第25卷 第2期
2011年3月

湖 南 工 业 大 学 学 报
Journal of Hunan University of Technology

Vol.25 No.2
Mar. 2011

Szasz–Mirakjan 算子的保形性质和逼近阶

郑利凯

（内蒙古民族大学 数学学院，内蒙古 通辽 028000）

摘　要：研究了Szasz-Mirakjan算子的保形逼近、一致收敛等性质，并由V. Totik的逼近定理得出了Szasz-Mirakjan 算子带加权光滑模的逼近阶。利用Devore-Freud 逼近理论，得出了Szasz-Mirakjan 算子带普通光滑模的逼近阶。

关键词：Szasz-Mirakjan 算子；加权光滑模；一致收敛；逼近阶

中图分类号：O174.41　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673–9833(2011)02–0005–05

The Maintain Shape Property and Approximation Order of Szasz-Mirakjan Operators

Zheng Likai

（College of Mathematics，Inner Mongolia University for the Nationalities，Tongliao Inner Mongolia 028000，China）

Abstract：Studies properties of Szasz-Mirakjan operators, such as maintain shape approximation and consistent convergence. Obtains the approximation order of Szasz-Mirakjan operators with weighted moduli of smoothness on the basis of V. Totik′s approximation theory and gets the approximation order of Szasz-Mirakjan operators with general moduli of smoothness from Devore-Freud′s approximation theory.

Keywords：Szasz-Mirakjan operator；weighted modulus of smoothness；consistent convergence；approximation order

Szasz-Mirakjan 算子是 Bernstein 型算子中有代表性的算子，它定义为：

$$S_n(f;x)=\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}f(k/n)\frac{(nx)^k}{k!},x\in[0,+\infty)。$$

文献[1-2]对Szasz-Mirakjan 算子的收敛性和逼近定理进行了研究；文献[3]对Szasz-Mirakjan 算子的线性组合和导数逼近进行了研究；文献[4]对Szasz-Mirakjan 算子的加权逼近进行了研究。本文讨论Szasz-Mirakjan 算子的保凸性，保单调性，一致收敛性，导函数与原函数同时逼近的性质，带修正光滑模的逼近阶，带普通光滑模的点态逼近阶等问题。

1　Szasz-Mirakjan 算子的保凸性与保单调性

定理1　Szasz-Mirakjan 算子

$$S_n(f;x)=\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!},x\in[0,+\infty)，满足：$$

1）当$f'(x)>0$（或$f(x)<0$），$x\in[0,+\infty)$时，有$S_n'(f;x)>0$（或$S_n'(f;x)<0$），$x\in[0,+\infty)$。即Szasz-

收稿日期：2010-12-18
基金项目：内蒙古自治区自然科学基金资助项目（2010MS0119）
作者简介：郑利凯（1971-），男，河北石家庄人，内蒙古民族大学讲师，硕士，主要研究方向为泛函分析和函数逼近论，E-mail：likai_zheng@yahoo.com.cn

Mirakjan 算子是保单调的。

2）当$f''(x)>0$（或$f''(x)<0$），$x\in[0,+\infty)$ 时，有 $S_n''(f;x)>0$（或$S_n''(f;x)<0$），$x\in[0,+\infty)$。即 Szasz-Mirakjan 算子是保凸的。

证明 $\forall x\in[0,+\infty)$，$\exists a\geq 0$，$b>0$，使得$x\in[a,b]$。由于f在$[0,+\infty)$上连续，由闭区间上连续函数的性质得f在$[0,+\infty)$上有界。不难推得级数$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}$在$[a,b]$上一致收敛，从而级数$\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}$在$[a,b]$上一致收敛[5]。

因为

$$S_n'(f;x)=\left(\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}\right)'=$$

$$\left(\mathrm{e}^{-nx}\right)'\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}+\mathrm{e}^{-nx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}\right)'=$$

$$\left(\mathrm{e}^{-nx}\right)'\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}+\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}\right)'=$$

$$(-n)\cdot\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}f\left(\frac{k}{n}\right)+\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n^k}{(k-1)!}x^{k-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=$$

$$(-n)\cdot\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}f\left(\frac{k}{n}\right)+\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(nx)^{k-1}}{(k-1)!}nf\left(\frac{k}{n}\right)=$$

$$(-n)\cdot\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}f\left(\frac{k}{n}\right)+\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^{k}}{(k)!}nf\left(\frac{k+1}{n}\right)=$$

$$\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}n\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=$$

$$\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}\frac{f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)}{\frac{1}{n}}。$$

