

# 润滑油动力黏度对转子系统动力学行为的影响

黑 棣

(陕西铁路工程职业技术学院 机电工程系, 陕西 渭南 714000)

**摘要:** 根据转子动力学理论, 建立了转子-轴承系统的力学模型及非线性动力学方程。将 Newmark 法、预估-校正机理和 Newton-Raphson 法相结合, 得到了一种有效地求解动力学系统不平衡响应的方法, 并以柔性转子轴承处润滑油的动力黏度为控制参数, 求解了转子系统的不平衡响应。运用 Floquet 分岔理论和 Poincaré 映射分析了转子不平衡周期响应的稳定性, 数值结果揭示了系统具有周期运动、二周期运动、四周期运动等非线性现象。

**关键词:** 转子系统; Newmark 法; 分岔; 稳定性; 动力黏度

**中图分类号:** TH133

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1673-9833(2011)02-0026-05

## The Impact of Lubricant Dynamic Viscosity on Dynamics Behaviors of Rotor System

Hei Di

(Department of Electrical and Mechanical Engineering, Shanxi Railway Institute, Weinan Shanxi 714000, China)

**Abstract:** The dynamic model and nonlinear dynamic equation of rotor-bearing system are established based on rotor dynamics. Combining the Newmark method, the predictor-corrector mechanism and Newton-Raphson method, a solution to the unbalanced response of dynamics system are obtained. With the lubricant dynamic viscosity of flexible rotor bearing as the control parameter, nonlinear dynamic responses of rotor system are determined. The stability of the rotor unbalance response cycle is analyzed on the basis of Floquet bifurcation theory and Poincaré map. Numerical results indicate that the system has nonlinear phenomena of periodic motion, 2-periodic motion, 4-periodic motion etc.

**Keywords:** rotor system; Newmark method; bifurcation; stability; dynamic viscosity

轴承-转子系统在工业领域应用很广。现在大型旋转机械转子的转速在不断地提高, 转子的高速旋转会对转子轴承处润滑油的动力黏度产生一定的影响。润滑油动力黏度的变化会引起转子系统油膜力的变化, 在这种情况下, 转子轴承处润滑油动力黏度就成为整个旋转机械的一个重要的系统参数, 它的变化会引起转子系统运动状态的较大变化, 甚至会导致发生事故。本文就以转子轴承处润滑油动力黏度为参数, 对转子的非线性动力学行为进行分析。

本文提出的方法是将 Newmark 法改进后形成的

一种求解系统响应的迭代方法, 该方法在迭代之前首先预估出下一时刻的位移、速度和加速度, 然后运用 Newton-Raphson 方法校正。而且迭代仅仅在非线性的自由度上进行, 通过迭代求解出非线性自由度之后, 再求解线性方程组就可得线性自由度, 所以, 该方法可以节约大量计算时间。

### 1 转子的运动方程

动压轴承-对称柔性转子系统模型见图 1。

收稿日期: 2011-01-11

作者简介: 黑 棣 (1983-), 男, 山西朔州人, 陕西铁路工程职业技术学院教师, 工学硕士, 主要从事非线性动力学方面的研究, E-mail: drillok@126.com

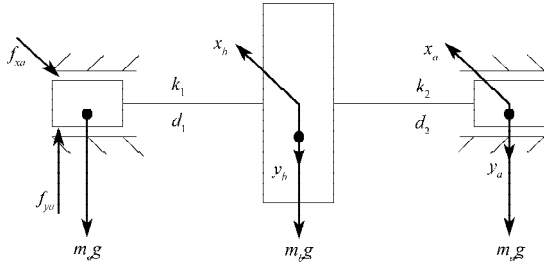


图1 流体动压滑动轴承-柔性转子系统示意图

Fig. 1 Sketch of hydrodynamic bearing-flexible rotor system

流体动压滑动轴承支承的对称柔性转子系统动力学方程可写为

$$M\ddot{\mathbf{x}} + C\dot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{f} + \mathbf{Q}, \quad (1)$$

式中:  $M$ ,  $C$  和  $K$  分别为转子质量、阻尼和刚度矩阵;

$\mathbf{f}$  是轴承的非线性油膜力向量;

