第25卷 第3期 湖 南 工 业 大 学 学 报 Vol.25 No.3
2011年5月 Journal of Hunan University of Technology May 2011

双稀疏过程在破产问题中的应用

刘罗华，汤 琼

（湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412007）

摘 要：研究了一类双稀疏的风险过程，其中保单到达过程是一个强度为λ的Poisson过程，而索赔发生过程是保单到达过程的p-稀疏过程和q-稀疏过程的双Poisson过程。对此模型给出了其破产概率的具体上界，并与其它一类风险模型进行了比较。

关键词：破产概率；Poisson过程；稀疏过程

中图分类号：O211.67 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9833(2011)03-0067-03

The Applications of Double Thinning Process in Risk Problem

Liu Luohua，Tang Qiong

（School of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412007，China）

Abstract: Discusses a double thinning risk process, which the arrival of policy is a λ Poisson process and the claims occurring is the policy arrival′ s double Poisson process of p-thinning process and q-thinning process. For this model, gives its upper bound of the ruin probability, and compares with other risk models.

Keywords: ruin probability; Poisson process; thinning process

1 模型的引入和推广

在保险公司经营的险种中，常会出现1种险种发生多种索赔的情形。如机动车辆交强险，事故发生后，同一份保单的车辆损伤索赔额与受害人索赔额往往不一样，都是随机变量。本文在该险种背景下建立了双复合Poisson风险模型，为研究方便，假设索赔的2个随机变量是独立的，且都是保单数的稀疏过程，由此得到了该模型的Lundberg不等式及其破产概率的具体上界，并与复合Poisson过程进行比较，为保险公司的经营决策提供理论依据。

定义1 假设风险模型$\{U(t), t \geq 0\}$满足条件

$$U(t) = u + cM(t) - \sum_{k=1}^{N_1(t)} x_k - \sum_{k=1}^{N_2(t)} z_k = u + cM(t) - S_1(t) - S_2(t) = u + S(t)\,, \tag{1}$$

式中：$U(t)$为盈余过程；

u为初始准备金；

$\{M(t)\}$为$(0, t]$内保险公司收到的保单数，它是参数为λ的Poisson过程；

c表示保单单位时间内收取的平均保费；

$N_1(t)$为$(0, t]$内发生索赔的次数，是保单到达过程的p-稀疏过程，参数为$p\lambda$，且$0<p<1$；

$N_2(t)$为$(0, t]$内发生索赔的次数，是保单到达过程的q-稀疏过程，参数为$q\lambda$，且$0<q<1$；

收稿日期：2011-03-14

基金项目：湖南省教育厅科研基金资助项目（10C0607），湖南省科技厅科研基金资助项目（2010FJ4109），湖南省自科基金资助项目（10JJ6003），湖南省教育厅教学改革基金资助项目（(湘教通2010)243-255）

作者简介：刘罗华（1969-），男，湖南茶陵人，湖南工业大学副教授，硕士，主要研究方向为金融风险随机问题，E-mail：zzgxyllh@163.com

$p+q<1$；

$\{x_k\},\{z_k\}$为独立同分布的变量序列；

$S_1(t)=\sum_{k=1}^{N_1(t)}x_k$是概率为$p$的索赔过程；

$S_2(t)=\sum_{k=1}^{N_2(t)}z_k$是概率为$q$的索赔过程；

$S(t)=cM(t)-S_1(t)-S_2(t)$为盈利过程。

若$\{M(t)\},\{x_k\},\{z_k\}$相互独立，$S_1(t)$, $S_2(t)$也相互独立[1]，则本文中将式（1）所定义的风险模型称之为双复合Poisson稀疏过程风险模型。

定义2 双复合Poisson稀疏过程风险模型的破产时刻为$T_u=\inf_{t\ge0}\{t:U(t)<0\}$。

定义3 双复合Poisson稀疏过程风险模型的最终破产概率为$\Psi(u)=P\{T_u<\infty|U(0)=u\}$。

记$h_x(r)=\int_0^\infty e^{rx}dF(x)-1$，并假定存在$r_\infty>0$，当$r\uparrow r_\infty^{(x)}$时有$h_x(r)\uparrow+\infty$。