根据可导函数单调性和导函数符号之间的关系，易知$\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\Big/\frac{1}{n}$和$f'$符号相同，而且$S_n$是正算子，所以 Szasz-Mirakjan 算子是保单调的。

因为$S_n(f;x)=\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}$，所以

$$S_n''(f;x)=\left(\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}\right)''=$$

$$\left((-n)\cdot\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}f\left(\frac{k}{n}\right)+\right.$$

$$\left.\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n^k}{(k-1)!}x^{k-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)'=$$

$$\left((-n)\cdot\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}f\left(\frac{k}{n}\right)+\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(nx)^{k-1}}{(k-1)!}nf\left(\frac{k}{n}\right)\right)'=$$

$$\left((-n)\cdot\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}f\left(\frac{k}{n}\right)+\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^{k}}{(k)!}nf\left(\frac{k+1}{n}\right)\right)'=$$

$$\left(\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}n\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right)'=$$

$$\left(\mathrm{e}^{-nx}\right)'\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}n\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)+$$

$$\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(nx)^k}{k!}n\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right)'=$$

$$-n^2\mathrm{e}^{-nx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right)+$$

$$n\mathrm{e}^{-nx}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n^k}{(k-1)!}x^{k-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right)=$$

$$-n^2\mathrm{e}^{-nx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right)+$$

$$n^2\mathrm{e}^{-nx}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(nx)^{k-1}}{(k-1)!}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right)=$$

$$-n^2\mathrm{e}^{-nx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right)+$$

$$n^2\,\mathrm{e}^{-nx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}\left(f\left(\frac{k+2}{n}\right)-f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right)\right)=$$

$$n^2\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}\left(f\left(\frac{k+2}{n}\right)-\right.$$

$$\left.f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k+1}{n}\right)+f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=$$

$$\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}\left(\frac{f\left(\frac{k+2}{n}\right)-f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k+1}{n}\right)+f\left(\frac{k}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}\right)。$$

根据区间上凸函数和凹函数的充要条件[5]，易知$\left(f\left(\frac{k+2}{n}\right)-f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k+1}{n}\right)+f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\Big/\frac{1}{n^2}$和$f''$符号相同，而且是正算子，所以 Szasz-Mirakjan 算子是保凸的。

2 Szasz-Mirakjan 算子的同时逼近和一致收敛性

为了研究 Szasz-Mirakjan 算子的性质，下面先求

出Szasz-Mirakjan算子对零阶、一阶、二阶基函数的逼近误差。

定理2　Szasz-Mirakjan算子

$$S_n(f;x)=\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!},x\in[0,+\infty),$$

具有以下逼近性质：

$S_n(1;x)=1$，$S_n(t;x)=x$，$S_n\left(t^2;x\right)=x^2+\dfrac{x}{n}$。

证明　因为

$$S_n(f;x)=\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!},x\in[0,+\infty),$$

所以

$$S_n(1;x)=\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1\cdot\frac{(nx)^k}{k!}\right)=\mathrm{e}^{-nx}\cdot\mathrm{e}^{nx}=1\text{。}$$

$$S_n(t;x)=\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n}\cdot\frac{(nx)^k}{k!}\right)=\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(nx)^{k-1}}{(k-1)!}x=$$

$$\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}x=\mathrm{e}^{-nx}\cdot\mathrm{e}^{nx}\cdot x=x\text{。}$$

$$S_n(t^2;x)=\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{(nx)^k}{k!}\right)=$$

$$\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(nx)^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\frac{k}{n}\cdot x\right)=$$

$$\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(nx)^k}{k!}\cdot\frac{k+1}{n}\cdot x\right)=$$

$$\mathrm{e}^{-nx}x\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(nx)^k}{k!}\cdot\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$\mathrm{e}^{-nx}x\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(nx)^k}{k!}\cdot\frac{k}{n}\right)+\mathrm{e}^{-nx}x\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(nx)^k}{k!}\cdot\frac{1}{n}\right)=$$

$$\mathrm{e}^{-nx}x^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(nx)^{k-1}}{(k-1)!}+\mathrm{e}^{-nx}\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}=$$

$$\mathrm{e}^{-nx}x^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}+\mathrm{e}^{-nx}\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}=$$

$$\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(nx)^k}{k!}\cdot\left(x^2+\frac{x}{n}\right)\right)=$$

$$x^2+\frac{x}{n}\text{。}$$

引理1（Bohman-Korovkin）[1]　设D是至少两点的紧致Hausdorff空间，$\{L_n\}_{n\in\mathbf{N}_+}$是$\mathrm{C}(D)$到$\mathrm{C}(D)$的正线性算子列，$T=\{f_i\}_{i=1}^{m}$是$\mathrm{C}(D)$上的试验集，若对每个$f_i\in T(i=1,2,\cdots,m)$，有

