

# 非线性扩散图像配准

蒋 鸿, 胡永祥

(湖南工业大学 计算机与通信学院, 湖南 株洲 412008)

**摘 要:** 针对非刚性图像配准方法中对形变域使用全局一致正则化方法的缺点, 提出了一种基于非线性扩散的非刚性图像配准方法。运用变分原理推导了该方法的数学模型, 并将图像局部信息嵌入到该模型中, 非线性扩散系数根据图像特征自适应调整, 使得形变域的不同区域得到了不同程度的平滑。为提高配准速度, 采用加性算子分裂法求解偏微分方程。采用合成图像与 MRI 图像进行了实验, 结果表明: 与全局一致正则化方法相比, 自适应扩散配准算法获得了更符合物理实际的形变, 保持了形变域的局部细节, 具有更好的配准精度。

**关键词:** 自适应正则化; 图像配准; 非线性扩散; 加性算子分裂法

**中图分类号:** TP391.41

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1673-9833(2011)05-0086-06

## Non-Rigid Image Registration Based on Nonlinear Diffusion

Jiang Hong, Hu Yongxiang

(School of Computer and Communication, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412008, China)

**Abstract:** Presents a new non-rigid image registration algorithm based on nonlinear diffusion. Firstly derives the mathematic model of nonlinear registration with variational method. Then incorporates the local information of image into the mathematical framework and self-adjusts the diffusion coefficient according to image content. So the deformation in different regions obtains varying degrees of smoothness. In order to improve registration rate, adopts additive operator splitting method to solve the partial difference equation. Experiments with synthetic images and MRI images show that the new method achieves better performance than the non-adaptive regularization methods, preserves local details and has better registration accuracy.

**Keywords:** aadaptive regularization; image registration; nonlinear diffusion; additive operator splitting (AOS)

## 0 引言

图像配准的目标是寻找一个空间变换, 使得 2 个图像中的对应点在空间上互相对齐。该技术在医学图像处理 and 计算机视觉等领域有着广泛的应用。图

像配准技术可分为刚性配准和非刚性配准 2 类<sup>[1]</sup>。随着图像配准技术的进一步发展, 非刚性配准技术已成为图像配准领域研究的热点。

非刚性图像配准是一个病态问题, 必须使用正则化方法处理。近几十年来, 众多学者提出了光流

收稿日期: 2011-06-03

基金项目: 湖南省教育厅科研基金资助项目 (09C330)

作者简介: 蒋 鸿 (1976-), 女, 湖南株洲人, 湖南工业大学副教授, 主要研究方向为智能信息处理,

E-mail: anitajanny@163.com

通信作者: 胡永祥 (1973-), 男, 湖南安化人, 湖南工业大学副教授, 中南大学博士生, 主要研究方向为医学图像处理, 模式识别, E-mail: huix506@163.com

模型、线弹性模型、黏性流体模型、黏弹性物理模型、扩散模型和曲率模型等多种正则化方法<sup>[2-4]</sup>。这些正则化方法虽然取得了较大的成功,但仍存在一些不足。由于图像是由不同材质的对象构成的(如医学图像是由人体不同的软组织和骨骼构成),各自具有不同的应力应变物理特性。因此,使用全局一致的物理模型作为正则化方法不符合物理实际,会造成某些区域过度平滑,丢失形变细节,无法准确反映图像的真实形变。

近年来,有学者提出了非全局一致的正则化方法。Stefanescu 等人<sup>[5]</sup>将 Demons 算法改进为局部自适应正则化方法;Pitiot 等人<sup>[6]</sup>利用医学图像的解剖先验信息提出了几何驱动的正则化方法。最近, B. Fischer 等人<sup>[7]</sup>提出了自适应正则化方法。为了在处理复杂形变的同时确保获得平滑的形变,笔者提出了基于非线性扩散的自适应正则化方法,该方法具有线性时间复杂度,且能根据图像信息对图像的区域内部和区域之间所对应的形变采取不同程度的平滑,以防止形变过度平滑,保持形变域的细节。

## 1 数学模型

给定 2 个图像  $I_1, I_2: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ , 其中  $\Omega \subset \mathbf{R}^d$  且  $d=2,3$ , 图像配准的目标是找到一个空间变换  $V: \Omega \rightarrow \Omega$ , 将图像  $I_1$  映射到图像  $I_2$ , 使得 2 个图像中的对应结构互相对齐。为简单起见,通常将  $V$  分解为  $V(\mathbf{x})=\mathbf{x}+\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , 其中  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  表示位移。

