；

时滞$d(t)$为系统状态中的时变时滞，且满足以下条件：

$$0\leqslant d(t)\leqslant h,\ \left|\dot{d}(t)\right|\leqslant\mu\ ,\tag{2}$$

其中h和μ为常数；

τ为标量，且$\tau>0$，表示状态导数中的时滞，设$r=\max\{h,\tau\}$，且初始条件$\boldsymbol{\phi}(t)$表示在区间$[-r,0]$内的连续初始向量函数；

$\Delta\boldsymbol{A},\Delta\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}$表示系统的不确定性矩阵，且满足以下条件：

$$\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{A} & \Delta\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}\end{bmatrix}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{F}(t)\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}} & \boldsymbol{E}_{\mathrm{ad}}\end{bmatrix},\tag{3}$$

其中：$\boldsymbol{D},\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}},\boldsymbol{E}_{\mathrm{ad}}$为具有适当维数的常数实矩阵，$\boldsymbol{F}(t)$为未知实矩阵，且满足

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}(t)\leqslant\boldsymbol{I},\ \forall t。$$

当$\boldsymbol{F}(t)\equiv0$，$t>0$时，系统（4）不含不确定性，称为标称系统，即：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}(t-\tau)=\\ \qquad\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}\dot{\boldsymbol{x}}(t-d(t)),\quad t>0;\\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t),\quad t\in[-r,0]。\end{cases}\tag{4}$$

为了证明本文的结论，先给出如下引理 1。

引理 1　给定具有适当维数的正定矩阵$\boldsymbol{H},\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$，对于所有满足$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\leqslant\boldsymbol{I}$的矩阵$\boldsymbol{F}(t)$，

$$\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{H}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}<0$$

成立，当且仅当存在一个常数$\varepsilon>0$，使得

$$\boldsymbol{Q}+\varepsilon^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}+\varepsilon\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}<0。$$

对于标称系统（4），有如下结论。

定理 1　给定标量$h>0$和μ，如果存在矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_{11} & \boldsymbol{P}_{12} & \boldsymbol{P}_{13}\\ * & \boldsymbol{P}_{22} & \boldsymbol{P}_{23}\\ * & * & \boldsymbol{P}_{33}\end{bmatrix}>0，\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_{11} & \boldsymbol{R}_{12}\\ * & \boldsymbol{R}_{22}\end{bmatrix}>0,$$

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{11} & \boldsymbol{Q}_{12}\\ * & \boldsymbol{Q}_{22}\end{bmatrix}\geqslant0,\ \boldsymbol{Z}>0,\ \boldsymbol{W}>0,\ \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_{11} & \boldsymbol{X}_{12}\\ * & \boldsymbol{X}_{22}\end{bmatrix}\geqslant0,$$

以及任意具有适当维数的矩阵$\boldsymbol{N}_i,\boldsymbol{M}_i,\boldsymbol{H}_i\,(i=1,2)$，使得如下线性矩阵不等式（linear maxtrix inequality，LMI）成立：

$$\boldsymbol{\Omega}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Omega}_{11} & \boldsymbol{\Omega}_{12} & -\boldsymbol{M}_1 & \boldsymbol{\Omega}_{14} & \boldsymbol{P}_{12} & \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{C} & \boldsymbol{P}_{13}\\ * & \boldsymbol{\Omega}_{22} & -\boldsymbol{M}_2 & \boldsymbol{\Omega}_{24} & \boldsymbol{P}_{23}^{\mathrm{T}} & 0 & \boldsymbol{\Omega}_{27}\\ * & * & -\boldsymbol{R}_{11} & \boldsymbol{P}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Omega}_{35} & 0 & \boldsymbol{P}_{23}\\ * & * & * & \boldsymbol{\Omega}_{44} & 0 & \boldsymbol{H}_2\boldsymbol{C} & 0\\ * & * & * & * & -\boldsymbol{R}_{22} & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & -\boldsymbol{W} & 0\\ * & * & * & * & * & * & \boldsymbol{\Omega}_{77}\end{bmatrix}<0,\tag{5}$$