记$h_z(r)=\int_0^\infty e^{rz}dF(z)-1$，并假定存在$r_\infty>0$，当$r\uparrow r_\infty^{(z)}$时有$h_z(r)\uparrow+\infty$。

2 主要结果

定理1 对于盈利过程$\{S(t),t\ge0\}$，存在函数$g(r)$，使得$E\left[e^{-rS(t)}\right]=e^{tg(r)}$[2]。

证 由$S(t)=cM(t)-S_1(t)-S_2(t)$可知

$$E\left[e^{-rS(t)}\right]=E\left[\exp\left(-rcM(t)+r\sum_{i=1}^{N_1(t)}x_i+r\sum_{i=1}^{N_2(t)}z_i\right)\right]=$$
$$E\left\{E\left[\exp\left(-rcM(t)+r\sum_{i=1}^{N_1(t)}x_i+r\sum_{i=1}^{N_2(t)}z_i\right)\middle|M(t)\right]\right\}=$$
$$\sum_{i=1}^{\infty}\exp(-rci)E\left[\exp\left(r\sum_{i=1}^{N_1(t)}x_i+r\sum_{i=1}^{N_2(t)}z_i\right)\middle|M(t)=i\right]\cdot$$
$$\exp(-\lambda t)(\lambda t)^i/i!。$$

又$E\left[\exp\left(r\sum_{i=1}^{N_1(t)}x_i\right)\middle|M(t)=i\right]=[ph_x(r)+1]^i$，

$$E\left[\exp\left(r\sum_{i=1}^{N_2(t)}z_i\right)\middle|M(t)=i\right]=[qh_z(r)+1]^i,$$

所以

$$E\left[e^{-rS(t)}\right]=\exp(-\lambda t)\exp\{\lambda te^{-rc}[ph_x(r)+1]\cdot$$
$$[qh_z(r)+1]\}=e^{tg(r)},$$

从而

$$g(r)=-\lambda+\lambda e^{-rc}[ph_x(r)+1][qh_z(r)+1],$$
$$0<r<\min\{r_\infty^{(x)},r_\infty^{(z)}\}。$$

令$g(r)=-\lambda+\lambda e^{-rc}[ph_x(r)+1][qh_z(r)+1]=0$，（2）

则R为式（2）的非零正解。

定理2 $M_u(t)=E[\exp(-rU(t)-tg(r))]$是一$F_t^s$鞅，其中$F_t^s=\sigma(U(s);s\le t)$[3]。

定理3 对于任意的$u\ge0$，有$\Psi(u)\le e^{-Ru}$，其中R为式（2）的非零正解，$0<r<\min\{r_\infty^{(x)},r_\infty^{(z)}\}$。

证明 由T_u的定义知其为F_t^s停时，任选$T_0<\infty$，则$T_0\Lambda T_u$为有界停时，根据鞅的性质

$$e^{-ru}=M_u(0)=E[M_u(T_0\Lambda T_u)|T_u\le T_0]P\{T_u\le T_0\}+$$
$$E[M_u(T_0\Lambda T_u)|T_u\ge T_0]P\{T_u\ge T_0\}\ge$$
$$E[M_u(T_u)|T_u\le T_0]P\{T_u\le T_0\},$$

于是有

$$P\{T_u\le T_0\}\le e^{-ru}/E[M_u(T_u)|T_u\le T_0]\le$$
$$e^{-ru}/E[\exp(-T_ug(r))|T_u\le T_0]\le e^{-ru}\sup_{0\le t\le t_0}e^{tg(r)}。$$

在上式两端令$T_0\to\infty$，在条件$e^{-ru}\sup_{t\ge0}e^{tg(r)}<\infty$时，则得$\Psi(u)\le e^{-Ru}$。

