第26卷 第1期
2012年1月

湖 南 工 业 大 学 学 报
Journal of Hunan University of Technology

Vol.26 No.1
Jan. 2012

doi:10.3969/j.issn.1673-9833.2012.01.001

含参变量的拉普拉斯变换及其应用

阳凌云[1]，符云锦[2]，邓光辉[1]

（1. 湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007；2. 凤凰县两林学区，湖南 凤凰 416211）

摘 要：由于传统的拉普拉斯变换在求解 n 阶线性微分方程（组）的初值问题时，只对零初始条件可用，在实际问题中，会遇到非零初始条件的情形，于是提出了含参变量的拉普拉斯变换，它适用于任何初始条件。利用其变换的特性，得到了一些重要性质和公式，并举例说明其在解线性微分方程（组）以及控制系统中的应用。

关键词：参变量；拉普拉斯变换；控制系统；动力函数

中图分类号：O177.6　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2012)01-0001-05

The Laplace Transform with Parameters and Its Application

Yang Lingyun[1]，Fu Yunjin[2]，Deng Guanghui[1]

（1. School of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China；
2. Lianglin School District of Fenghuang，Fenghuang Hunan 416211，China）

Abstract：As the traditional Laplace transform in solving the initial value problems of n order linear differential equations is only useful at the zero initial conditions and in practical problems there is non-zero initial conditions, puts forward the Laplace transform with parameters, which applicable to any initial conditions. Uses its characteristics of the transformation to get some important properties and formulas, and with examples illustrates its applications in the solution of linear differential equations and in control systems.

Keywords：parameters；Laplace transform；control system；dynamics function

1 背景知识

在 n 阶线性微分方程及线性微分方程组的初值问题中，通常用常数变易法[1]先求出其通解，再用初值条件求出 n 个常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 的值，从而得到满足初值条件的特解。在零初始条件时，用拉普拉斯变换求解[1-6]更简便，即拉普拉斯变换只对零初始条件可用，对任意初始条件不适用。受文献[7-11]的启发，笔者对拉普拉斯变换进行了研究，提出含参变量的拉普拉斯变换，并对其性质和应用进行了探讨，得出了较广泛的结果。

定义 1 设函数 $f(t)$ 在区间 $[\lambda,+\infty]$ 上有定义，如果含参变量 s,λ 的无穷积分 $\int_{\lambda}^{+\infty} \mathrm{e}^{-s(t-\lambda)} f(t)\,\mathrm{d}t$ 对 s 的某一取值范围是收敛的，则称 $\int_{\lambda}^{+\infty} \mathrm{e}^{-s(t-\lambda)} f(t)\,\mathrm{d}t$ 为函数 $f(t)$ 的含参变量 λ 的拉普拉斯变换，记为 $L[f(t),\lambda]=F(s,\lambda)$，即

收稿日期：2011-09-11

作者简介：阳凌云（1947-），男，湖南湘潭人，湖南工业大学教授，主要从事分析学及其应用和数学教育理论研究，E-mail：yly-mc@sina.com

通信作者：符云锦（1984-），男，湖南泸溪人，湖南凤凰县两林学区教师，主要研究方向为初等数学，分析学及其应用，微分方程，教育理论及其应用，E-mail：wsasw4264731123@163.com

$$F(s,\lambda)=\int_{\lambda}^{+\infty}\mathrm{e}^{-s(t-\lambda)}f(t)\,\mathrm{d}t,$$

其中：$f(t)$称为原函数，$F(s,\lambda)$称为象函数。含参变量λ的拉普拉斯变换的逆变换，记为$L^{-1}\left[F(s,\lambda)\right]$，即

$$L^{-1}\left[F(s,\lambda)\right]=f(t)。$$

定义1中，$s,\lambda\in\mathbf{C}$，本文只讨论$s,\lambda\in\mathbf{R}$时的情形。

定义2 函数$x(t)$与$g(t)$的卷积定义为

$$x(t)*g(t)=\int_{\lambda}^{+\infty}x(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau。$$