$\mathbf{Q}$  是施加在转子上的周期激励力 (与转速同步的不平衡激励或汽动力激励) 向量;

$\mathbf{x}$  是转子的位移向量。

系统参数分别为:

$$M = \begin{bmatrix} m_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = [x_a \quad y_a \quad x_b \quad y_b]^T,$$

$$C = \begin{bmatrix} 24\beta EI/l^3 & 0 & -24\beta EI/l^3 & 0 \\ 0 & 24\beta EI/l^3 & 0 & -24\beta EI/l^3 \\ -48\beta EI/l^3 & 0 & 48\beta EI/l^3 & 0 \\ 0 & -48\beta EI/l^3 & 0 & 48\beta EI/l^3 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 24EI/l^3 & 0 & -24EI/l^3 & 0 \\ 0 & 24EI/l^3 & 0 & -24EI/l^3 \\ -48EI/l^3 & 0 & 48EI/l^3 & 0 \\ 0 & -48EI/l^3 & 0 & 48EI/l^3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f} = [-f_{xa} \quad -f_{ya} \quad 0 \quad 0]^T,$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} m_a e_x^a \omega^2 \cos \omega t + m_a e_y^a \omega^2 \sin \omega t \\ m_a e_x^a \omega^2 \cos \omega t - m_a e_y^a \omega^2 \sin \omega t + m_a g \\ m_b e_x^b \omega^2 \cos \omega t + m_b e_y^b \omega^2 \sin \omega t \\ m_b e_x^b \omega^2 \cos \omega t - m_b e_y^b \omega^2 \sin \omega t + m_b g \end{bmatrix}.$$

在上述参数表达式中,  $m_a, m_b$  分别为集总到 2 个轴颈及圆盘处的质量, 且有  $2m_a + m_b = 2mg$  ( $m$  为转子总质量);  $E$  和  $I$  分别为转子的弹性模量及转子截面的赤道惯性矩;  $l$  为 2 轴承的中心距离;  $\beta = 0.00193$  为常数;  $g$  为重力加速度;  $e_i^j$  ( $i = x, y; j = a, b$ ) 是轴承及圆盘处不平衡质量偏心距在  $x, y$  方向的分量;  $f_{xa}, f_{ya}$  分别是 2 个轴承在  $x$  和  $y$  负方向的非线性油膜力分量。

## 2 算法简介及预估校正

本文采用改进的 Newmark 法对对称柔性转子系统的非线性动力学响应进行求解。该模型是具有局部非线性的动力系统, 求解时可将系统分为线性部分和非线性部分。

式 (1) 所表示的非线性动力系统的运动微分方程可写为

$$\begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ab} \\ M_{ba} & M_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_a \\ \ddot{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{aa} & C_{ab} \\ C_{ba} & C_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_a \\ \dot{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_a \\ \mathbf{Q}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \mathbf{f}_b \end{bmatrix}, \quad (2)$$

式中:  $\mathbf{f}_a = [f_{xa} \quad f_{ya}]^T$ ,  $\mathbf{f}_b = [0 \quad 0]^T$ ,  $\mathbf{x}_a = [x_a \quad y_a]^T$  表示轴承处的非线性自由度,  $\mathbf{x}_b = [x_b \quad y_b]^T$  表示圆盘处的线性自由度, 且  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_a \quad \mathbf{x}_b]^T$ 。

根据 Newmark 法的假设, 在  $\tau = \Delta t$  时,  $\ddot{\mathbf{x}}^{t+\Delta t}$ ,  $\dot{\mathbf{x}}^{t+\Delta t}$  和  $\mathbf{x}^{t+\Delta t}$  可写为

$$\ddot{\mathbf{x}}^{t+\Delta t} = a_0 (\mathbf{x}^{t+\Delta t} - \mathbf{x}^t) - a_2 \dot{\mathbf{x}}^t - a_3 \ddot{\mathbf{x}}^t, \quad (3)$$

$$\dot{\mathbf{x}}^{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{x}}^t + a_6 \ddot{\mathbf{x}}^t + a_7 \ddot{\mathbf{x}}^{t+\Delta t}, \quad (4)$$

$$\mathbf{x}^{t+\Delta t} = \mathbf{x}^t + \Delta t \dot{\mathbf{x}}^t + \Delta t^2 [(0.5 - \alpha) \ddot{\mathbf{x}}^t + \alpha \ddot{\mathbf{x}}^{t+\Delta t}], \quad (5)$$