求解图像配准问题的常用方法是利用一个目标函数衡量 2 个图像的配准程度,通常将目标函数称为相似性测度,当这个函数取得最小值时即可认为 2 个图像已配准。相似性测度也可看作是作用于图像的“外力”,在这个“外力”的作用下,2 个图像朝着互相对齐的方向前进,当“外力”趋于 0 时,认为 2 个图像已配准。常用的相似性测度有均方差和 (sum of squares difference)、互信息 (mutual information)、相关系数 (correlation coefficient)、相关率 (correlation ratio) 等。最简单的相似性测度是均方差和,可表示为

$$S[I_1, I_2; \mathbf{u}] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (I_1(\mathbf{x}) - I_2(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})))^2 dx. \quad (1)$$

由于最小化式 (1) 是一个病态问题 (ill-posed problem), 根据 Tikhonov 正则化原理,需引入一个正则项,以去掉一些不连续或非最优的解,则非刚性图像配准问题就变为最小化如下目标函数:

$$C[\mathbf{u}] = S[I_1, I_2; \mathbf{u}] + \alpha R[\mathbf{u}], \quad (2)$$

式中  $R[\mathbf{u}]$  是正则项,  $\alpha$  为正则化参数。

最小化式 (2) 是一个变分问题, 设正则项  $R$  具

有形式

$$R[\mathbf{u}] = \int_{\Omega} \varphi(J\mathbf{u}(\mathbf{x})) dx, \quad (3)$$

式中:  $J\mathbf{u}(\mathbf{x})$  为位移的雅可比矩阵;

$\varphi: M_{n \times n}(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $M_{n \times n}(\mathbf{R})$  为  $n \times n$  实矩阵集合。

这样,当采用式 (1) 作为相似性测度时,式 (2) 具有如下简单形式:

$$C[\mathbf{u}] = \int_{\Omega} F(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), J\mathbf{u}(\mathbf{x})) dx, \quad (4)$$

根据变分原理,其对应的欧拉方程为

$$f(\mathbf{x}) + \alpha \operatorname{div}(\varphi_{J\mathbf{u}}(J\mathbf{u}(\mathbf{x}))) = 0, \quad (5)$$

式中  $f(\mathbf{x}) = -(I_1(\mathbf{x}) - I_2(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}))) \nabla I_2(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}))$ 。

这样,非刚性图像配准问题转变为偏微分方程的求解问题。常用方法是引入时间变量,用时间推进法 (time marching method) 求出关于时间  $t$  的偏微分方程的稳定解,即

$$\partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}) + \alpha \operatorname{div}(\varphi_{J\mathbf{u}}(J\mathbf{u}(\mathbf{x}))), \quad (6)$$

初始条件为  $\partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0$ , 其中  $\mathbf{u}_0$  为给定的初值。

## 2 正则化方法

### 2.1 线性扩散正则化

扩散配准<sup>[3]</sup>采用的正则项为

$$R[\mathbf{u}] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^d \|\nabla u_j(\mathbf{x})\|_{L_2}^2 dx,$$

它表示弹性薄膜的形变能,其主要目的是抑制位移域的震荡以获得平滑的形变。将上述正则项用矩阵形式表示为

$$R[\mathbf{u}] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|J\mathbf{u}(\mathbf{x})\|_{\mathbb{F}}^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{Tr}(J\mathbf{u}(\mathbf{x})^T J\mathbf{u}(\mathbf{x})) dx, \quad (7)$$

式中  $\|\cdot\|_{\mathbb{F}}$  表示矩阵的 Frobenius 范数,  $\operatorname{Tr}(\cdot)$  表示矩阵的迹。

由此可得欧拉方程

$$f(\mathbf{x}) + \alpha \operatorname{div}(J\mathbf{u}(\mathbf{x})) = 0. \quad (8)$$

### 2.2 自适应正则化

线性扩散正则化方法能处理较大的形变,且有快速处理算法。然而,该方法仅利用了形变域的梯度信息对整个形变域进行全局一致地平滑,且完全忽略了待配准图像的本身信息。为克服这个不足,笔者用非线性扩散取代线性扩散,且非线性扩散系数根据图像信息自适应地确定,这样既利用了图像信息又实现了自适应平滑,为此,采用正则项为

$$R[\mathbf{u}] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{Tr}(J\mathbf{u}(\mathbf{x})^T M J\mathbf{u}(\mathbf{x})) dx, \quad (9)$$

