

# 双正弦激励参数调制杜芬系统的混沌动力学

李 飞, 张冬霞, 彭雄波

(湖南科技大学 物理系, 湖南 湘潭 411201)

**摘要:** 研究了具有双正弦双激励的参数调制杜芬系统的混沌动力学行为。运用直接微扰法构造了一级方程的通解, 该通解的有界性条件包含了 Melnikov 混沌判据。数值模拟表明系统可由倍周期分叉进入混沌状态。

**关键词:** Duffing 方程; Melnikov 函数; 混沌

中图分类号: O415.5

文献标志码: A

文章编号: 1673-9833(2010)03-0037-03

## Chaotic Dynamics of A Parametrically Modulated Duffing System with Two Sinusoidal Excitations

Li Fei, Zhang Dongxia, Peng Xiongbo

(Department of Physics, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan Hunan 411201, China)

**Abstract:** Studies the chaotic dynamics of a parametrically modulated Duffing system with two sinusoidal excitations. Constructs the general solution of the 1st-order equation by the direct perturbation method, whose boundedness conditions contain the Melnikov chaotic criterion. Numerical simulations show that the system enters chaos state via a period-doubling route.

**Keywords:** Duffing's equation; Melnikov function; chaos

## 0 引言

众多研究表明, 不同的系统通过化简却具有相同或相似的数学模型, 著名的 Duffing 系统就是其中之一, 该系统常被用来模拟实际系统的动力学行为。通过对 Duffing 系统的研究, 可对众多实际系统的动力学行为有进一步的了解, 找出其产生混沌的机理, 为混沌控制打下基础。正因如此, 国内外不少专家学者常以此作为研究和检验混沌系统控制和同步方案的试金石。可以说, 对 Duffing 系统的研究具有重大的理论价值和现实意义。

本文考虑具有如下形式的 Duffing 振子。

$$\ddot{x} - \gamma \dot{x} - ax + (\lambda_0 + \lambda_1 \sin \omega t)x^3 = B_1 \sin(\Omega_1 t) + B_2 \sin(\Omega_2 t + \varphi), \quad (1)$$

式中:  $\gamma$  为阻尼项系数;

$a$  为线性项系数即谐振频率;

$(\lambda_0 + \lambda_1 \sin \omega t)$  是随时间周期变化的 3 次项系数;

$B_1 \sin(\Omega_1 t), B_2 \sin(\Omega_2 t + \varphi)$  是 2 个外激励,  $B_1, B_2$  为相应外激励幅值,  $\Omega_1, \Omega_2$  为相应的外激励频率,  $\varphi$  是外激励相位。

## 1 微扰分析与系统的混沌解

首先采用解析法求解方程 (1)。当系数  $\gamma, \lambda_1, B_1$  和  $B_2$

收稿日期: 2009-12-10

基金项目: 湖南省教育厅基金资助项目 (08C344), 湖南科技大学博士科研基金资助项目 (E50817), 湖南科技大学研究生创新基金资助项目 (S090124)

通信作者: 李 飞 (1975-), 男, 湖南江华人, 湖南科技大学教师, 博士, 主要从事非线性和混沌方面的研究,

E-mail: wiself@163.com

为一阶小量时, 可将与之有关的项看作系统微扰, 从而由直接微扰法求方程(1)的微扰解<sup>[1-5]</sup>。

运用直接微扰理论,  $x$  可展开如下:

$$x = x_c + x_1 \quad (|x| \ll |x_0|), \quad (2)$$

将式(2)代入原方程(1)中, 并将其按相同级数展开, 可得零级方程

$$\ddot{x}_c - \alpha x_c + \lambda_c x_c^3 = 0 \quad (3)$$

和一级方程

$$\ddot{x}_1 - \alpha x_1 + 3\lambda_0 x_0^2 x_1 = \varepsilon(t), \quad (4)$$

式中:

$$\varepsilon(t) = -\gamma \dot{x}_0 - \lambda_1 x_0^3 \sin \omega t + B_1 \sin \Omega_1 t + B_2 \sin(\Omega_2 t + \varphi). \quad (5)$$

