doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2012.01.003

二元函数可微的一个充分条件

邓卫兵

（湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007）

摘　要：对高等数学和数学分析中二元函数可微的充分条件进行了研究，将条件减弱，得到了新的二元函数可微的充分条件，它揭示了二元函数偏导数存在与可微性之间的关系，并通过实例说明了函数可微的判定方法。

关键词：偏导数；全微分；连续；可导；可微

中图分类号：O172.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2012)01-0010-03

A Sufficient Condition for Binary Function Differentiation

Deng Weibing

（School of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China）

Abstract: The sufficient conditions for binary function differentiation in advanced mathematics and mathematical analysis are studied. With the conditions weakened, obtains the condition of a new binary function differentiation, which reveals the relationship between binary function partial derivatives and differentiability. And illustrates the differentiability of function with examples.

Keywords: partial derivatives; total differentiation; continuative; derivable; differentiable

0　引言

微积分是数学历史中的一个巨大创造，也是高等数学和数学分析的核心内容。

微积分始终是数学教学改革中最活跃的领域之一。美国的微积分教学改革，使他们的微积分教学充满活力，它力在注重本质，能帮助学生加深对微积分思想的深刻理解并获得创造性方法。中国的教育工作者也在坚持不懈地进行微积分的教学改革，改革的目的是提高学生的理解能力和应用能力。笔者在高等数学及数学分析学习与教学中，坚持反思和批判性地学习，并把这种思维的过程应用到教学中，带动学生积极思考，从而批判性地接受传统知识，这对学生的成长是有益的。

受文献[1-5]的启发并结合笔者多年的学习和教学经验，对二元函数的可微条件进行了研究，得到了一个较弱条件下的二元函数可微的结论。

1　预备知识

定义1[5]　二元函数$u=f(x,y)$中，把y看作常量，这时它是x的一元函数，若对x求导，所得的导数称为二元函数$f(x,y)$关于x的偏导数，记为$f_x(x,y)$；同样，二元函数关于y的偏导数记为$f_y(x,y)$。

定义2[5]　若二元函数$u=f(x,y)$的全改变量Δu可表示为

收稿日期：2011-09-18

作者简介：邓卫兵（1966-），女，湖南邵东人，湖南工业大学副教授，硕士，主要从事基础数学教学与研究，
E-mail：dwb1234@126.com

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = A\Delta x + B\Delta y + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right),$$

其中 A, B 与 Δx，Δy 无关，仅与 x, y 有关，则称函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微。

定理 1[5]　若 $f_x(x,y)$ 及 $f_y(x,y)$ 在点 (x,y) 的某邻域内存在，且在该点连续，则函数 $u=f(x,y)$ 在该点可微。

2　结论

将定理 1 中函数可微的充分条件减弱，得定理 2。

定理 2　若 $f_x(x,y)$ 在点 (x,y) 的某邻域内存在，且在该点连续，$f_y(x,y)$ 在点 (x,y) 存在，则函数 $u=f(x,y)$ 在该点可微。

证　函数 $u=f(x,y)$ 的增量

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)]。$$

由已知条件 $f_x(x,y)$ 在点 (x,y) 的某邻域内存在，并根据拉格朗日中值定理得

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = f_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y)\Delta x, \tag{1}$$

其中 $0<\theta<1$。

因 $f_x(x,y)$ 在点 (x,y) 连续，即对 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta_1>0$，当 $0<\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}<\delta_1$ 时，

$$|f_x(x+\Delta x, y+\Delta y) - f_x(x,y)| < \frac{\varepsilon}{2};$$

又因 $0<\theta<1$，则 $0<\sqrt{(\theta\Delta x)^2+(\Delta y)^2}<\delta_1$，从而

$$|f_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y) - f_x(x,y)| < \frac{\varepsilon}{2}。\tag{2}$$

因 $f_y(x,y)$ 在点 (x,y) 存在，即对 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta_2>0$，当 $0<|\Delta y|<\delta_2$ 时，

$$\left|\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} - f_y(x,y)\right| < \frac{\varepsilon}{2}。\tag{3}$$

因此，对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，当 $0<\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}<\delta$ 时，有以下 3 种情形。

1）当 $\Delta x=0$，$\Delta y\neq 0$ 时，根据式（3）有

$$\left|\frac{\Delta u - f_x(x,y)\Delta x - f_y(x,y)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right| = \left|\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) - f_x(x,y)\Delta x - f_y(x,y)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right| = \left|\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y) - f_y(x,y)\Delta y}{\Delta y}\right| = \left|\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} - f_y(x,y)\right| < \frac{\varepsilon}{2}。$$