式中:  $a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}$ ,  $a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}$ ,  $a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1$ ,  $\gamma \geq 0.5$ ,

$a_6 = \Delta t(1 - \gamma)$ ,  $a_7 = \gamma \Delta t$ ,  $\alpha \geq 0.25(0.5 + \gamma)^2$ 。

将式 (3) 和 (4) 代入式 (2) 可得

$$\begin{bmatrix} \hat{K}_{aa} & \hat{K}_{ab} \\ \hat{K}_{ba} & \hat{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a^{t+\Delta t} \\ \mathbf{x}_b^{t+\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_a^{t+\Delta t} \\ \mathbf{f}_b^{t+\Delta t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_a^{t+\Delta t} \\ \mathbf{Q}_b^{t+\Delta t} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

式中:

$$\begin{bmatrix} \hat{K}_{aa} & \hat{K}_{ab} \\ \hat{K}_{ba} & \hat{K}_{bb} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_0 M_{aa} + a_1 C_{aa} + K_{aa} & a_0 M_{ab} + a_1 C_{ab} + K_{ab} \\ a_0 M_{ba} + a_1 C_{ba} + K_{ba} & a_0 M_{bb} + a_1 C_{bb} + K_{bb} \end{bmatrix}; \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{Q}_a^{t+\Delta t} \\ \hat{Q}_b^{t+\Delta t} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_a^{t+\Delta t} + M_{aa} \mathbf{P}_a^t + M_{ab} \mathbf{P}_b^t + C_{aa} \mathbf{R}_a^t + C_{ab} \mathbf{R}_b^t \\ \mathbf{Q}_b^{t+\Delta t} + M_{ba} \mathbf{P}_a^t + M_{bb} \mathbf{P}_b^t + C_{ba} \mathbf{R}_a^t + C_{bb} \mathbf{R}_b^t \end{bmatrix}, \quad (8)$$

式 (8) 中  $\begin{cases} \mathbf{P}_j^t = a_0 \mathbf{x}_j^t + a_2 \dot{\mathbf{x}}_j^t + a_3 \ddot{\mathbf{x}}_j^t, \\ \mathbf{R}_j^t = a_1 \mathbf{x}_j^t + a_4 \dot{\mathbf{x}}_j^t + a_5 \ddot{\mathbf{x}}_j^t, \end{cases}$  (9)

而式 (9) 中  $a_1 = \frac{\gamma}{\alpha \Delta t}$ ,  $a_4 = \frac{\gamma}{\alpha} - 1$ ,  $a_5 = \left( \frac{\gamma}{2\alpha} - 1 \right) \Delta t$ ;

$$\mathbf{f}_b^{t+\Delta t} = \mathbf{0}; \quad (10)$$

$$f_a^{t+\Delta t} = f_a(x_a^{t+\Delta t}, \dot{x}_a^{t+\Delta t}) \quad (11)$$

由于式(2)描述的动力系统具有局部非线性特征, 因此对该系统进行非线性分析时, 需迭代求解式(6), 且对式(6)的迭代求解仅在非线性自由度上进行。

将式(6)展开可得

$$\begin{cases} \hat{K}_{aa}x_a^{t+\Delta t} + K_{ab}x_b^{t+\Delta t} = f_a^{t+\Delta t} + \hat{Q}_a^{t+\Delta t}, \\ \hat{K}_{ba}x_a^{t+\Delta t} + K_{bb}x_b^{t+\Delta t} = \hat{Q}_b^{t+\Delta t}, \end{cases} \quad (12)$$

从式(12)中可得

$$\Phi_a x_a^{t+\Delta t} = f_a^{t+\Delta t} + B_a \quad (13)$$

式中:  $\Phi_a = \hat{K}_{aa} - K_{ab} \hat{K}_{bb}^{-1} K_{ba}$ ;

$$B_a = \hat{Q}_a^{t+\Delta t} - \hat{K}_{ab} K_{bb}^{-1} \hat{Q}_b^{t+\Delta t}.$$