式中：

$$\boldsymbol{\Omega}_{11}=\boldsymbol{R}_{11}+\boldsymbol{Q}_{11}+\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{N}_1+\boldsymbol{N}_1^{\mathrm{T}}+h\boldsymbol{X}_{11},$$
$$\boldsymbol{\Omega}_{12}=\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}+\boldsymbol{M}_1-\boldsymbol{N}_1+\boldsymbol{N}_2^{\mathrm{T}}+h\boldsymbol{X}_{12},$$
$$\boldsymbol{\Omega}_{14}=\boldsymbol{P}_{11}+\boldsymbol{Q}_{12}+\boldsymbol{R}_{12}-\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\Omega}_{22}=-(1-\mu)\boldsymbol{Q}_{11}+\boldsymbol{M}_2+\boldsymbol{M}_2^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{N}_2-\boldsymbol{N}_2^{\mathrm{T}}+h\boldsymbol{X}_{22},$$
$$\boldsymbol{\Omega}_{24}=\boldsymbol{P}_{13}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\Omega}_{27}=\boldsymbol{P}_{33}-\boldsymbol{Q}_{12},$$
$$\boldsymbol{\Omega}_{35}=\boldsymbol{P}_{22}-\boldsymbol{R}_{12},$$
$$\boldsymbol{\Omega}_{44}=\boldsymbol{W}+h\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{R}_{22}+\boldsymbol{Q}_{22}-\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\Omega}_{77}=-\frac{1}{1+\mu}\boldsymbol{Q}_{22}。$$

$$\boldsymbol{\Psi}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_{11} & \boldsymbol{X}_{12} & \boldsymbol{N}_1\\ * & \boldsymbol{X}_{22} & \boldsymbol{N}_2\\ * & * & \boldsymbol{Z}\end{bmatrix}\geqslant0,\tag{6}$$

$$\boldsymbol{\Psi}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_{11} & \boldsymbol{X}_{12} & \boldsymbol{M}_1\\ * & \boldsymbol{X}_{22} & \boldsymbol{M}_2\\ * & * & \boldsymbol{Z}\end{bmatrix}\geqslant0,\tag{7}$$

则满足时滞约束的系统（4）是渐近稳定的。

证明　构造如下 Lyapunov-Krasovskii 泛函：

$$V(t,x_t)=\xi_1^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\xi_1(t)+\int_{t-d(t)}^{t}\xi_2^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Q}\xi_2(s)\mathrm{d}s+\\ \int_{t-h}^{t}\xi_2^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\xi_2(s)\mathrm{d}s+\int_{t-\tau}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{W}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s+\\ \int_{-h}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Z}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,$$

其中：

$$\xi_1(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t) & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h) & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-d(t))\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\xi_2(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t) & \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}，\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}>0,$$

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\geqslant0，\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}>0，\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}>0$$

为待定矩阵。

根据牛顿–莱布尼茨公式

d

$$x(t)-x(t-h)=\int_{t-h}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s,$$

则对于任意合适维数的矩阵

$$N=\begin{bmatrix}N_1^{\mathrm T} & N_2^{\mathrm T}\end{bmatrix}^{\mathrm T},\quad M=\begin{bmatrix}M_1^{\mathrm T} & M_2^{\mathrm T}\end{bmatrix}^{\mathrm T},$$

$$H=\begin{bmatrix}H_1^{\mathrm T} & H_2^{\mathrm T}\end{bmatrix}^{\mathrm T},\quad X=\begin{bmatrix}X_{11} & X_{12}\\ * & X_{22}\end{bmatrix},$$

以下式子成立：

$$\partial_1=2\xi_3^{\mathrm T}(t)N[x(t)-x(t-d(t))-\int_{t-d(t)}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s=0,\quad(8)$$

$$\partial_2=2\xi_3^{\mathrm T}(t)M\left|x(t-d(t))-x(t-h)-\int_{t-h}^{t-d(t)}\dot{x}(s)\mathrm{d}s\right|=0,\quad(9)$$

$$\partial_3=2\xi_2^{\mathrm T}(t)H\left[Ax(t)+A_{\mathrm d}x(t-d(t))-\dot{x}(t)+C\dot{x}(t-\tau)\right]=0,\quad(10)$$

$$\partial_4=h\xi_3^{\mathrm T}(t)X\xi_3(t)-\int_{t-d(t)}^{t}\xi_3^{\mathrm T}(t)X\xi_3(t)\mathrm{d}s-\int_{t-h}^{t-d(t)}\xi_3^{\mathrm T}(t)X\xi_3(t)\mathrm{d}s=0,\quad(11)$$