零级方程代表著名的自由 Duffing 振子。根据文献[1], 零级方程(3)有如下形式的同宿解,

$$x_0 = \sqrt{2a/\lambda_0} \operatorname{sech}(\sqrt{a}t - C), \quad (6)$$

式中:  $C = \sqrt{a}t_0 - A \operatorname{rsech}[\sqrt{\lambda_0/2a}x_0(t_0)]$  为由初始条件决定的参数。

当  $\varepsilon(t)=0$  时, 应用零级方程(3)的同宿解, 可构造一级方程(4)的2个线性无关解,

$$g_1 = \dot{x}_0 = -\sqrt{2/\lambda_0} a \operatorname{sech} \xi \tanh \xi, \quad (7)$$

$$g_2 = \dot{x}_0 \int (\dot{x}_0)^2 dt = \left( \sqrt{2\lambda_0/4a^{3/2}} \right) \operatorname{sech} \xi [2 - \sinh^2 \xi + 3 \tanh \xi] \quad (8)$$

很明显, 由于  $g_2$  包含双曲正弦函数, 所以它是无界函数, 随着  $t$  的增大它将呈指数增长直至趋向无穷大。应用常数变易法及式(7)和(8), 可构造方程(4)的通解如下<sup>[2-5]</sup>:

$$x_1 = g_2 \int_{t_0}^t g_1 c(t) dt - g_1 \int_{t_0}^t g_2 c(t) dt, \quad (9)$$

式中:  $A_1, A_2$  为2个由初始条件决定的常数。

可以看出, 通解(9)不能用初等函数的有限形式表示, 表现出分析上的不可积, 同时该解的轨迹也是不可计算的。当时间  $t \rightarrow \infty$  时, 该通解是无界的<sup>[2-5]</sup>。但是如果条件

$$I_{\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \int_{t_0}^t g_{\pm} \varepsilon(t) dt = 0 \quad (10)$$

得到满足, 则可保证通解(9)有界<sup>[2-5]</sup>。

有意义的是通过  $I_+ - I_- = 0$  可消去常数  $A_1$ , 从而得到著名的 Melnikov 函数

$$M(t_0) = I_+ - I_- = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1 \varepsilon(t) dt, \quad (11)$$

Melnikov 函数又叫 Poincaré 截面上稳定流形和不稳定流形在  $t_0$  时的 Melnikov 距离。如果 Melnikov 函数存在简单零点, 系统将出现斯梅尔马蹄混沌。因此, 通常把满足条件(10)和(11)的通解叫做混沌解。

现在, 以通解(9)来分析说明系统混沌行为的不可计算性和不可预测性。由通解(9)可知, 右边第一

项是指数增长函数  $g_2$  与一个分析不可解积分的乘积, 而该积分无法用基本函数的有限项之和来表示。研究人员都知道, 所有表示成无限项之和的函数在计算机里都是当作有限项之和来处理的, 因此, 计算机计算的结果与精确值肯定有差别; 同时, 不同的数值积分技术和积分步长也会导致计算结果与精确值之间的偏差。由于通解(9)包含了指数增长函数  $g_2$ , 所有对精确值的偏离都将随着  $t$  的增大而被指数放大, 直至趋向无穷大, 这表明系统混沌演化过程对参数和初始条件的极端敏感性。以上分析说明系统混沌演化过程具有不可计算性和不可预测性, 这是动力学系统中混沌行为的一个显著特征。

## 2 非微扰数值模拟

当阻尼项、参数力或2个外力足够大时, 系统将不满足微扰条件, 因此, 上面的分析方法也就不再适用于系统的研究。此时, 可运用 Mathematica 软件对系统进行数值模拟, 得到系统的相图, 根据相图演化特征研究系统的动力学行为。

首先, 讨论  $B_2$  对系统的影响。设定系统参数和初始条件为:  $\alpha=1.25, \Omega_1=\Omega_2=4.0, \varphi=2\pi, \lambda_0=5.8, \lambda_1=3.9, B_1=1.2, \gamma=0.2, \omega=1.0, x(0)=0.5, \dot{x}(0)=0$ , 根据不同的  $B_2$  值画出了系统在  $(x, \dot{x})$  平面上的相图, 见图1。