在对式(13)求解时, 采用Newton-Raphson迭代法对其进行迭代求解, 其具体的迭代格式如下:

$$x_{a,k+1}^{t+\Delta t} = x_{a,k}^{t+\Delta t} - \left( \Phi_a - \frac{\partial f_{a,k}^{t+\Delta t}}{\partial x_{a,k}^{t+\Delta t}} \right)^{-1} (\Phi_a x_{a,k}^{t+\Delta t} - B_a - f_{a,k}^{t+\Delta t}), \quad k=0,1,2,\dots, \quad (14)$$

式中:  $\frac{\partial f_{a,k}^{t+\Delta t}}{\partial x_{a,k}^{t+\Delta t}}$  是非线性油膜力的 Jacobian 矩阵。

在求得非线性自由度  $x_a^{t+\Delta t}$  后, 可以通过求解线性方程得到线性自由度  $x_b^{t+\Delta t}$ , 线性方程如下:

$$K_{bb}^{-1} x_b^{t+\Delta t} = \hat{Q}_b^{t+\Delta t} - \hat{K}_{ba} x_a^{t+\Delta t} \quad (15)$$

在求得  $x_a^{t+\Delta t}$  和  $x_b^{t+\Delta t}$  之后, 再利用式(3)和式(4)求出速度和加速度。

为了提高迭代的收敛速度, 在每一时刻开始迭代前, 采用式(16)的格式对初值进行预估, 然后采用式(14)对其进行校正。

$$\begin{cases} x^{t+\Delta t} = x^t + \Delta t \dot{x}^t + \frac{1}{2} q \Delta t^2 \ddot{x}^t, \\ \dot{x}^{t+\Delta t} = \dot{x}^t + \Delta t q \ddot{x}^t, \\ \ddot{x}^{t+\Delta t} = \ddot{x}^t, \end{cases} \quad (16)$$

式中:  $q$  决定着方法的稳定性, 当  $q \leq 0.1$  时算法是稳定的, 通常取  $q=0.1$ 。

### 3 数值算例及结果

本文采用图1所示动压轴承-对称柔性转子系统模型, 为了理论推演和计算方便, 以使研究结果具有更为广泛的适用性, 通常引入以下无量纲变量:

$$F_{Xa} = \frac{f_{Xa}}{\sigma mg}, F_{Ya} = \frac{f_{Ya}}{\sigma mg}, \tau = \omega t, \bar{\omega} = \omega \sqrt{\frac{c}{g}};$$

$$X_j = \frac{x_j}{c}, Y_j = \frac{y_j}{c}, \bar{e}_x^j = \frac{e_x^j}{c}, \bar{e}_y^j = \frac{e_y^j}{c}, \bar{m}_j = \frac{m_j}{c}, \quad j=a, b;$$

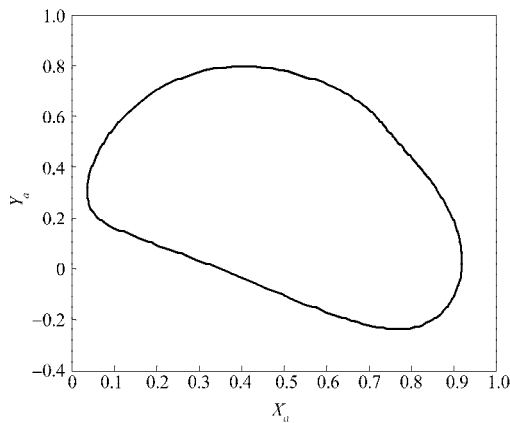
$$\bar{k}_l = \frac{k_l c}{mg}, \bar{d}_l = \frac{d_l}{m} \sqrt{\frac{c}{g}}, \quad l=1, 2.$$