其中$\xi_3(t)=\begin{bmatrix}x^{\mathrm T}(t) & x^{\mathrm T}(t-d(t))\end{bmatrix}^{\mathrm T}$。

对Lyapunov-Krasovskii泛函沿系统（4）求导，可得到：

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,x_t)=&2\xi_1^{\mathrm T}(t)P\dot{\xi}_1(t)+\xi_2^{\mathrm T}(t)(R+Q)\xi_2^{\mathrm T}(t)+\\&\dot{x}^{\mathrm T}(t)(hZ+W)\dot{x}(t)-\int_{t-h}^{t}\dot{x}^{\mathrm T}(s)Z\dot{x}(s)\mathrm{d}s-\\&(1-\dot{d}(t))\xi_2^{\mathrm T}(t-d(t))Q\xi_2(t-d(t))-\\&\xi_2^{\mathrm T}(t-h)R\xi_2(t-h)-\dot{x}^{\mathrm T}(t-\tau)W\dot{x}(t-\tau),\end{aligned}\quad(12)$$

将式（8）~（11）的左边加入式（12）中，并将等式

$$\int_{t-h}^{t}\dot{x}^{\mathrm T}(s)Z\dot{x}(s)\mathrm{d}s=\int_{t-h}^{t-d(t)}\dot{x}^{\mathrm T}(s)Z\dot{x}(s)\mathrm{d}s+\int_{t-d(t)}^{t}\dot{x}^{\mathrm T}(s)Z\dot{x}(s)\mathrm{d}s$$

以及不等式$|\dot{d}(t)|\leqslant\mu$代入整理得：

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,x_t)\leqslant&2\xi_1^{\mathrm T}(t)\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12} & P_{12}\\ * & P_{22} & P_{23}\\ * & * & P_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{x}(t-h)\\ \eta_3(t)\end{bmatrix}-\\&\int_{t-h}^{t}\dot{x}^{\mathrm T}(s)Z\dot{x}(s)\mathrm{d}s-(1-\mu)x^{\mathrm T}(t-d(t))Q_{11}x^{\mathrm T}(t-d(t))+\\&\xi_2^{\mathrm T}(t)(R+Q)\xi_2(t)+\dot{x}^{\mathrm T}(t)(hZ+W)\dot{x}(t)-\\&2x^{\mathrm T}(t-d(t))Q_{12}\eta_3(t)-\frac{1}{1+\mu}\eta_3^{\mathrm T}(t)Q_{22}\eta_3(t)-\\&\xi_2^{\mathrm T}(t-h)R\xi_2(t-h)-\dot{x}^{\mathrm T}(t-\tau)W\dot{x}(t-\tau)+\\&\partial_1+\partial_2+\partial_3+\partial_4=\\&\zeta_1^{\mathrm T}(t)\Omega\zeta_1(t)-\int_{t-d(t)}^{t}\zeta_2^{\mathrm T}(t,s)\Psi_1\zeta_2(t,s)\mathrm{d}s-\\&\int_{t-h}^{t-d(t)}\zeta_2^{\mathrm T}(t,s)\Psi_2\zeta_2(t,s)\mathrm{d}s,\end{aligned}\quad(13)$$