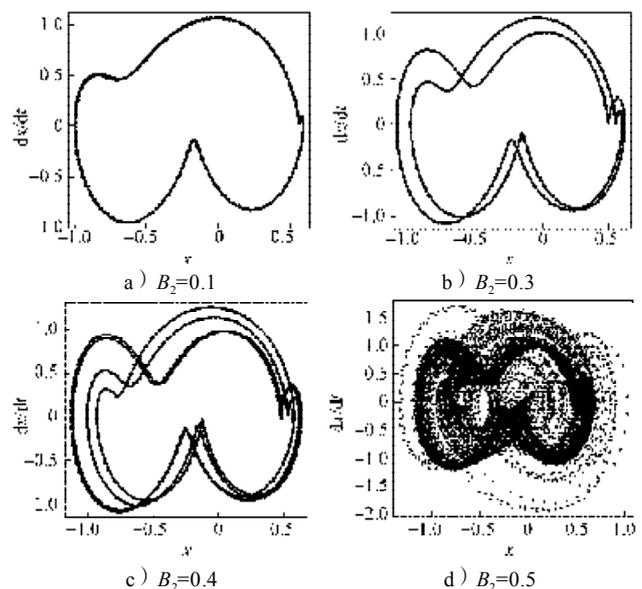


图1  $B_2$  变化时系统相图

Fig. 1 The system phase diagram with a changing  $B_2$

从图1可见, 随着  $B_2$  增大, 系统经历了倍周期分叉进入混沌的过程。由于阻尼的存在, 系统动力学演化会存在一个暂态过程。为了忽略该暂态过程, 画相图时, 笔者忽略了时间  $t < 1000$  的演化过程。图1中 a) 表明, 当  $B_2=0.1$  时, 相平面上只有1条封闭轨道, 这

说明此时系统处于单周期状态; 当  $B_2=0.3$  时, 图 1 中 b) 显示相平面上有 2 条封闭轨道, 说明此时系统处于双周期状态, 并且出现了倍周期分叉现象; 当  $B_2=0.4$  时, 图 1 中 c) 显示相平面上有 4 条封闭轨道, 说明系统已进入 4 周期状态; 而当  $B_2=0.5$  时, 一个典型的相平面混沌吸引子出现了, 见图 1 中 d)。为了验证图 1 中 d) 情形系统确实处于混沌态, 笔者进一步画出了与之对应的混沌庞加莱截面, 见图 2。

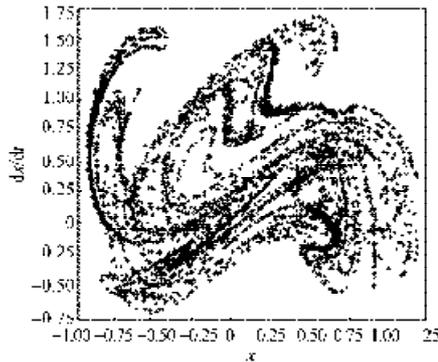


图 2  $B_2=0.5$  时混沌庞加莱截面图

Fig. 2 Chaotic Poincaré section for  $B_2=0.5$

接下来, 考察含时 3 次项系数中  $\lambda_1$  对系统动力学行为的影响。设定系统参数和初始条件为:  $\alpha=2, \Omega_1=2.0, \Omega_2=4.0, \varphi=2\pi, \lambda_0=5.5, B_1=1.2, B_1=0.1, \gamma=0.4, \omega=1.0, x(0)=0.5, \dot{x}(0)=0$ , 当  $\lambda_1$  取不同值时画出了系统在  $(x, \dot{x})$  平面上的相图, 见图 3。