式中  $M$  既可是矩阵,称为扩散张量,也可是大于 0 的标量值,称为扩散系数。

其欧拉方程为

$$f(x) + \alpha \operatorname{div}(M \mathbf{J}u(x)) = 0, \quad (10)$$

显然，当  $M=1$  时就是线性扩散正则化。

由式 (10) 可知，自适应正则化的关键在于扩散系数的选择。正则化的主要目的是约束解空间以获得连续的、符合物理实际的形变，然而，实际形变通常是高度不均匀的。在一些区域变化比较大，而在另一些区域变化平缓，在图像的内部区域形变小且连续，而在图像的边缘区域形变大且可能并不连续，因此，需要针对形变域进行分区域的正则化，以保留符合物理实际的大形变，而不是为得到平滑的形变域而不加区分地“削平”它们。笔者注意到在非刚性图像配准中，形变较大的地方通常对应于图像的边缘区域（因为在非刚性配准前一般先进行刚性配准使得 2 个图像中对应结构绝大部分已互相重叠），如图 1。利用这个性质可在图像边界区域设置较小的扩散系数以保持形变的“原貌”，而在图像内部区域设置较大的扩散系数使得形变连续。

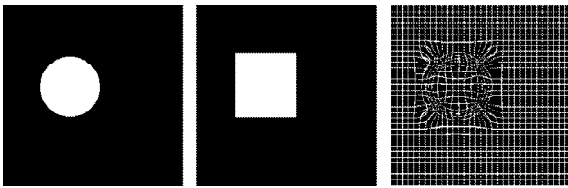


图1 矩形与圆形图像的配准

Fig. 1 Results of rectangle and circle images registration

为实现上述扩散系数的设置原则，需要找出图像中的边缘以将图像区分为内部区域和边界区域。值得注意的是，这里并不需要知道边缘的精确位置，而只要大概的“模糊”边界就可以了。根据图像边缘检测原理，图像边界区域通常具有较大的梯度幅度，而图像内部区域的梯度幅度较小，因此，扩散系数可以设计为用图像梯度幅度作为自变量的单调递减函数。

符合这些条件的函数较多。如 Perona 和 Malik<sup>[8]</sup> 在用非线性扩散滤波进行图像滤波与图像增强时所设计的 2 个函数为：

$$M(|\nabla f|) = 1 / (1 + |\nabla f|^2 / \lambda^2), \quad (11)$$

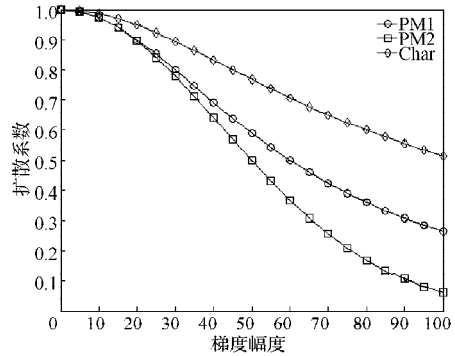
$$M(|\nabla f|) = e^{-(|\nabla f|/\lambda)^2}, \quad (12)$$

式中  $|\nabla f|$  为图像梯度幅度， $\lambda$  为梯度门限。

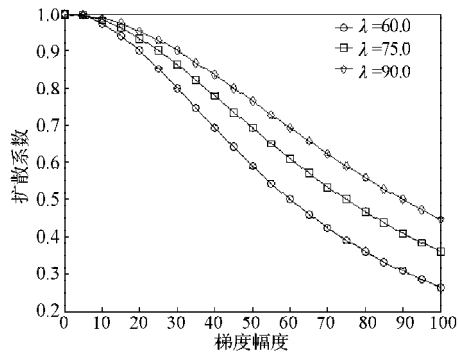
如果像素点的梯度大于门限，就认为是边缘而保留下来，如果梯度太小，就认为是噪声被平滑掉，从而选择性地平滑图像内部区域，且不会对区域之间大位移域进行盲目地压制。Charbonnier 等人<sup>[9]</sup>在计算图像的边界保持正则化方法中设计的函数为：