式中：

$$\zeta_1^{\mathrm T}(t)=\begin{bmatrix}\eta_1^{\mathrm T}(t) & \eta_2^{\mathrm T}(t) & \eta_3^{\mathrm T}(t)\end{bmatrix}^{\mathrm T},$$

$$\zeta_2^{\mathrm T}(t)=\begin{bmatrix}\xi_3^{\mathrm T}(t) & \dot{x}^{\mathrm T}(s)\end{bmatrix}^{\mathrm T},$$

$$\eta_1(t)=\begin{bmatrix}x^{\mathrm T}(t) & x^{\mathrm T}(t-d(t)) & x^{\mathrm T}(t-h)\end{bmatrix}^{\mathrm T},$$

$$\eta_2(t)=\begin{bmatrix}\dot{x}^{\mathrm T}(t) & \dot{x}^{\mathrm T}(t-h) & \dot{x}^{\mathrm T}(t-\tau)\end{bmatrix}^{\mathrm T},$$

$$\eta_3(t)=(1-\dot{d}(t))\dot{x}^{\mathrm T}(t-d(t))。$$

如果满足$\Omega<0$，且$\Psi_1\geqslant0$，$\Psi_2\geqslant0$，那么对于充分小的ε，有$\dot{V}(t,x_t)<-\varepsilon\|x_t\|^2$，由Lyapunov-Krasovskii稳定性理论可知，系统（4）是渐近稳定的。

定理证明完毕。

注释1 对本文中构造的Lyapunov-Krasovskii泛函求导得到的式子（12）中，相比以往文献（如文献[11-13]）包含了更多的时滞信息，并充分考虑了$x(d(t))$，$x(t-h)$以及$\dot{x}(t)$这3项之间的关系，同时完整地保留了$\int_{t-h}^{t-d(t)}\dot{x}(s)\mathrm{d}s$这一项。因此，本文所得到的结论较这些文献具有更小的保守性。

注释2 在证明定理1的过程中，把积分项$-\int_{t-h}^{t}\dot{x}^{\mathrm T}(s)Z\dot{x}(s)\mathrm{d}s$通过等价变换，转化成为

$$-\int_{t-h}^{t-d(t)}\dot{x}^{\mathrm T}(s)Z\dot{x}(s)\mathrm{d}s-\int_{t-d(t)}^{t}\dot{x}^{\mathrm T}(s)Z\dot{x}(s)\mathrm{d}s。$$

这一转化过程中，积分项没有经过任何放大，因此，本文所提方法进一步降低了结论的保守性。

注释3 对Lyapunov-Krasovskii泛函导数进行变换时，$\dot{\xi}_1(t)$这一项中的$\dot{x}^{\mathrm T}(t-d(t))$被替换为$(1-\dot{d}(t))\dot{x}^{\mathrm T}(t-d(t))$，使得$1-\dot{d}(t)$这一项只出现在对角线$\Omega_{22}$和$\Omega_{77}$中，这样容易被界定。

注释4 令$d(t)=\tau=h$，则时滞系统（4）可变为

$$\begin{cases}\dot{x}(t)-C\dot{x}(t-h)=Ax(t)+A_{\mathrm d}x(t-h), & t>0;\\ x(t)=\phi(t), & t\in[-r,0]。\end{cases}\quad(14)$$

按照定理1中的证明方法，可得到如下推论。

推论1 给定标量$h>0$，如果存在矩阵

$$P=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ * & P_{22}\end{bmatrix}>0,\ R=\begin{bmatrix}R_{11} & R_{12}\\ * & R_{22}\end{bmatrix}>0,$$

$$Z>0,\ W>0,\ X=\begin{bmatrix}X_{11} & X_{12}\\ * & X_{22}\end{bmatrix}\geqslant0,$$

以及任意具有适当维数的实矩阵$N_i,H_i(i=1,2)$，使得LMI（6）和（15）成立，

$$\begin{bmatrix}\hat{\Omega}_{11} & \hat{\Omega}_{12} & \hat{\Omega}_{13} & P_{12}+H_1C\\ * & \hat{\Omega}_{22} & P_{12}^{\mathrm T}+A_{\mathrm d}^{\mathrm T}H_2^{\mathrm T} & P_{22}-R_{12}\\ * & * & \hat{\Omega}_{33} & H_2C\\ * & * & * & -W-R_{22}\end{bmatrix}<0,\quad(15)$$