在上述无量纲变量关系中,  $F_{Xa}, F_{Ya}$  分别为无量纲油膜力在  $x$  和  $y$  方向的分量;  $\tau$  为无量纲时间;  $\bar{\omega}$  为转子的无量纲转速;  $X, Y$  分别为轴颈中心在  $x, y$  方向的无量纲位移分量;  $\bar{e}_x^j, \bar{e}_y^j$  为  $x, y$  方向的无量纲偏心距;  $\bar{m}_j$  为无量纲质量;  $\bar{k}_l$  为无量纲刚度;  $\bar{d}_l$  为无量纲阻尼。而  $c$  为轴承半径间隙;  $m$  为转子质量的一半;  $\sigma = \mu B \omega R^3 / mgc^2$  为 Sommerfeld 数, 是表征系统载荷的参数, 其中  $B$  为轴承宽度,  $\mu$  为润滑油动力黏度,  $R$  为轴承半径。

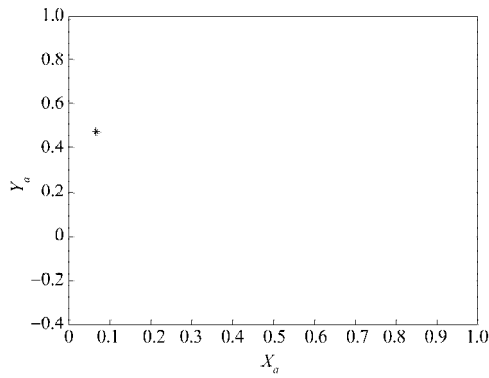
计算所选系统参数为: 轴承为  $360^\circ$  圆轴承, 轴承宽度  $B=0.12$  m, 长径比  $B/d=1$ , 间隙比  $\psi=0.0035$ , 轴承半径间隙  $c=0.175$  mm。

转子的各无量纲参数分别为:  $\bar{m}_a = 0.6918363, \bar{m}_b = 0.6163274, \bar{k}_1 = \bar{k}_2 = 0.7394123, \bar{d}_1 = \bar{d}_2 = 0$ , 轴承处转子的偏心量在  $X, Y$  方向的分量均为 0 (即  $\bar{e}_x^a = 0, \bar{e}_y^a = 0$ ), 圆盘偏心量在  $X$  方向的分量为 0, 在  $Y$  方向的分量为 0.7 (即  $\bar{e}_x^b = 0, \bar{e}_y^b = 0.7$ ), 取无量纲转速  $\bar{\omega}=1$ , 润滑油动力黏度的变化范围为  $0.01 \sim 0.05$  Pa·s。本文以润滑油动力黏度为控制参数, 分析转子系统的非线性动力学行为随润滑油动力黏度的变化规律。

计算结果显示, 在润滑油动力黏度较低时, 系统呈现周期一运动。图2为润滑油动力黏度  $\mu=0.015$  Pa·s 时, 轴承处转子中心的运动轨迹及其 Poincaré 映射点列在  $X-Y$  平面的投影。由图2可看出, 转子的运动轨迹是一个封闭的圆, 在 Poincaré 截面上的投影为 1 个不动点。