$$M(|\nabla f|) = 1 / \sqrt{1 + (|\nabla f|/\lambda)^2}. \quad (13)$$

用 PM1 和 PM2 分别表示式 (11) 和 (12)，用 Char 表示式 (13)，绘出扩散系数随梯度幅度变化的曲线如图 2a) 所示。可以看出，在梯度幅度较小时，3 个函数的值都接近于 1，随着梯度幅度的增大都单调递减，其中 PM2 的下降速度最快，而 Char 的下降较平缓。参数  $\lambda$  对扩散系数的影响如图 2b) 所示， $\lambda$  值越大曲线越平缓，平滑能力越强。在实际中，常取 5% ~ 10% 的像素为边界区域较合适。



a) 扩散系数与梯度幅度关系曲线



b) 不同 lambda 值的 PM1 曲线

图2 扩散系数曲线图

Fig. 2 Curve graph of diffusion coefficient

为比较不同扩散系数的平滑性能，对图 5 中的 2 个大脑磁共振造影

(magnetic resonance imaging, MRI) 图像配准过程中第 1 次迭代后  $x$  方向的位移域进行了平滑试验。原  $x$  方向的位移域见图 3，平滑试验结果见图 4 (图中位移域都取其绝对值)。

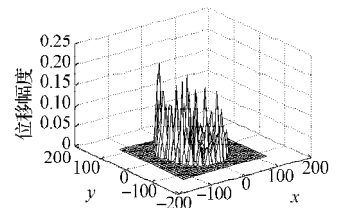
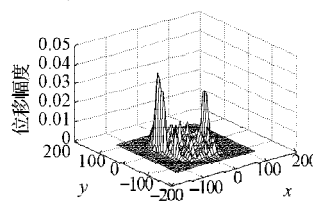
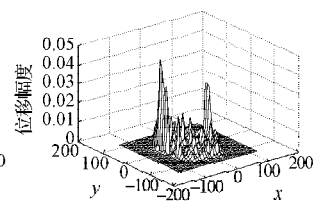


图3 x方向位移域

Fig. 3 Displacement field of x-direction



a) 线性扩散



b) Char 扩散

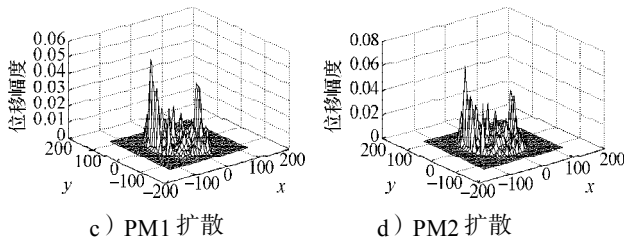


图4 位移域平滑试验结果

Fig. 4 Results of smoothing displacement field

由图4可见,分图a)所示线性扩散正则化除保留了背景区域与大脑区域边界处的较大位移外,大脑内部区域的位移被“削平”了;而分图b)~d)所示非线性扩散正则化却适当地保留了大脑内部区域的较大位移,这说明非线性扩散正则化能较好地保持形变域的细节。结合图3,比较图4中分图b)~d)可见,扩散系数随梯度下降的速度越快,位移的细节被保留的越多。

### 3 试验

为验证自适应正则化算法的性能,笔者针对合成图像与MRI图像进行了试验。考虑到三维图像的巨大数据量及由此带来的巨大计算量,笔者只采用二维图像进行试验。实验采用加性算子分裂法(additive operator splitting, AOS)算法求解式(10)的偏微分方程<sup>[10]</sup>,编程语言为Matlab。

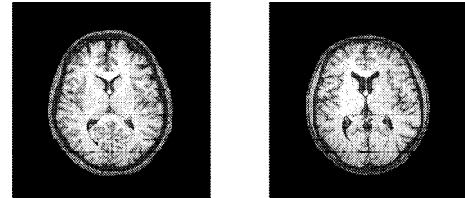
**试验1** 采用2组图像进行配准以验证新算法的性能。试验中采用的扩散系数函数为PM1,正则化参数为1,时间步长 $\tau=10$ ,试验图像及配准结果见图5。从图中可看出新的配准算法能正确地将矩形图像形变配准为C形图像,说明该算法能处理较大的形变,这主要是因为非线性扩散模型利用形变域的变化率来进行正则化,不像线弹性模型那样受本身物理模型的约束。另外,新方法收敛速度较快,从矩形到C形的图像配准过程中,30次左右的迭代就能获得视觉上较满意的配准效果。对于2个MRI图像的配准,由于其形变较小,15次迭代就得到了较为满意的效果。这主要是得益于AOS方法对任意步长绝对稳定,从而在配准过程中可以采用较大的步长,使得较少的迭代就能取得满意的结果。