2 含参变量的拉普拉斯变换性质

利用定义1、定义2和拉普拉斯变换的相关知识，可得含参变量的拉普拉斯变换的一些性质。

性质1 如果函数$f(t)$在区间$[\lambda,+\infty]$上逐段连续，且存在常数$M>0$，$s_0>0$，使对于一切$t\geqslant\lambda$，有$\left|f(t)\right|<M\mathrm{e}^{s_0(t-\lambda)}$，则当$s>s_0$时，$F(s,\lambda)$存在。

证 当$s>s_0$时，则有

$$\left|\int_{\lambda}^{+\infty}\mathrm{e}^{-s(t-\lambda)}f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_{\lambda}^{+\infty}\mathrm{e}^{-s(t-\lambda)}\left|f(t)\right|\mathrm{d}t\leqslant$$

$$M\int_{\lambda}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(s-s_0)(t-\lambda)}\mathrm{d}t=\frac{M}{s-s_0}。$$

性质2（线性性质） 设函数$f(t)$和$g(t)$满足性质1的条件，α,β是常数，则在其象函数的公共定义域上有

$$L\left[\alpha f(t)+\beta g(t),\lambda\right]=\alpha L\left[f(t),\lambda\right]+\beta L\left[g(t),\lambda\right]。$$

证

$$L\left[\alpha f(t)+\beta g(t),\lambda\right]=\int_{\lambda}^{+\infty}\mathrm{e}^{-s(t-\lambda)}\left[\alpha f(t)+\beta g(t)\right]\mathrm{d}t=$$

$$\alpha\int_{\lambda}^{+\infty}\mathrm{e}^{-s(t-\lambda)}f(t)\mathrm{d}t+\beta\int_{\lambda}^{+\infty}\mathrm{e}^{-s(t-\lambda)}g(t)\,\mathrm{d}t=$$

$$\alpha L\left[f(t),\lambda\right]+\beta L\left[g(t),\lambda\right]。$$

性质3（相似性质） 设$L\left[f(t),\lambda\right]=F(s,\lambda)$，$a>0$，则

$$L[f(at),\lambda]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a},a\lambda\right)。$$

证 令$at=x$，则有

$$L\left[f(at),\lambda\right]=\int_{\lambda}^{+\infty}\mathrm{e}^{-s(t-\lambda)}f(at)\,\mathrm{d}t=$$

$$\frac{1}{a}\int_{a\lambda}^{+\infty}\mathrm{e}^{-s\left(\frac{x}{a}-\lambda\right)}f(x)\,\mathrm{d}x=$$

$$\frac{1}{a}\int_{a\lambda}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{s}{a}(x-a\lambda)}f(x)\,\mathrm{d}x=$$

$$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a},a\lambda\right)。$$

性质4（象函数的微分性质） 设$L\left[f(t),\lambda\right]=F(s,\lambda)$，则

$$F_s^{(n)}(s,\lambda)=(-1)^n L\left[(t-\lambda)^n f(t),\lambda\right]。$$

证 $$F_s^{(n)}(s,\lambda)=\left[\int_{\lambda}^{+\infty}\mathrm{e}^{-s(t-\lambda)}f(t)\,\mathrm{d}t\right]_s^{(n)}=$$

$$(-1)^n\int_{\lambda}^{+\infty}(t-\lambda)^n\mathrm{e}^{-s(t-\lambda)}f(t)\mathrm{d}t=$$

$$(-1)^n L\left[(t-\lambda)^n f(t),\lambda\right]。$$

性质5（象函数的积分性质） 设$L\left[f(t),\lambda\right]=F(s,\lambda)$，则

$$L\left[\frac{f(t)}{t-\lambda},\lambda\right]=\int_{s}^{+\infty}F(s,\lambda)\mathrm{d}s。$$