2）当 $\Delta y=0$，$\Delta x\neq 0$ 时，根据式（1）和（2）有

$$\left|\frac{\Delta u - f_x(x,y)\Delta x - f_y(x,y)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right| = \left|\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) - f_x(x,y)\Delta x - f_y(x,y)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right| = \left|\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y) - f_x(x,y)\Delta x}{\Delta x}\right| = \left|\frac{f_x(x+\theta\Delta x, y)\Delta x - f_x(x,y)\Delta x}{\Delta x}\right| = |f_x(x+\theta\Delta x, y) - f_x(x,y)| < \frac{\varepsilon}{2}。$$

3）当 $\Delta x\neq 0$，且 $\Delta y\neq 0$ 时，

$$\left|\frac{\Delta u - f_x(x,y)\Delta x - f_y(x,y)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right| = \left|\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) - f_x(x,y)\Delta x - f_y(x,y)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right| =$$

$$|f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y+\Delta y) - f(x,y) - f_x(x,y)\Delta x - f_y(x,y)\Delta y| \Big/ \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} \leqslant \left|\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) - f_x(x,y)\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right| + \left|\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y) - f_y(x,y)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|。$$

由情形 1）知

$$\left|\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y) - f_y(x,y)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right| < \left|\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y) - f_y(x,y)\Delta y}{\Delta y}\right| < \frac{\varepsilon}{2};$$

又由式（1）和式（2）得

$$\left|\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) - f_x(x,y)\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right| < \left|\frac{f_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y)\Delta x - f_x(x,y)\Delta x}{\Delta x}\right| = |f_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y) - f_x(x,y)| < \frac{\varepsilon}{2}。$$

因此，

$$\left|\frac{\Delta u - f_x(x,y)\Delta x - f_y(x,y)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon。$$

定理证毕，即

$$\Delta u = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right),$$

$f(x,y)$在点(x,y)可微。

3 实例

例1 证明函数$f(x,y)=\begin{cases} e^x y^2 \sin\dfrac{1}{y}, & y\neq 0; \\ 0, & y=0; \end{cases}$在点$(0,0)$处可微。

证 当$y\neq 0$时，函数$f(x,y)=e^x y^2\sin\dfrac{1}{y}$是初等函数，则

$$f_x(x,y)=e^x y^2 \sin\frac{1}{y},$$

$$f_y(x,y)=e^x\left(2y\sin\frac{1}{y}-\cos\frac{1}{y}\right);$$

当$y=0$时，$f(x,y)=0$，则

$$f_x(x,y)=f_y(x,y)=0。$$

因此，

$$f_x(x,y)=\begin{cases} e^x y^2 \sin\dfrac{1}{y}, & y\neq 0; \\ 0, & y=0。\end{cases}$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases} e^x\left(2y\sin\dfrac{1}{y}-\cos\dfrac{1}{y}\right), & y\neq 0; \\ 0, & y=0。\end{cases}$$

又有

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2\sin\frac{1}{y}-0}{y}=0,$$

即$f_x(0,0)$和$f_y(0,0)$存在。

因为$\lim\limits_{x\to 0} f_x(x,0)=0=f_x(0,0)$，即$f_x(x,y)$在点$(0,0)$处连续；

又因为$\lim\limits_{y\to 0} f_y(0,y)=\lim\limits_{y\to 0} e^0\left(2y\sin\dfrac{1}{y}-\cos\dfrac{1}{y}\right)$不存在，即$f_y(x,y)$在点$(0,0)$处存在但不连续。

由此可知，函数$f(x,y)$满足定理2的条件，从而$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微。

参考文献：

[1] 华东师范大学数学系. 数学分析：下册[M]. 3版. 北京：高等教育出版社，2001：107-112.
Mathematics Department of East China Normal University. Mathematical Analysis: Volume Two[M]. 3rd ed. Beijing: Higher Education Press，2001：107-112.

[2] 同济大学数学系. 高等数学：上册[M]. 6版. 北京：高等教育出版社，2007：79-115.
Mathematics Department of Tongji University. Advanced Mathematics: Volume One[M]. 6th ed. Beijing：Higher Education Press，2007：79-115.

[3] 王 娜. 用自然的语言接近微积分：以James Stewart所著的《微积分》为例[J]. 沈阳工程学院学报：社会科学版，2011，7(3)：418-421.
Wang Na. Approach the Calculus with the Natural Language: Taking Calculus Written by James Stewart as Case[J]. Journal of Shenyang Institute of Engineering：Social Sciences，2011，7(3)：418-421.

[4] 刘玉波，汤大林，马仲立. 关于美国微积分改革的思考[J]. 数学教育学报，2011，20(3)：80-82.
Liu Yubo，Tang Dalin，Ma Zhongli. Thoughts on Reform of the American Infinitesimal Calculus[J]. Journal of Mathematics Education，2011，20(3)：80-82.

[5] 同济大学数学系. 高等数学：下册[M]. 6版. 北京：高等教育出版社，2007：63-73.
Mathematics Department of Tongji University. Advanced Mathematics: Volume Two[M]. 6th ed. Beijing：Higher Education Press，2007：63-73.

（责任编辑：邓光辉）