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n(f_i)-f_i\right\|_{\mathrm{C}(D)}=0,$$

则对每个$f\in\mathrm{C}(D)$，有

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n(f)-f\right\|_{\mathrm{C}(D)}=0\text{。}$$

其中：$\mathrm{C}(D)$表示定义在D上的连续函数的全体。

根据以上结论，可以得到Szasz-Mirakjan算子的一致收敛性和同时逼近定理。

定理3　Szasz-Mirakjan算子

$$S_n(f;x)=\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!},x\in[0,+\infty)\text{，有：}$$

1）对任意$f\in\mathrm{C}[a,b](a\geq 0,b>0)$，$S_n(f;x)$一致收敛于$f(x)$。

2）若f在$[0,+\infty)$上存在k阶连续导数，则有

$f^{(k)}=\lim\limits_{n\to\infty}S_n\left(f^{(k)}\right),k\in\mathbf{N}_+$。

3）若f在$[0,+\infty)$上存在K阶连续导数，则有

$f^{(K)}=\lim\limits_{n\to\infty}S_n^{(K)}(f),K\in\mathbf{N}_+$。

证明　显然，Szasz-Mirakjan算子

$$S_n(f;x)=\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!},x\in[0,+\infty),$$

是正线性算子，取$P_y(x)=(x-y)^2=y^2-2yx+x^2$，则$P_y(x)=0$当且仅当$x=y$。令$f_1=1$，$f_2=t$，$f_3=t^2$，$D=[a,b]$，$(a\geq 0,a\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R})$，则$\{f_1,f_2,f_3\}$是一个$\mathrm{C}(D)$上的试验集，命名为$T$。

由定理2知

$S_n(1;x)=1$，$S_n(t;x)=x$，$S_n\left(t^2;x\right)=x^2+\dfrac{x}{n}$，

所以对每个$f_i\in T(i=1,2,3)$，有

$$\lim_{n\to\infty}\left\|S_n(f_i)-f_i\right\|_{\mathrm{C}(D)}=0\text{。}$$

根据引理1得，对每个$f\in\mathrm{C}(D)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left\|S_n(f)-f\right\|_{\mathrm{C}(D)}=0$。这就等价于对每个$f\in\mathrm{C}(D)$，$S_n(f;x)$一致收敛于$f(x)$。

1）证毕。

$\forall x\in[0,+\infty)$，存在$c\geq 0$, $b>0$，使得$x\in[a,b]$。由1）可知，若f在$[0,+\infty)$上存在k阶连续导数，则

$$f^{(k)}(x)=\lim_{n\to\infty}S_n\left(f^{(k)};x\right),k\in\mathbf{N}_+\text{。}$$

2）证毕。

由定理1的证明过程可知

$$S_n^{(K)}(f;x)=\left(\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}\right)^{(K)}=$$

$$\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}\left(\frac{\sum_{t=0}^{K}(-1)^{K-t}\binom{K}{t}f\left(\frac{k}{n}+\frac{t}{n}\right)}{\frac{1}{n^K}}\right)=$$

$$\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}\left(\frac{\Delta_{\frac{1}{n}}^K f\left(\frac{k}{n}\right)}{\frac{1}{n^K}}\right),$$

式中：$\Delta_t^r f(x)$表示函数f以t为步长的r阶差分。

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\Delta_{\frac{1}{n}}^K f\left(\frac{k}{n}\right)}{\frac{1}{n^K}}=f^{(K)}\left(\dfrac{k}{n}\right)$，

所以$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{R}^+$，当$n>N$时，有

$$f^{(K)}\left(\frac{k}{n}\right)-\varepsilon<\frac{\Delta_{\frac{1}{n}}^K f\left(\frac{k}{n}\right)}{\frac{1}{n^K}}<f^{(K)}\left(\frac{k}{n}\right)+\varepsilon。$$