证 $$L\left[\frac{f(t)}{t-\lambda},\lambda\right]=\int_{\lambda}^{+\infty}\frac{f(t)}{t-\lambda}\mathrm{e}^{-s(t-\lambda)}\mathrm{d}t=$$

$$\int_{\lambda}^{+\infty}\left[\int_{s}^{+\infty}\mathrm{e}^{-s(t-\lambda)}\mathrm{d}s\right]f(t)\,\mathrm{d}t=$$

$$\int_{s}^{+\infty}\left[\int_{\lambda}^{+\infty}\mathrm{e}^{-s(t-\lambda)}f(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s=$$

$$\int_{s}^{+\infty}F(s,\lambda)\mathrm{d}s。$$

性质6（原函数的微分性质） 设$L\left[f(t),\lambda\right]=F(s,\lambda)$，则

$$L\left[f^{(n)}(t),\lambda\right]=s^nL\left[f(t),\lambda\right]-\sum_{i=0}^{n-1}s^i f^{(n-i)}(\lambda)。$$

证 用数学归纳法证明。

当$n=1$时，

$$L\left[f'(t),\lambda\right]=\int_{\lambda}^{+\infty}\mathrm{e}^{-s(t-\lambda)}f'(t)\,\mathrm{d}t=$$

$$f(t)\mathrm{e}^{-s(t-\lambda)}\Big|_{\lambda}^{+\infty}+s\int_{\lambda}^{+\infty}\mathrm{e}^{-s(t-\lambda)}f(t)\,\mathrm{d}t=$$

$$sL\left[f(t),\lambda\right]-f(\lambda)。$$

假设当$n=k$时有

$$L\left[f^{(k)}(t),\lambda\right]=s^kL\left[f(t),\lambda\right]-\sum_{i=0}^{k-1}s^i f^{(k-i)}(\lambda);$$

则当$n=k+1$时，有

$$L\left[f^{(k+1)}(t),\lambda\right]=\int_{\lambda}^{+\infty}\mathrm{e}^{-s(t-\lambda)}f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t=$$

$$\mathrm{e}^{-s(t-\lambda)}f^{(k)}(t)\Big|_{\lambda}^{+\infty}-\int_{\lambda}^{+\infty}\mathrm{e}^{-s(t-\lambda)}f^{(k)}(t)\mathrm{d}t-$$

$$f^{(k)}(\lambda)+sL\left[f^{(k)}(t),\lambda\right]=$$

$$s^{k+1}L\left[f(t),\lambda\right]-\sum_{i=0}^{k}s^i f^{(k-i)}(\lambda)。$$

性质7（原函数的积分性质） 设$L\left[f(t),\lambda\right]=F(s,\lambda)$，则

$$L\left[\int_{\lambda}^{t}f(t)\,\mathrm{d}t,\lambda\right]=\frac{1}{s}F(s,\lambda)。$$

证　$L\left[\int_{\lambda}^{t} f(t)\mathrm{d}t,\lambda\right]=$

$$\int_{\lambda}^{+\infty}\mathrm{e}^{-s(t-\lambda)}\left[\int_{\lambda}^{t} f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}t=$$

$$-\frac{1}{s}\left[\mathrm{e}^{-s(t-\lambda)}\int_{\lambda}^{t} f(t)\mathrm{d}t\right]\Bigg|_{\lambda}^{+\infty}+\frac{1}{s}\int_{\lambda}^{+\infty}\mathrm{e}^{-s(t-\lambda)}f(t)\mathrm{d}t=$$

$$\frac{1}{s}F(s,\lambda)。$$

一般地，

$$L\left[\underbrace{\int_{\lambda}^{t}\cdots\int_{\lambda}^{t}}_{n} f(t)\mathrm{d}t^{n},\lambda\right]=\frac{F(s,\lambda)}{s^{n}}。$$