其中：

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{11}=\boldsymbol{R}_{11}+\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{N}_1+\boldsymbol{N}_1^{\mathrm{T}}+h\boldsymbol{X}_{11},$$
$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{12}=\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}-\boldsymbol{N}_1+\boldsymbol{N}_2^{\mathrm{T}}+h\boldsymbol{X}_{12},$$
$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{13}=\boldsymbol{P}_{11}+\boldsymbol{R}_{12}-\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{T}},$$
$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{22}=-\boldsymbol{R}_{11}-\boldsymbol{N}_2-\boldsymbol{N}_2^{\mathrm{T}}+h\boldsymbol{X}_{22},$$
$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{33}=\boldsymbol{W}+h\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{R}_{22}-\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{T}}。$$

则系统（14）是渐近稳定的。

现在将定理 1 的结论推广到包含不确定性的时变中立性时滞系统中。

定理 2　给定标量 $h>0$ 和 μ，如果存在矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_{11} & \boldsymbol{P}_{12} & \boldsymbol{P}_{13}\\ * & \boldsymbol{P}_{22} & \boldsymbol{P}_{23}\\ * & * & \boldsymbol{P}_{33}\end{bmatrix}>0,\ \boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_{11} & \boldsymbol{R}_{12}\\ * & \boldsymbol{R}_{22}\end{bmatrix}>0,$$

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{11} & \boldsymbol{Q}_{12}\\ * & \boldsymbol{Q}_{22}\end{bmatrix}\geqslant 0,\ \boldsymbol{Z}>0,$$

$$\boldsymbol{W}>0,\ \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_{11} & \boldsymbol{X}_{12}\\ * & \boldsymbol{X}_{22}\end{bmatrix}\geqslant 0,$$

以及任意具有适当维数的矩阵 $\boldsymbol{N}_i,\boldsymbol{M}_i,\boldsymbol{H}_i(i=1,2)$ 和常数 ε，使得 LMI（6），（7）和（16）成立：

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{11} & \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{12} & -\boldsymbol{M}_1 & \boldsymbol{\Omega}_{14} & \boldsymbol{P}_{12} & \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{C} & \boldsymbol{P}_{13} & \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{D}\\ * & \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{22} & -\boldsymbol{M}_2 & \boldsymbol{\Omega}_{24} & \boldsymbol{P}_{23}^{\mathrm{T}} & 0 & \boldsymbol{\Omega}_{27} & 0\\ * & * & -\boldsymbol{R}_{11} & \boldsymbol{P}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Omega}_{35} & 0 & \boldsymbol{P}_{23} & 0\\ * & * & * & \boldsymbol{\Omega}_{44} & 0 & \boldsymbol{H}_2\boldsymbol{C} & 0 & \boldsymbol{H}_2\boldsymbol{D}\\ * & * & * & * & -\boldsymbol{R}_{22} & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & -\boldsymbol{W} & 0 & 0\\ * & * & * & * & * & * & \boldsymbol{\Omega}_{77} & 0\\ * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0, \tag{16}$$

其中：

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{11}=\boldsymbol{R}_{11}+\boldsymbol{Q}_{11}+\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{N}_1+\boldsymbol{N}_1^{\mathrm{T}}+h\boldsymbol{X}_{11}+\varepsilon\boldsymbol{E}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_a,$$
$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{12}=\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}+\boldsymbol{M}_1-\boldsymbol{N}_1+\boldsymbol{N}_2^{\mathrm{T}}+h\boldsymbol{X}_{12}+\varepsilon\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_{\mathrm{ad}},$$
$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{22}=-(1-\mu)\boldsymbol{Q}_{11}+\boldsymbol{M}_2+\boldsymbol{M}_2^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{N}_2-\boldsymbol{N}_2^{\mathrm{T}}+h\boldsymbol{X}_{22}+\varepsilon\boldsymbol{E}_{\mathrm{ad}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_{\mathrm{ad}},$$

$\boldsymbol{\Omega}_{14},\boldsymbol{\Omega}_{24},\boldsymbol{\Omega}_{27},\boldsymbol{\Omega}_{35},\boldsymbol{\Omega}_{44},\boldsymbol{\Omega}_{77}$ 同定理 1 中定义。则满足时滞约束的系统(1)是渐近稳定的。