3 参考模型介绍

建立风险过程如式（3）

$$U'(t)=u+cM'(t)-\sum_{k=1}^{N_1'(t)}x_k'-\sum_{k=1}^{N_2'(t)}z_k'=$$
$$u-S_1'(t)-S_2'(t),\tag{3}$$

式中：$\{M'(t)\}$表示$(0,t]$内保险公司收到的保单数，是参数为λ'的Poisson过程；

c表示保单单位时间内收取的平均保费；

$N'_1(t)$为$(0,t]$内发生索赔的次数，是过程参数为λ'_1的Poisson过程；

$N'_2(t)$为$(0,t]$内发生索赔的次数，是过程参数为λ'_2的Poisson过程。

记$h_{x'}(r)=M_{x'}(r)-1,h_{z'}(r)=M_{z'}(r)-1$，则有：

定理4 对于盈利过程$\{S''(t),t\ge0\}$，存在函数$g'(r)$，使得$E\left[e^{-rS''(t)}\right]=e^{tg'(r)}$，其中

$g'(r)=\lambda_1'h_{x'}'(r)+\lambda_2'h_{z'}'(r)-\lambda'\left(e^{-rc'}-1\right)$。

证明 令$S''(t)=cM'(t)-S_1'(t)-S_2'(t)$，则有

$$E\left[e^{-rS''(t)}\right]=E\left[\exp\left(-rc'M'(t)+r\sum_{i=1}^{N_1'(t)}x_i'+\right.\right.$$
$$\left.\left.r\sum_{i=1}^{N_2'(t)}z_i'\right)\right]=E[\exp(-rc'M'(t))]+$$
$$E\left[\exp\left(r\sum_{i=1}^{N_1'(t)}x_i'\right)\right]+E\left[\exp\left(r\sum_{i=1}^{N_2'(t)}z_i'\right)\right],$$

又$E\left[\exp(-rc'M'(t))\right]=\exp\left[\left(\mathrm{e}^{-rc'}-1\right)\lambda' t\right]$,

$$E\left[\exp\left(r\sum_{i=1}^{N_1'(t)}x_i'\right)\right]=\exp\left(\lambda_1' t h_{x'}'(r)\right),$$

$$E\left[\exp\left(r\sum_{i=1}^{N_2'(t)}z_i'\right)\right]=\exp\left(\lambda_2' t h_{z'}'(r)\right),$$

所以有

$$E\left[\mathrm{e}^{-rS''(t)}\right]=\exp\left[\lambda_1' h_{x'}'(r)+\lambda_2' h_{z'}'(r)-\lambda'\left(\mathrm{e}^{-rc'}-1\right)\right]=\mathrm{e}^{tg'(r)}$$

从而

$$g'(r)=\lambda_1' h_{x'}'(r)+\lambda_2' h_{z'}'(r)-\lambda'\left(\mathrm{e}^{-rc'}-1\right),$$
$$0<r<\min\left\{r_\infty^{(x')}, r_\infty^{(z')}\right\}。$$

定理5　在风险过程（3）中，对任意的$u'\geq 0$，有$\psi(u')=\dfrac{\mathrm{e}^{-R'u'}}{E\left[E^{R \cdot U'(T)}\middle|T<\infty\right]}$[4]，其中：$R'$为方程

$$\lambda_1' h_{x'}'(r)+\lambda_2' h_{z'}'(r)-\lambda'\left(\mathrm{e}^{-rc'}-1\right)=0 \qquad (4)$$

的非零正根。

4　模型的比较

下面对风险过程（1）和（3）的最终破产概率上界进行比较。假设R和R'分别为风险过程（1）与（3）的Lundberg指数，下面讨论两者之间的关系。引入下列引理[5]。

引理1　设在区间$[0,\beta]$上，函数$h(r)$, $m(r)$及$n(r)$连续可导且单调递增，且$\lim\limits_{r\to\beta^-}h(r)=+\infty$，$m(\beta)<\infty$，$n(\beta)<\infty$，任意$r\in(0,\beta)$，$m(r)<n(r)$，又$R_1$为$h(r)-m(r)=0$的唯一正解，$R_2$为$h(r)-n(r)=0$的唯一正解，则有$R_1<R_2$。