证明与性质 7 相似。

性质 8（位移性质）　设 $L[f(t),\lambda]=F(s,\lambda)$，则

$$L\left[\mathrm{e}^{a(t-\lambda)}f(t),\lambda\right]=F(s-a,\lambda)。$$

证　$L\left[\mathrm{e}^{a(t-\lambda)}f(t),\lambda\right]=$

$$\int_{\lambda}^{+\infty}\mathrm{e}^{-s(t-\lambda)}\left[\mathrm{e}^{a(t-\lambda)}f(t)\right]\mathrm{d}t=$$

$$\int_{\lambda}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(s-a)(t-\lambda)}f(t)\mathrm{d}t=F(s-a,\lambda)。$$

性质 9（延迟性质）　若 $L[f(t),\lambda]=F(s,\lambda)$，且当 $t<\lambda$ 时，$f(t)=0$，则对于任意非负实数 τ，有

$$L[f(t-\tau),\lambda]=\mathrm{e}^{-s\tau}F(s,\lambda)。$$

证　$L[f(t-\tau),\lambda]=$

$$\int_{\lambda}^{+\infty}\mathrm{e}^{-s(t-\lambda)}f(t-\tau)\mathrm{d}t=$$

$$\int_{\lambda-\tau}^{+\infty}\mathrm{e}^{-s\tau}\mathrm{e}^{-s(x-\lambda)}f(x)\mathrm{d}x=$$

$$\mathrm{e}^{-s\tau}\left[\int_{\lambda-\tau}^{\lambda}\mathrm{e}^{-s(x-\lambda)}f(x)\mathrm{d}x+\int_{\lambda}^{+\infty}\mathrm{e}^{-s(x-\lambda)}f(x)\mathrm{d}x\right]=$$

$$\mathrm{e}^{-s\tau}\left[0+F(s,\lambda)\right]=\mathrm{e}^{-s\tau}F(s,\lambda)。$$

性质 10（卷积定理）　若 $L[x(t),\lambda]=X(s,\lambda)$，$L[g(t),\lambda]=G(s,\lambda)$，则

$$L[x(t)*g(t),\lambda]=X(s,\lambda)G(s,\lambda)。$$

证　$L[x(t)*g(t),\lambda]=$

$$\int_{\lambda}^{+\infty}\mathrm{e}^{-s(t-\lambda)}\left(\int_{\lambda}^{+\infty}x(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}t=$$

$$\int_{\lambda}^{+\infty}\left(\int_{\lambda}^{+\infty}\mathrm{e}^{-s(t-\lambda)}g(t-\tau)\mathrm{d}t\right)x(\tau)\mathrm{d}\tau=$$

$$G(s,\lambda)\int_{\lambda}^{+\infty}\mathrm{e}^{-s(\tau-\lambda)}x(\tau)\mathrm{d}\tau=$$

$$X(s,\lambda)G(s,\lambda)。$$

性质 11（终值定理）　若函数 $f(t)$ 及其一阶导数都满足性质 1 的条件，则 $f(t)$ 的终值为

$$\lim_{t\to+\infty}f(t)=\lim_{s\to0}sF(s,\lambda)。$$

证　由微分性质可知

$$L\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t},\lambda\right]=\int_{\lambda}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-s(t-\lambda)}\mathrm{d}t=sF(s,\lambda)-f(\lambda),$$

两边取极限，得

$$\lim_{s\to0}\int_{\lambda}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-s(t-\lambda)}\mathrm{d}t=\lim_{s\to0}\left[sF(s,\lambda)-f(\lambda)\right],$$