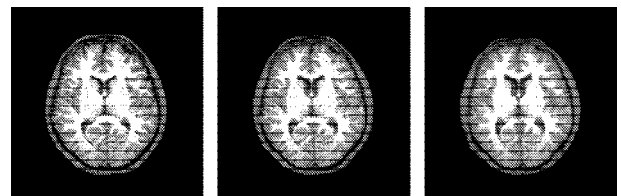
a) 合成图像原图



b) 迭代10次结果 c) 迭代20次结果 d) 迭代30次结果



e) MRI图像原图



f) 迭代3次结果 g) 迭代5次结果 h) 迭代15次结果

图5 自适应正则化图像配准结果

Fig. 5 Results of image registration by adaptive regularization

**试验2** 采用合成图像比较算法性能,试验图像如图1所示。笔者对基于黏性流体模型的配准方法、线性扩散配准方法和用PM1扩散系数的自适应正则化方法进行了比较,试验结果如图6所示。

图6给出了采用不同配准方法所得配准结果,其中2,3列为x和y方向的形变域曲面图。从图像的配准结果看,3种方法都取得了较好的视觉配准效果。但线性扩散配准与基于黏性流体模型的配准结果在原矩形图像的4个角附近还拖了一些“尾巴”,而本文提出的方法却没有出现这种现象。特别是对于线性扩散配准来说,除了扩散系数不同外其余参数的设置与采用PM1扩散系数的自适应正则化方法完全相同。当增加线性扩散的迭代次数进行试验时“尾巴”虽然有所减弱,但没有消失,这主要是由于将矩形与圆形进行配准时,矩形的4个角附近具有较大的形变。为得到平滑的形变域,全局一致的正则化方法将大的位移“削平”而匀到周边区域,使得“尾巴”无法消除。自适应正则化方法在边界处能较好地保持形变的原貌,因此,没有出现拖尾现象。仔细比较图6中2,3列的形变域曲面图也能发现,全局一致的正则化方法形变向周边扩散,形成比较平滑的形变域。