证明　在定理 1 的基础上，用 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}}$ 和 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{E}_{\mathrm{ad}}$ 分别代替 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}$，可得到如下不等式

$$\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{\theta}_1\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{\theta}_2+\boldsymbol{\theta}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{\theta}_1^{\mathrm{T}}<0, \tag{17}$$

其中：

$$\boldsymbol{\theta}_1=[\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{D}\ \ 0\ \ 0\ \ \boldsymbol{H}_2\boldsymbol{D}\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\theta}_2=[\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}}\ \ \boldsymbol{E}_{\mathrm{ad}}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0],$$

运用引理 1，不等式（17）可化为

$$\boldsymbol{\Omega}+\varepsilon^{-1}\boldsymbol{\theta}_1\boldsymbol{\theta}_1^{\mathrm{T}}+\varepsilon\boldsymbol{\theta}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}_2<0, \tag{18}$$

再利用 Schur 补引理可知，不等式（18）等价于不等式（16）。即系统（1）是渐近稳定的。

2　数值实例

例 1　考虑具有如下参数的时变中立性时滞系统（4）的渐近稳定性[9−11]：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -0.9\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0.1 & 0\\ 0 & 0.1\end{bmatrix}。$$

利用本文所推导出的定理 1，对于取不同的 μ 得到能保证系统渐进稳定的最大允许时滞 $h_{\max}$，以及目前已有文献的最大允许时滞 $h_{\max}$，列于表 1。

表 1　在不同 μ 情况下系统稳定的 $h_{\max}$

Table 1　The system stability $h_{\max}$ for various μ

μ	已有文献			本文定理 1
	[9]	[10]	[11]	
0	1.59	1.96	2.05	2.05
0.5	1.26	1.51	1.82	1.89
0.9	0.97	1.07	1.74	1.85
1.0	−	−	1.72	1.85

从表 1 中可以看出，将采用本文所提出的方法得到的结果与文献[9−11]所得到的结果进行比较，本文所提方法具有一定的优越性，从而说明本文给出的方法是有效的。

例 2　考虑具有如下参数的中立型时滞系统（14）的渐近稳定性[6−7,14−15]：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-0.9 & 0.2\\ 0.1 & -0.9\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}=\begin{bmatrix}-1.1 & -0.2\\ -0.1 & -1.1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-0.2 & 0\\ 0.2 & -0.1\end{bmatrix}。$$

利用本文所推导出的推论 1，可求得该系统最大的时滞值 $h_{\max}$=1.788 0。表 2 给出了能保证系统（12）渐进稳定的最大允许时滞 $h_{\max}$，以及目前已有文献的最大允许时滞 $h_{\max}$。

表 2　用不同方法得到的保证系统稳定的 $h_{\max}$

Table 2　The system stability $h_{\max}$ for different ways

文献[6]	文献[7]	文献[14]	文献[15]	推论 1
1.652 7	1.785 8	1.719 1	1.785 6	1.788 0

从表 2 中容易看出，采用本文提出的方法所得到的结论较文献[6−7,14−15]中的有所改进，也即本文所提出的方法具有一定的优越性，从而说明此方法是有效的。

例 3　考虑具有如下参数的不确定中立型时滞系统（1）的渐近稳定性[8]：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{d}}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}c & 0\\ 0 & c\end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}}=\begin{bmatrix}1.6 & 0\\ 0 & 0.05\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}_{\mathrm{ad}}=\begin{bmatrix}0.1 & 0\\ -1 & 0.3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{I}$。

当$\mu=0.1$时，对于不同的参数c，所得到的最大时滞$h_{\max}$如表3所示。

表3　不同c情况下系统稳定的$h_{\max}$

Table 3　The system stability $h_{\max}$ for various c

c	文献[8]	定理2	c	文献[8]	定理2
0	0.92	1.13	0.4	0.29	0.37
0.1	0.73	0.88	0.5	0.19	0.26
0.2	0.55	0.67	0.6	0.11	0.17
0.3	0.41	0.50	0.7	0.04	0.09