又$S_n(f;x)$是正算子，所以当$n>N$时，有

$$S_n\left(f^{(K)}(x);x\right)-\varepsilon=S_n\left(f^{(K)}(x)-\varepsilon;x\right)<$$
$$S_n^{(K)}(f;x)<S_n\left(f^{(K)}(x)+\varepsilon;x\right)=$$
$$S_n\left(f^{(K)}(x);x\right)+\varepsilon。$$

又$f^{(K)}(x)$在$[0,+\infty)$上连续，根据2）有

$$\lim_{n\to\infty}S_n\left(f^{(K)}(x);x\right)=f^{(K)}(x),$$

所以

$$f^{(K)}(x)-\varepsilon\le\lim_{n\to\infty}S_n^{(K)}(f;x)\le f^{(K)}(x)+\varepsilon。$$

由ε的任意性，得出

$$\lim_{n\to\infty}S_n^{(K)}(f;x)=f^{(K)}(x),x\in[0,+\infty),K\in\mathbf{N}_+。$$

定理证毕。

3 Szasz-Mirakjan 算子带修正光滑模的逼近阶

先给出修正光滑模的定义。

定义1 对$f\in L_p(D)$，$1\le p<+\infty$和$t>0$，令

$$\Omega_0(f,t)_p=\sup_{0<h\le t}\left\|\Delta_{h\varphi}^2(f)\right\|_{L_p\left((ch)^*,(ch)^{**}\right)}。$$

对$1\le p<+\infty$，令

$$\Omega_1^{(0)}(f,t)_p=\sup_{0<h\le t^*}\left\|\Delta_h^2(f)\right\|_{L_p\left(h,(c_1h)^*+h\right)},$$

$$\Omega_1^{(1)}(f,t)_p=\sup_{0<h\le t^*}\left\|\Delta_h^2(f)\right\|_{L_p\left(2(c_1h)^*-1-h,1-h\right)}。$$

式中：$\Delta_h^2(f,\cdot)=f(\cdot+h)-2f(\cdot)+f(\cdot-h)$是$f$的二阶差分。记

$$\Omega_1(f,t)_p=\begin{cases}\Omega_1^{(0)}(f,t)_p+\Omega_1^{(1)}(f,t)_p, & D=[0,1]；\\ \Omega_1^{(0)}(f,t)_p, & D=\mathbf{R}^+；\\ 0, & D=\mathbf{R}。\end{cases}$$

则称$\omega_\varphi(f,t)_p=\Omega_0(f,t)_p+\Omega_1(f,t)_p$为$f\in L_p(D)$的修正光滑模。

关于修正光滑模更详细的说明见文献[1,6]。

引理2（V. Totik）[1] 设$D=(a,b)$表示：$I=[0,1]$，$R_1=[0,+\infty)$或$\mathbf{R}$。$\{L_n\}_{n\in\mathrm{N}_+}$是$C(D)$到$C(D)$的正线性算子列。

若对每个$x\in D$有

$L_n(1;x)=1$；

$L_n(t;x)=x$；

$L_n\left((t-x)^2;x\right)\le ka_n^2\varphi^2(x)$。

若$a_n\to0^+(n\to\infty)$，则对每个$f\in C_0(D)$，有

$$\|L_nf-f\|\le k_0\omega_\varphi(f,a_n),$$

其中：$C_0(D)$为$C(D)$中有界函数组成的子空间，

k_0为与n无关的常数，

$\omega_\varphi(f,a_n)$为f的修正光滑模。

为求出Szasz-Mirakjan算子的逼近阶，先计算Szasz-Mirakjan算子的二阶中心矩。

定理4 Szasz-Mirakjan算子的二阶中心矩

$$S_n\left((t-x)^2;x\right)=\frac{x}{n}。$$

证明

$$S_n\left((t-x)^2;x\right)=$$
$$S_n\left(t^2;x\right)-2xS_n(t;x)+x^2S_n(1;x)=$$
$$x^2+\frac{x}{n}-2x\cdot x+x^2\cdot1=\frac{x}{n}。$$

定理5 Szasz-Mirakjan算子的逼近阶满足：

$$\|S_nf-f\|\le k_0\omega_\varphi\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

式中：$f\in C_0(D)$，$D=[0,+\infty)$；

$\varphi(x)=\sqrt{x}$；

k_0为与n无关的常数。

证明 由定理2和4得

$S_n(1;x)=1$；

$S_n(t;x)=x$；

$$S_n\left((t-x)^2;x\right)=\frac{x}{n}\le\frac{x^2}{\left(\sqrt{n}\right)^2}。$$

根据引理2，令$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，$\varphi(x)=\sqrt{x}$，显然$a_n\to0^+$ $(n\to\infty)$，则

$$\|S_nf-f\|\le k_0\omega_\varphi\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)。$$