当 $s\to0$ 时，$\mathrm{e}^{-s(t-\lambda)}\to1$，故有

$$\lim_{s\to0}\int_{\lambda}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-s(t-\lambda)}\mathrm{d}t=\int_{\lambda}^{+\infty}\mathrm{d}f(t)=$$

$$f(+\infty)-f(\lambda)=\lim_{s\to0}\left[sF(s,\lambda)-f(\lambda)\right],$$

即 $f(+\infty)=\lim_{t\to+\infty}f(t)=\lim_{s\to0}sF(s,\lambda)$。

因此，利用终值定理可以从像函数 $F(s,\lambda)$ 直接求出原函数 $f(t)$ 在 $t\to+\infty$ 时的稳态值。这说明 $f(t)$ 的稳态性质，同 $sF(s,\lambda)$ 在 $s=0$ 的邻域内的性质相同。

性质 12（初值定理）　若函数 $f(t)$ 及其一阶导数都满足性质 1 的条件，则 $f(t)$ 的初值为

$$f(0)=\lim_{t\to0}f(t)=\lim_{s\to+\infty}sF(s,\lambda)。$$

证明与性质 11 类似。

3　常用含参变量的拉普拉斯变换公式

利用含参变量的拉普拉斯变换的定义和性质，可推导出常用函数的拉氏变换公式。

1）$L[1,\lambda]=\dfrac{1}{s}$;

2）$L[t,\lambda]=\dfrac{\lambda s+1}{s^{2}}$;

3）$L[t^{n},\lambda]=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\frac{A_{n}^{n-i}\lambda^{i}}{s^{i+1}}$;

4）$L[\mathrm{e}^{at},\lambda]=\dfrac{\mathrm{e}^{a\lambda}}{s-a}$;

5）$L[t\mathrm{e}^{at},\lambda]=\dfrac{\lambda(s-a)+1}{(s-a)^{2}}\mathrm{e}^{a\lambda}$;

6）$L[t^{n}\mathrm{e}^{at},\lambda]=\mathrm{e}^{a\lambda}\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\frac{C_{n}^{i}\lambda^{i}(n-i)!}{(s-a)^{n-i+1}}$;

7）$L[\sin\omega t,\lambda]=\dfrac{\omega\cos\omega\lambda+s\sin\omega\lambda}{s^{2}+\omega^{2}}$;

8）$L[\cos\omega t,\lambda]=\dfrac{s\cos\omega\lambda-\omega\sin\omega\lambda}{s^{2}+\omega^{2}}$;

9）$L[\mathrm{sh}\,\omega t,\lambda]=\dfrac{s\,\mathrm{sh}\,\omega\lambda+\omega\,\mathrm{ch}\,\omega\lambda}{s^{2}-\omega^{2}}$;

10）$L[\mathrm{ch}\,\omega t,\lambda]=\dfrac{\omega\,\mathrm{sh}\,\omega\lambda+s\,\mathrm{ch}\,\omega\lambda}{s^{2}-\omega^{2}}$;

11）$L[\delta(t),\lambda]=1$，其中 $\delta(t)$ 为单位脉冲函数。

4 应用

4.1 求解常系数微分方程（组）

例 1 解方程

$x''-3x'-2x=2\mathrm{e}^{3t}, x(1)=x'(1)=0$。

解 对方程两端同时取参数$\lambda=1$的拉普拉斯变换，并整理得

$$(s-1)(s-2)L[x,1]=\frac{2\mathrm{e}^3}{s-3},$$

故有

$$x=\mathrm{e}^{t+2}-2\mathrm{e}^{t+1}+\mathrm{e}^{3t}。$$

例 2 解方程组

$$\begin{cases}x'=3x-2y+t,\\ y'=2x-y-1,\end{cases} x(1)=6, y(1)=9。$$

解 对方程组两端同时取参数$\lambda=1$的拉普拉斯变换，并整理得

$$\begin{cases}(s-3)L[x,1]=-2L[y,1]+\dfrac{s+1}{s^2}+6,\\ (s+1)L[y,1]=2L[x,1]-\dfrac{1}{s}+9。\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}L[x,1]=\dfrac{s+1}{s^2}+\dfrac{5}{s},\\ L[y,1]=\dfrac{2(s+1)}{s^2}+\dfrac{7}{s}。\end{cases}$$