a) 运动轨迹

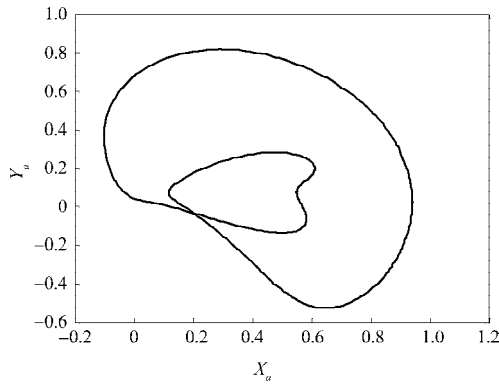


b) Poincaré 映射点列在  $X$ - $Y$  平面的投影

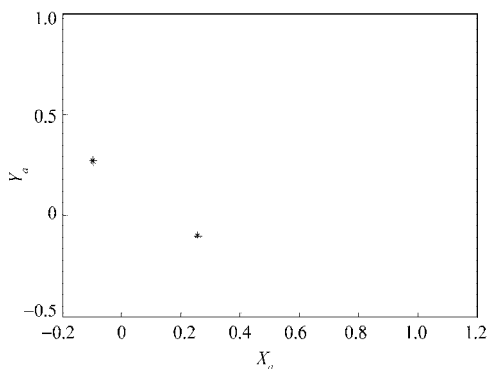
图2 轴承处转子中心的周期一运动

Fig. 2 Periodic-1 orbit of the rotor center

随着润滑油动力黏度不断升高, 当 $\mu=0.0214 \text{ Pa}\cdot\text{s}$  时, 主导 Floquet 乘子从复平面上单位圆的负实轴穿出, 说明此时系统发生了倍周期分岔。当润滑油的动力黏度超过 $\mu=0.0214 \text{ Pa}\cdot\text{s}$  时, 系统将发生倍周期分岔, 转子的不平衡响应将由周期一运动变为周期二运动。图3给出了当 $\mu=0.03 \text{ Pa}\cdot\text{s}$  时, 轴承处转子中心的周期二运动轨迹及其 Poincaré 映射点列在  $X$ - $Y$  平面的投影。由图3可以看出, 系统变为周期二运动后, Poincaré 截面上的投影为2个不动点。



a) 运动轨迹

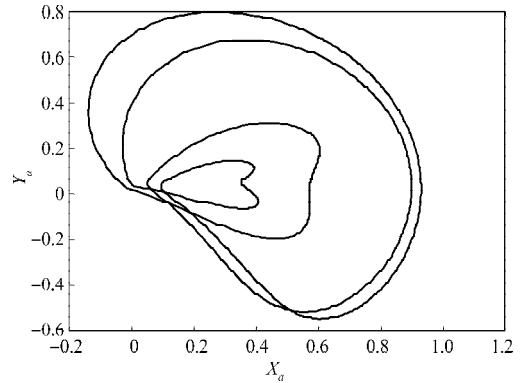


b) Poincaré 映射点列在  $X$ - $Y$  平面的投影

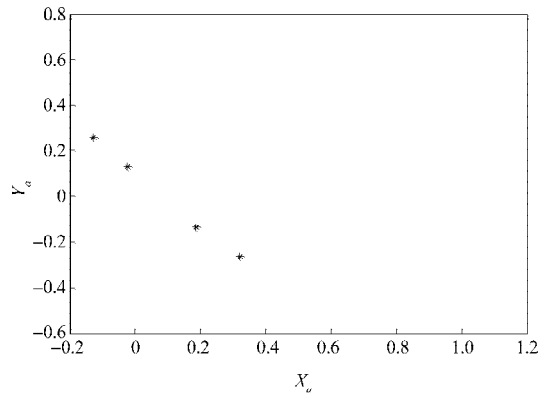
图3 轴承处转子中心的周期二运动

Fig. 3 Periodic-2 orbit of the rotor center

随着润滑油动力黏度的进一步升高, 系统周期二解又发生分岔, 变为周期四运动。图4给出了 $\mu=0.04 \text{ Pa}\cdot\text{s}$  时, 轴承处转子中心的周期四运动轨迹及其 Poincaré 映射点列在  $X$ - $Y$  平面的投影。