定理证毕。

4　Szasz-Mirakjan 算子的点态逼近阶

引理3　设$\{L_n\}_{n\in\mathbf{N}_+}$是$C(\mathbf{R}^+)$到自身内的一致有界正线性算子列，则对每个$f\in C_0(\mathbf{R}^+)$和$x\in[0,+\infty)$有

$$|L_n(f,x)-f(x)|\le|f(x)||L_n(1,x)-1|+\frac{2}{h}|L_n(t-x,x)|\omega(f,h)+\left(3L+\frac{\mu_n^2(x)}{h^2}\right)\omega_2(f,h),$$

式中：$h>0$，$L=\sup_{n\in\mathbf{N}_+}\{\|L_n\|\}$，$\mu_n^2(x)=L_n\left((t-x)^2,x\right)$。$C_0(\mathbf{R}^+)$表示定义在$\mathbf{R}^+$上的有界连续函数组成的函数空间。

定理6　Szasz-Mirakjan 算子的逼近阶满足

$$\|S_n(f,x)-f(x)\|\le\left(3+\frac{x}{nh^2}\right)\omega_2(f,h),$$

式中$f\in C_0(\mathbf{R}^+)$。

证明　显然Szasz-Mirakjan 算子

$$S_n(f;x)=\mathrm{e}^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!},x\in[0,+\infty)$$

是$C(\mathbf{R}^+)$到自身的正线性算子。易知$\|S_n\|=1$，所以S_n是一致有界的。

由定理2和4得

$S_n(1;x)=1$；

$S_n\left((t-x);x\right)=0$；

$\mu_n^2(x)=S_n\left((t-x)^2;x\right)=\dfrac{x}{n}$。

由引理3得

$$\|S_n(f,x)-f(x)\|\le|f(x)||S_n(1,x)-1|+\frac{2}{h}|S_n(t-x,x)|\omega(f,h)+\left(3L+\frac{\mu_n^2(x)}{h^2}\right)\omega_2(f,h)=$$

$$|f(x)||1-1|+\frac{2}{h}|0|\omega(f,h)+\left(3\times1+\frac{\mu_n^2(x)}{h^2}\right)\omega_2(f,h)=$$

$$0+0+\left(3+\frac{x}{nh^2}\right)\omega_2(f,h)=\left(3+\frac{x}{nh^2}\right)\omega_2(f,h)=\left(3+\frac{x}{nh^2}\right)\omega_2(f,h)。$$

参考文献：

[1]　陈文忠. 算子逼近论[M]. 厦门：厦门大学出版社，1989：20-103.
Chen Wenzhong. Approximation Theory of Operators[M]. Xiamen：Xiamen University Press，1989：20-103.

[2]　洛伦茨G G. 函数逼近论[M]. 上海：上海科学技术出版社，1981：10-45.
Lorentz G G. Approximation Theory of Functions[M]. Shanghai：Shanghai Science and Technology Press，1981：10-45.

[3]　谢林森. Szάsz-Mirakjan算子线性组合和导数的点态逼近定理[J]. 数学研究与评论，2003，23(4)：709-714.
Xie Linsen. Pointwise Approximation Theorems for Linear Combinations and Derivatives of Szάsz-Mirakjan Operators [J]. Journal of Mathematical Research and Exposition，2003，23(4)：709-714.

[4]　刘国军，薛银川，孙渭滨. Szάsz-Mirakjan算子加权逼近的强逆不等式（英文）[J]. 数学季刊，2008，23(3)：384-389.
Liu Guojun，Xue Yinchuan，Sun Weibin. Strong Converse Inequalities for Szάsz-Mirakjan Operators with Weights [J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics，2008，23 (3)：384-389.

[5]　华东师范大学数学系. 数学分析：下册[M]. 3版. 北京：高等教育出版社，2001：30-35.
Department of Mathematics，East China Normal University. Mathematics Analysis：Part Ⅱ[M]. 3rd ed. Beijing：Higher Education Press，2001：30-35.

[6]　Ditzian Z，Totik V. Moduli of Smoothness[M]. New York：Springer-Verlag，1987：1-30.

（责任编辑：邓光辉）