故有

$$\begin{cases}x=t+5,\\ y=2t+7。\end{cases}$$

4.2 求解变系数微分方程

例 3 解方程

$-(t+1)y''+(3t+2)y'-(2t+1)y=t\mathrm{e}^t, y(-1)=\alpha$。

解 令$Y(s)=L[y,-1]$，对方程两端同时取$\lambda=-1$的拉普拉斯变换，并整理得

$$(s-1)Y'(s)+Y(s)=\frac{-\mathrm{e}^{-1}}{(s-1)^2},$$

解得

$$Y(s)=\frac{-(s-1)+1}{(s-1)^2}\mathrm{e}^{-1}+\frac{\mathrm{e}^{-1}}{s-1}+\frac{C}{s-1},$$

其中C为任意常数，故有

$$y=t\mathrm{e}^t+(C\mathrm{e}+1)\mathrm{e}^t。$$

4.3 求系统（或环节）的动力函数

除了用含参变量的拉普拉斯变换求解微分方程（组）外，还可求出控制工程理论中的动力函数（包括传递函数）。

4.3.1 动力函数的定义

设系统（或环节）的输入量为$x_r(t)$，输出量为$x_c(t)$；则在λ（$\lambda\geqslant 0$）时刻的初值条件下，输出量的含参变量λ的拉氏变换式$x_c(s,\lambda)$和输入量的含参变量λ的拉氏变换式$x_r(s,\lambda)$之比$G(s,\lambda)$，称为该系统（或环节）的动力函数，即

$$G(s,\lambda)=\frac{L[x_c(t),\lambda]}{L[x_r(t),\lambda]}=\frac{X_c(s,\lambda)}{X_r(s,\lambda)}。$$

动力函数是描述系统（或环节）的一个量，它与系统（或环节）内部结构无关，只与外部变化有关，即系统（或环节）在某一时刻λ的动力函数是与时间参变量λ有关的函数。当$\lambda=0$时，即在零初始条件下，系统（或环节）的动力函数就成了系统（或环节）的传递函数[4-6]，并记为$G(s)$。

因此，线性系统（或环节）的动力函数与传递函数的关系为

$$G(s,\lambda)=G(s)+M(s,\lambda),$$

其中$M(s,\lambda)$称为该线性系统（或环节）的扰动函数。显然，扰动函数与该线性系统（或环节）的外部变化有关。

4.3.2 机械平移系统的数学模型

例 4 图1表示一个由弹簧和振子组成的机械平移系统，在外力$f(t)$作用下，振子产生的位移为$x(t)$，求振子在外力作用下的动力函数。

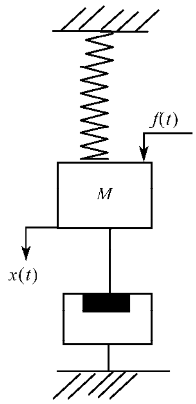

图1 机械平移系统

Fig. 1 Machine translation system

解 系统输入函数为$f(t)$，输出函数为$x(t)$，系统质量为m，根据牛顿定律得振子运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}=f(t)-f_1(t)-f_2(t), \tag{1}$$

式中：$f_1(t)$为阻尼力，$f_2(t)$为弹力。

由于阻尼器活塞和缸体相对运动产生的阻尼力$f_1(t)$与运动方向相反，大小与速度成正比，则$f_1(t)=\delta\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$，其中$\delta$为阻尼系数。若弹簧为线性弹簧，则$f_2(t)=kx(t)$，其中$k$为弹性系数。因此，方

程（1）化为

$$m\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}+\delta\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+kx(t)=f(t)。\qquad（2）$$

在 $t=\lambda$ 时刻所对应的动力函数为

$$G(s,\lambda)=\frac{1}{ms^2+\delta s+k}+\frac{msx(\lambda)+mx'(\lambda)+\delta x(\lambda)}{(ms^2+\delta s+k)L[f(t),\lambda]},$$