a) 运动轨迹



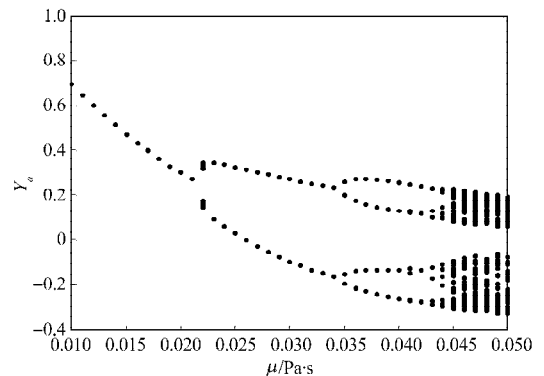
b) Poincaré 映射点列在  $X$ - $Y$  平面的投影

图4 轴承处转子中心的周期四运动

Fig. 4 Periodic-4 orbit of the rotor center

由图4可以看出, 变为周期四运动后, 在 Poincaré 截面上的投影为4个不动点。

随着润滑油动力黏度的继续升高, 转子将变得不稳定。图5给出了转子和圆盘处  $y$  方向的位移随润滑油动力黏度变化的分岔图。



a) 轴承处

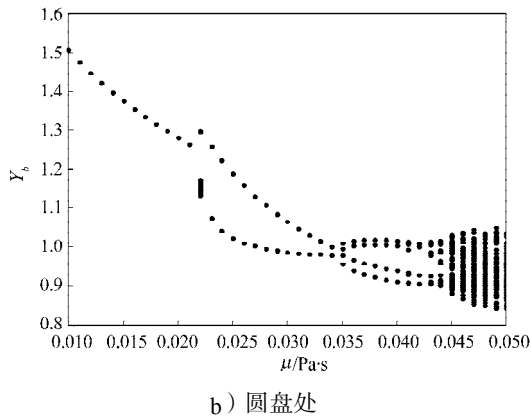


图5 Y方向位移随润滑油动力黏度变化的分岔图

Fig. 5 Bifurcation diagram of Y direction displacement vs oil dynamic viscosity

## 4 结语

本文对动压轴承-柔性转子系统的非线性动力学特性进行了分析,以轴承处润滑油的动力黏度为控制参数,采用Newmark法,并结合Floquet理论和Poincaré理论对转子的非线性动力学响应特性进行分析,数值结果揭示了柔性转子的周期、倍周期、四周期等复杂而丰富的非线性动力学现象。由计算结果可以看出,润滑油的动力黏度对转子的非线性动力学行为有较大影响,这对工程实际中转子系统的稳定性分析具有一定的参考价值,并可用于指导产品的动力学系统设计。

### 参考文献:

- [1] 张家忠,许庆余,郑铁生.具有局部非线性动力系统周期解及稳定性方法[J].力学学报,2005,22(4):477-481.  
Zhang Jiazhong, Xu Qingyu, Zheng Tiesheng. A Method for Determining the Periodic Solution and Its Stability of a Dynamic System with Local Nonlinearities[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2005, 22(4): 477-481.
- [2] Zheng T S, Hasebe N. Nonlinear Dynamic Behaviors of a Complex Rotor-Bearing System[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 2000, 67(5): 485-495.
- [3] 黄庆丰,王全凤,胡云昌. Wilson- $\theta$ 法直接积分的运动约束和计算扰动[J]. 计算力学学报, 2003, 36(10): 76-79.  
Huang Qingfeng, Wang Quanfeng, Hu Yunchang. Motion Constraint and Calculation Perturbation of Wilson- $\theta$  Step-by-Step Integration[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2003, 36(10): 76-79.
- [4] 晏启祥,刘浩吾,饶俊勇.用改进的Wilson- $\theta$ 法分析流固耦合表面波的影响[J]. 四川大学学报, 2002, 34(4): 19-25.  
Yan Qixiang, Liu Haowu, Rao Junyong. The Influence of Surface Wave on Fluid-Structure Interaction Problem by Improved Wilson- $\theta$  Method[J]. Journal of Sichuan University, 2002, 34(4): 19-25.
- [5] 吕延军,刘恒.基于可观测状态的轴承-转子系统周期解计算及稳定性分析[J]. 摩擦学学报, 2008, 28(3): 235-239.  
Lv Yanjun, Liu Heng. Determination of Periodic Solution and Its Stability of Sliding Bearing-Rotor System Based on Observed States[J]. Tribology, 2008, 28(3): 235-239.
- [6] 吕延军,虞烈.流体动压滑动轴承-转子系统非线性动力学特性及稳定性[J]. 摩擦学学报, 2005, 25(1): 61-66.  
Lv Yanjun, Yu Lie. Stability and Nonlinear Dynamic Behavior of a Hydrodynamic Journal Bearing-Rotor System [J]. Tribology, 2005, 25(1): 61-66.
- [7] 吕延军,虞烈.非线性轴承-转子系统的稳定性和分岔[J]. 机械工程学报, 2004, 40(10): 62-67.  
Lv Yanjun, Yu Lie. Stability and Bifurcation of Nonlinear Bearing-Rotor System[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2004, 40(10): 62-67.
- [8] 赵三星,马希直.单圆盘对称粘弹性转子轴承系统的动力分析[J]. 西安交通大学学报, 2002, 36(5): 511-515.  
Zhao Sanxing, Ma Xizhi. Stability and Response Analysis of Single Disk Symmetric Viscous-Elastic Rotor Bearing System[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2002, 36(5): 511-515.

(责任编辑:李玉珍)