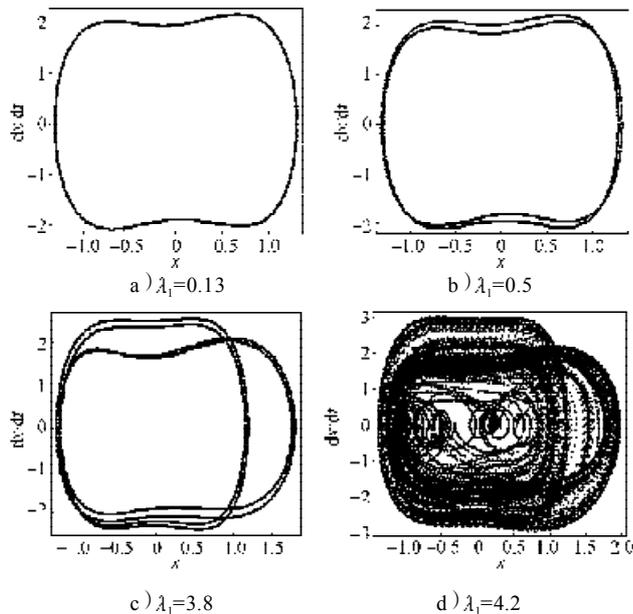


图 3  $\lambda_1$  变化时系统相图

Fig. 3 The system phase diagram with a changing  $\lambda_1$

从图 3 发现, 随着  $\lambda_1$  增大, 系统也会经历倍周期分叉进入混沌的过程。图 4 为对应于图 3 中 d) 的混沌庞加莱截面。

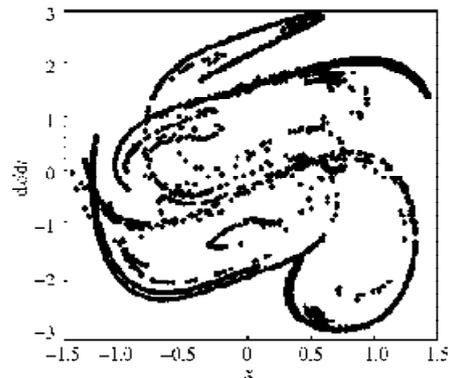


图 4  $\lambda_1=4.2$  时混沌庞加莱截面图

Fig. 4 Chaotic Poincaré section for  $\lambda_1=4.2$

### 3 结语

本文研究了一个具有双激励的杜芬系统的混沌动力学行为。首先, 对系统进行了微扰分析, 运用直接微扰法构造了一级方程的通解, 分析表明, 该通解的有界性条件包含了 Melnikov 混沌判据。然后利用通解讨论了系统混沌动力学行为的不可计算性和无法预测性, 这两者都是混沌的显著特征。当系统不满足微扰条件时, 笔者通过数值模拟方法分别考查了外激励和三次项系数中交变分量对系统动力学行为的影响, 数值模拟结果表明, 系统可由倍周期分叉进入混沌状态。杜芬系统一直被用来模拟许多实际系统, 它丰富的动力学特征吸引了学界的关注, 对它的研究有利于深入理解众多实际系统的动力学性质。

#### 参考文献:

- [1] 刘式适, 刘式达. 物理学中的非线性方程[M]. 北京: 北京大学出版社, 2001.  
Liu Shishi, Liu Shida. Nonlinear Equations in Physics[M]. Beijing: Peking University Press, 2001.
- [2] Hai W, Lee C, Chong G, et al. Chaotic Probability Density in Two Periodically Driven and Weakly Coupled Bose-Einstein Condensates[J]. Phys. Rev. E, 2002, 66(2): 026202-026208.
- [3] Li F, Hai W, Ren Z, et al. Chaotic Phase Oscillation of A Proton Beam in A Synchrotron[J]. Phys. Lett. A, 2006, 355(2): 104-109.
- [4] Li F, Shu W, Jiang J, et al. Spatiotemporal Dynamics of Bose-Einstein Condensates in Moving Optical Lattices[J]. Eur. Phys. J. D, 2007, 41(3): 355-361.
- [5] Li F, Zhou B, Shu W, et al. Chaotic Dynamics of A Parametrically Modulated Josephson Junction with Quadratic Damping[J]. Eur. Phys. J. D, 2008, 50(5): 75-80.

(责任编辑: 李玉珍)