其中，扰动函数 $M(s,\lambda)=\dfrac{msx(\lambda)+mx'(\lambda)+\delta x(\lambda)}{(ms^2+\delta s+k)L[f(t),\lambda]}$。

当 $\lambda=0$ 时，即振子在零初始条件下，扰动函数 $M(s,\lambda)=0$，传递函数 $G(s)=\dfrac{1}{ms^2+\delta s+k}$，故有

$$G(s,\lambda)=G(s)+M(s,\lambda)。$$

参考文献：

[1] 东北师范大学微分方程教研室. 常微分方程[M]. 2版. 北京：高等教育出版社，2006：135-137，209-218.
Differential Equation Teaching and Research Section of Northeast Normal University. Ordinary Differential Equation[M]. 2nd ed. Beijing：Higher Education Press，2006：135-137，209-218.

[2] 杨战民. 复变函数与积分变换：题型・方法[M]. 西安：西安电子科技大学出版社，2003：217-220.
Yang Zhanmin. Complex Function and Integral Transformation: Independent Topics・Method[M]. Xi'an：Xidian University Press，2003：217-220.

[3] 李建林. 复变函数・积分变换：导教・导学・导考[M]. 2版. 西安：西北工业大学出版社，2003：276-278.
Li Jianlin· Integral Transformation・Complex Function: Guide of Teach・Guide of Learn・Guide of Exam[M]. 2nd ed. Xi'an：Northwestern Polytechnical University Press，2003：276-278.

[4] 钱学森，宋　健. 工程控制理论[M]. 修订版. 北京：科学出版社，1983：15-85.
Qian Xuesen，Song Jian. Engineering Control Theory[M]. Rev. ed. Beijing：Science Press，1983：15-85.

[5] 王显正，陈正航，王旭永. 控制理论基础[M]. 北京：科学出版社，2000：13-33.
Wang Xianzheng，Chen Zhenghang, Wang Xuyong. Elementary Theory of Control[M]. Beijing：Science Press，2000：13-33.

[6] 陆　文，黄晓波，周志峰，等. 控制理论基础[M]. 北京：清华大学出版社，2008：23-39.
Lu Wen，Huang Xiaobo，Zhou Zhifeng，et al. Elementary Theory of Control[M]· Beijing：Tsinghua University Press，2008：23-39.

[7] 张忠诚. 拉普拉斯变换的应用研究[J]. 周口师范学院学报，2006，23(2)：40-42.
Zhang Zhongcheng. Application Research of the Laplace Transformation[J]. Journal of Zhoukou Normal University：2006，23(2)：40-42.

[8] 钱学明. 利用拉普拉斯变换求解含参变量的广义积分[J]. 绵阳师范学院学报，2007，26 (5)：19-24.
Qian Xueming. Solving Improper Integral with Variable by Laplace Transform[J]. Journal of Mianyang Normal University，2007，26 (5)：19-24.

[9] 黄会芸. 拉普拉斯变换在高等数学中的应用[J]. 潍坊教育学院学报，2009，24(4)：44-45，55.
Huang Huiyun. Application of Laplace's Equation[J]. Journal of Weifang Educational College，2009，24(4)：44-45，55.

[10] 姜立新. Laplace变换的应用研究[J]. 枣庄学院学报，2010，27(2)：37-40.
Jiang Lixin. Application Research of the Laplace Transformation[J]. Journal of Zaozhuang University，2010，27(2)：37-40.

[11] 张洁萍，李俊林. 关于Laplace变换及其性质的应用研究[J]. 太原科技大学学报，2011，32(3)：249-251.
Zhang Jieping，Li Junlin. Application Study on the Laplace Transformation and Its Properties[J]. Journal of Taiyuan University of Science and Technology，2011，32(3)：249-251.

（责任编辑：邓光辉）