从表3中可以看出，随着参数c的不断增大，不确定中立型时滞系统（1）的$h_{\max}$不断减小。从表3中还可以看出，采用本文所提方法得到的结论较文献[8]的具有一定的优越性。

3　结语

本文利用Lyapunov-Krasovskii泛函方法讨论了中立型变时滞系统的时滞相关稳定性问题。在对泛函导数的处理过程中，通过恰当地引入一些零项，尤其是保留了以往文献中被忽略的信息项，同时对积分性$\int_{t-h}^{t-d(t)}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Z}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s$没有进行任何放大，获得了渐近稳定的时滞相关判据。数值例子表明，采用本文提出的方法所得的结论较已有文献具有更小的保守性。

参考文献：

[1]　Ariba Y，Gouaisbaut F. Delay-Dependent Stability Analysis of Linear Systems with Time-Varying Delay[C]// New Orleans：Proc 46th IEEE Conference on Decision Control，2007：2053-2058.

[2]　Jiang X，Han Q L. Delay-Dependent Robust Stability for Uncertain Linear Systems with Interval Time-Varying Delay[J]. Automatica，2006, 42(6)：371-376.

[3]　Zhu X L，Yang G H. Delay-Dependent Stability Criteria for Systems with Differentiable Time Delays[J]. Acta Automatica Sinica，2008，34(7)：756-771.

[4]　金　辉，郭　戈. 一类线性时滞系统的鲁棒稳定性分析[J]. 控制工程，2009，16(4)：398-402.
Jin Hui，Guo Ge. Delay-Dependent Robust Stability Analysis for a Class of Linear Systems with Delays[J]. Control Engineering of China，2009，16(4)：398-402.

[5]　Han Q L. A New Delay-Dependent Absolute Stability Criterion for a Class of Nonlinear Neutral Systems[J]. Automatica，2008，44(8)：272-277.

[6]　He Y，Wu M，She J H，et al. Delay-Dependent Robust Stability Criteria for Uncertain Neutral Systems with Mixed Delays[J]. Systems and Control Letters，2004，5l(1)：57-65.

[7]　Chen D Y，Jin C Y. Delay-Dependent Stability Criteria for a Class of Uncertain Neutral Systems[J]. Acta Automatica Sinica，2008，34(8)：989-992.

[8]　Han Q L. On Robust Stability of Neutral Systems with Time-Varying Discrete Delay and Norm-Bounded Uncertainty[J]. Automatica, 2004, 40(6)：1087-1092.

[9]　He Y，Wu M，She J H，et al. Delay-Dependent Robust Stability and Stabilization of Uncertain Neutral Systems[J]. Asian Journal of Control，2008，10(3)：376-378.

[10]　肖伸平，曾红兵. 中立型时变时滞系统时滞相关稳定性[J]. 湖南工业大学学报，2009，23(4)：58-61.
Xiao Shenping，Zeng Hongbing. On Delay-Dependent Stability of Neutral Systems with Time-Varying Delay[J]. Journal of Hunan University of Technology，2009，23(4)：58-61.

[11]　Fridman E，Shaked U. Delay-Dependent Stability and H-Infinite Control Constant and Time-Carrying Delays Type[J]. International Journal of Control，2003，76(1)：48-60.

[12]　Wu M，He Y，She J H，et al. Delay-Dependent Criteria for Robust Stability of Time-Varying Delay Systems[J]. Automatica，2004，40(8)：1435-1439.

[13]　Wu M，He Y，She J H，et al. Parameter-Dependent Lyapunov Function for Stability of Time-Delay Systems with Polytopic Type Uncertainties[J]. IEEE Transactions on Automatic Control，2004，49(5)：828-832.

[14]　Lien C H. Delay-Dependent Stability Criteria for Uncertain Neutral Systems with Multiple Time-Varying Delays via LMI Approach[J]. IEE Proceedings Control Theory and Applications，2005，152(6)：707-714.

[15]　Zhao Z，Wang W，Yang B. Delay and Its Time-Derivative Dependent Robust Stability of Neutral Control System[J]. Applied Mathematics and Computation，2007，187(2)：1326-1332.

（责任编辑：廖友媛）