为得到较好的比较效果，笔者假定风险过程（1）和（3）有相同的平均保费收入速率λ，且有相同的理赔强度$N_1(t)$, $N_1'(t)$, $N_2(t)$, $N_2'(t)$和相同的理赔速率x, x', z, z'，故有$\lambda_1'=p\lambda=\lambda_2'=q\lambda$，即$p=q$，所以有

$$h_{x'}(r)=h_x(r)=h_{z'}(r)=h_z(r)=h(r)。 \qquad (5)$$

将式（5）代入式（4）可得$h(r)=\left(1-\mathrm{e}^{-rc}\right)/2p$，将式（5）代入式（2）可得$h(r)=\left(\sqrt{\mathrm{e}^{rc}}-1\right)/p$。

令$m(r)=\left(1-\mathrm{e}^{-rc}\right)/2p$，$n(r)=\left(\sqrt{\mathrm{e}^{rc}}-1\right)/p$，则

$$n(r)-m(r)=\left(\sqrt{\mathrm{e}^{rc}}-1\right)/p-\left(1-\mathrm{e}^{-rc}\right)/2p=\left[2\sqrt{\mathrm{e}^{rc}}+\mathrm{e}^{-rc}-3\right]/2p,$$

因此$\mathrm{d}\left(2\sqrt{\mathrm{e}^{rc}}+\mathrm{e}^{-rc}-3\right)/\mathrm{d}r=c\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}rc}-1\right)/\mathrm{e}^{rc}>0$，即$\left(2\sqrt{\mathrm{e}^{rc}}+\mathrm{e}^{-rc}-3\right)$在$r\geq 0$时单调递增，又$n(0)-m(0)=0$，所以$n(r)>m(r)$。

由于R, R'分别为式（2）与式（4）对应的非零正解，由引理1可知：$R>R'$。

5　结语

由文中推导可知在相同的索赔发生强度和理赔速率条件下，风险过程（1）与（3）相比，（1）所描述的风险模型其最终破产概率已被控制在一个较小的范围，这也说明模型（1）更可取。

参考文献：

[1] 赵晓芹，刘再明. 一类双险种风险过程的破产概率的估计[J]. 数学理论与应用，2004，24(1)：97-100.
Zhao Xiaoqin，Liu Zaiming. An Estimate of the Ruin Probability of a Doubletype Insurance Risk Process[J]. Mathematical Theory and Applications，2004，24(1)：97-100.

[2] 刘罗华，邹捷中. 稀疏过程在双险种破产问题中的应用[J]. 株洲工学院学报，2006，20(4)：12-14.
Liu Luohua，Zou Jiezhong. The Applications of Thinning Process in Two-Type-Risk Problem[J]. Journal of Zhuzhou Institute of Technology，2006，20(4)：12-14.

[3] 成世学. 破产论研究综述[J]. 数学进展，2002，31(5)：403-422.
Cheng Shixue. The Survey for Researches of Ruin Theory [J]. Advances in Mathematicas，2002，31(5)：403-422.

[4] 陈占斌，刘再明. 稀疏过程在破产问题中的应用[J]. 数学理论与应用，2005，25(1)：35-38.
Chen Zhanbin，Liu Zaiming. The Applications of Thinning Process in Risk Problem[J]. Mathematical Theory and Applications，2005，25(1)：35-38.

[5] 陈珊萍，王过京，王振羽. 稀疏过程在保险公司破产问题中的应用[J]. 数理统计与管理，2001，20(5)：26-30.
Chen Shanping，Wang Guojing，Wang Zhenyu. The Applications of Thinning Process in Insurance Company′s Risk Problem[J]. Applications of Statistics and Management，2001，20(5)：26-30.

（责任编辑：李玉珍）