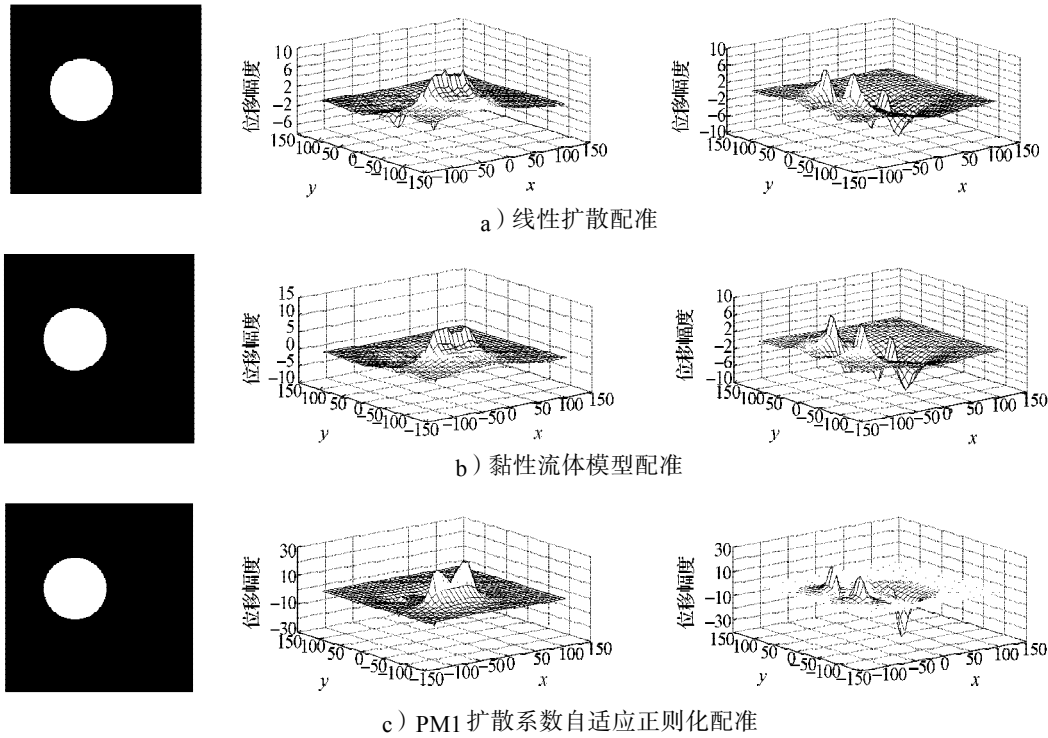


图6 配准结果及其形变域

Fig. 6 Results of registration and transformations

**试验3 量化比较配准性能。**笔者采用合成的已知形变对MRI大脑图像进行形变处理，然后用原图像与形变后的图像作为待配准的图像进行试验，结果如图7~8所示。图像的灰度值经归一化处理转变为[0, 1]，插值方法为双线性插值。

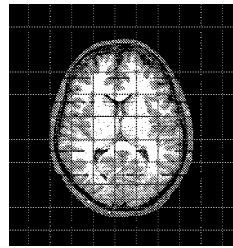


图7 原图像及控制点  
Fig. 7 Original image and control points

准后图像中的对应坐标，称之为配准坐标。通过计算基准坐标与配准坐标之间的误差来衡量算法的配准精度。如果设控制点的个数为 $N$ ，基准坐标为 $X_B = \{(x_{Bi}, y_{Bi}), i=1, 2, \dots, N\}$ ，配准后的坐标为 $X_R = \{(x_{Ri}, y_{Ri}), i=1, 2, \dots, N\}$ ，则定义配准形变误差为：

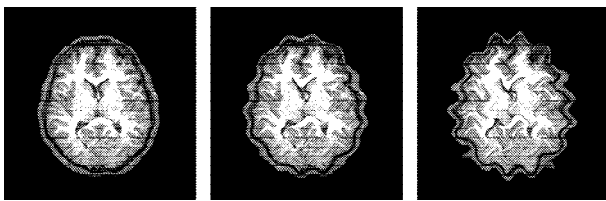
$$E_d(X_B, X_R) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (|x_{Bi} - x_{Ri}| + |y_{Bi} - y_{Ri}|)$$

此外，设 $T$ 为配准的目标图像， $R$ 为配准后的图像，定义灰度误差为：

$$E_g(T, R) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (g_T(i, j) - g_R(i, j))^2}$$

式中 $N, M$ 分别表示图像行和列的像素个数。

试验中，在确保形变域不出现交叉重叠和开裂现象的条件下，选择不同的正弦函数幅度构造了6个不同的形变域，并获得6个形变后的图像（部分图像见图8）。图像的形变幅度限制分别为 $[-1, 1], [-2, 2], [-3, 3], [-4, 4], [-5, 5], [-6, 6]$ ，因幅度为7时，形变后的图像出现了分裂现象，所以在这里选择最大幅度为6。然后，用基于黏性流体模型的配准算法、线性扩散配准算法、本文提出的配准算法（分别用char, PM1, PM2扩散系数）进行配准实验，每种算法进行6次配准并计算配准误差和灰度误差，试验结果如表1所示。为清楚起见，将表中每一列的最小形变误差值与最小灰度误差值加粗标出。由表1数据可看出：



a) 形变幅度为1 b) 形变幅度为3 c) 形变幅度为6  
图8 合成形变试验图像

Fig. 8 Test images by synthetic deformation

为比较图像配准精度，在原图像中定义了网格（见图7），网格在大脑图像内部区域的交叉点为39个，将这些交叉点作为控制点并记录各点的坐标。由于采用已知的形变域对原图像进行形变，因此能够精确地知道这些控制点在形变后图像中的对应坐标，将这些坐标作为基准坐标。当用配准算法对图像进行配准后，根据求得的形变域也能获得控制点在配

1) 在形变较小的情况下各种算法的配准误差值都较小, 灰度误差的值也较小, 说明各种算法在小形变下都能取得近似相同的配准结果。2) 当形变幅度逐渐加大时, 各种算法的误差也逐步加大。特别是当形变幅度由4增加到5时, 基于黏性流体模型方法与

线性扩散方法的误差突然加大, 而自适应正则化方法的误差变化相对较小, 且误差较小, 这说明自适应正则化方法在形变较大时具有更好的配准精度。

3) 在本文算法的3种不同扩散系数中, 基于PM1和char的方法性能指标较好, 而PM2稍差。

表1 图像配准误差  
Table 1 Image registration error

配准算法	形变幅度												
	1		2		3		4		5		6		
	形变	灰度	形变	灰度	形变	灰度	形变	灰度	形变	灰度	形变	灰度	
黏性流体模型	<b>0.045 7</b>	0.921 5	0.262 3	1.895 9	0.954 8	2.672 6	1.991 5	<b>3.227 1</b>	4.393 1	4.206 6	5.526 4	4.453 9	
线性扩散	0.052 0	0.713 6	0.267 2	1.831 7	0.941 8	2.931 0	1.970 5	3.382 4	5.063 1	4.172 4	6.416 3	5.123 5	
自适应	char	0.055 1	0.692 1	<b>0.229 8</b>	1.889 8	0.810 3	<b>2.493 8</b>	<b>1.543 4</b>	3.666 4	3.104 5	<b>4.033 4</b>	3.426 5	4.722 6
扩散	PM1	0.058 2	<b>0.668 8</b>	0.313 9	1.892 0	<b>0.771 2</b>	2.956 5	1.562 6	3.828 7	<b>2.526 2</b>	4.101 0	<b>3.393 4</b>	<b>4.198 6</b>
	PM2	0.060 1	0.753 7	0.367 6	<b>1.812 0</b>	0.843 8	2.936 3	1.871 0	3.616 7	2.999 3	4.403 5	3.508 9	4.986 0

## 4 结语

本文提出了一种新的自适应正则化非刚性图像配准方法。从非刚性配准的数学模型出发, 介绍了线性扩散配准方法, 并将其扩展到非线性扩散的自适应正则化方法。研究了不同扩散系数对形变域平滑的影响, 试验中发现随梯度幅度下降越快的扩散系数越能保持形变域的细节。合成图像与MRI图像的试验结果表明, 新算法具有能处理较大的形变, 收敛速度快的优点。与线性扩散配准、黏性流体模型配准方法相比, 非线性扩散自适应配准方法视觉效果较好, 也取得了更好的配准精度。进一步的工作将研究更有效地利用图像信息来设置扩散系数, 如灰度信息、空域信息及二者相结合等。

### 参考文献:

[1] Holden M. A Review of Geometric Transformations for Nonrigid Body Registration[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2008, 27(1): 111-128.  
 [2] Chiang M C, Leow A D, Klunder A D. et al. Fluid Registration of Diffusion Tensor Images Using Information Theory[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2008, 27(4): 442-456.  
 [3] Fischer Bernd, Modersitzki Jan. Curvature Based Image Registration[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2003, 18(1): 81-85.  
 [4] 林相波, 邱天爽, 阮 素, 等. Demons非刚性配准算法

拓扑保持性的研究[J]. 自动化学报, 2010, 36(1): 179-183.

Lin Xiangbo, Qiu Tianshuang, Ruan Su, et al. Research on the Topology Preservation of the Demons Non-Rigid Registration Algorithm[J]. Acta Automatica Sinica, 2010, 36(1): 179-183.

[5] Stefanescu Radu, Pennec Xavier, Ayache Nicholas. Grid Powered Nonlinear Image Registration with Locally Adaptive Regularization[J]. Medical Image Analysis, 2004, 8(3): 325-342.  
 [6] Pitiot Alain, Guimond Alexandre. Geometrical Regularization of Displacement Fields for Histological Image Registration [J]. Medical Image Analysis, 2008, 12(1): 16-25.  
 [7] Tang Lisa, Hamarneh Ghassan, Abugarbieh Rafeef. Reliability-Driven, Spatially-Adaptive Regularization for Deformable Registration[C]//Biomedical Image Registration. Berlin: Springer, 2010: 173-185.  
 [8] Perona P, Malik J. Scale Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 12(7): 629-639.  
 [9] Charbonnier P, Blanc-Feraud L, Aubert G, et al. Two Deterministic Half-Quadratic Regularization for Computed Imaging[C]//ICIP-94. Austin Texas: IEEE Computer Society Press, 1994, 2: 168-172.  
 [10] Weickert J, Romeny B M T H, Viergever M A. Efficient and Reliable Schemes for Nonlinear Diffusion Filtering[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1998, 7(3): 398-410.

(责任编辑: 李玉珍)