第24卷 第3期 湖 南 工 业 大 学 学 报 Vol.24 No.3
2010年5月 Journal of Hunan University of Technology May 2010

积分中值定理“中间点”的渐近性态

胡晶地

（浙江广厦建设职业技术学院 信息与控制工程学院，浙江 东阳 322100）

摘　要：对积分中值定理“中间点”的渐近性态进行了研究，通过构造辅助函数，应用洛必达法则，获得了系列新结果，改进和推广了已有的结论。

关键词：积分中值定理；中间点；渐近性态；洛必达法则

中图分类号：O172.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2010)03-0022-03

The Asymptotic Behavior of the Intermediate Point of Mean-Value Theorem of Integrals

Hu Jingdi

（Information and Control Engineering School，Guangsha College of Applied Construction Technology，Dongyang Zhejiang 322100，China）

Abstract: Studies asymptotic behavior of the intermediate point of mean value theorem of integrals. Obtains a series of new achievements by constructing auxiliary function and applying L Hopital Rule, which improving and generalizing the exsiting conclusion.

Keywords: mean value theorem of integrals; the intermediate point; the progressive teleomorph; L Hospital rule

1　背景知识

关于积分中值定理“中间点”当区间长度趋于无穷大时的渐近性态，笔者在文献[1]中给出了一个新的渐近估计式。对区间长度趋于0时积分中值定理“中间点”渐近性态的研究已有不少结果，本文通过构造辅助函数，借助洛必达法则，获得了系列新结果，改进和推广了已有的结论。

为叙述方便，先将2个积分中值定理重述如下：

积分中值定理　若$f(t)$是闭区间$[a,x]$上的连续函数，则在(a,x)内至少存在一个数ξ_x，使

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(\xi_x)(x-a)\text{。} \tag{1}$$

推广积分中值定理　若$f(t)$，$g(t)$在$[a,x]$上连续，且$g(t)$在$[a,x]$上不变号，则在(a,x)内至少存在一点ξ_x，使

$$\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t = f(\xi_x)\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\text{。} \tag{2}$$

文献[2-9]研究了上述2个定理中当$x\to a$时ξ_x的渐近性态，其中具有代表性的结果由文献[9]给出，其内容是：

定理1　若$f(t)$，$g(t)$满足推广积分中值定理的条件，且$g(a)\neq 0,\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^m}=A$，这里$m>0$，$A\neq 0$是2个常数，则式（2）中的$\xi_x$满足

$$\lim_{x\to a}\frac{\xi_x-a}{x-a}=\frac{1}{\sqrt[m]{m+1}}\text{。} \tag{3}$$

2　改进和推广已有结论

本文对上述结果进行推广，使其成为特例。

收稿日期：2009-06-28

通信作者：胡晶地（1964-），男，浙江东阳人，浙江广厦建设职业技术学院副教授，主要从事数值分析方面的教学与研究，E-mail：hjd314@mail.guangshaxy.com

定理2　若$f(t)$，$g(t)$满足推广积分中值定理的条件，且$g(a)\neq 0$，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{\left|\varphi(x)-\varphi(a)\right|^{m}}=A$，这里$m>-1$，$A\neq 0$是2个常数，$\varphi(t)$是$[a,x]$上的单调函数，且当$t=a$时右导数$\varphi'_{+}(a)$存在，则式(2)中的$\xi_x$满足

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(\xi_x)-\varphi(a)}{x-a}=\frac{\varphi'_{+}(a)}{\sqrt[m]{m+1}}。\qquad（4）$$

证明　不妨设$g(a)>0$，$g(t)\geq 0$且$\varphi(t)$单调增加。此时显然有$\int_a^x g(t)\mathrm{d}t>0$，构造

$$h(x)=\frac{\int_a^x f(t)\cdot g(t)\mathrm{d}t-f(a)\int_a^x g(t)\mathrm{d}t}{\left[\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right]^{1+m}},$$

根据洛必达法则，并对函数$g(t)$使用公式(1)，有：

$a<\eta_x<x$，

$$\lim_{x\to a}h(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)}{(1+m)\left[\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right]^{m}g(x)}=$$

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{(1+m)\left[g(\eta_x)\right]^{m}}\cdot\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^{m}}=$$

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{(1+m)\left[g(\eta_x)\right]^{m}}\cdot\frac{f(x)-f(a)}{\left|\varphi(x)-\varphi(a)\right|^{m}}\cdot$$

$$\left[\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}\right]^{m}=$$

$$\frac{A}{(1+m)\left[g(a)\right]^{m}}\left[\varphi'_{+}(a)\right]^{m}。\qquad（5）$$

另一方面，由式（2）及对使用式（1）又有：

$$\lim_{x\to a}h(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(\xi_x)-f(a)}{\left[\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right]^{m}}=$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(\xi_x)-f(a)}{\left[g(\eta_x)\right]^{m}(x-a)^{m}}=$$

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{\left[g(\eta_x)\right]^{m}}\cdot\frac{f(\xi_x)-f(a)}{\left|\varphi(\xi_x)-\varphi(a)\right|^{m}}\cdot\left[\frac{\varphi(\xi_x)-\varphi(a)}{x-a}\right]^{m}=$$

$$\frac{A}{\left[g(a)\right]^{m}}\cdot\lim_{x\to a}\left[\frac{\varphi(\xi_x)-\varphi(a)}{x-a}\right]^{m},\qquad（6）$$

比较式（5）和式（6），得

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{\varphi(\xi_x)-\varphi(a)}{x-a}\right]^{m}=\frac{1}{1+m}\cdot\left[\varphi'_{+}(a)\right]^{m},$$

从而公式（4）成立，定理得证。

定理3　设$f(t)$，$g(t)$，$\varphi(t)$，m，A满足定理2所述条件和关系，并满足$\varphi'_{+}(a)\neq 0$。则式（2）中的ξ_x满足

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(\xi_x)-\varphi(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=\frac{1}{\sqrt[m]{m+1}}。\qquad（7）$$

证明　由定理2及$\varphi(t)$满足的条件，有

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(\xi_x)-\varphi(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=$$

$$\lim_{x\to a}\left[\left(\frac{\varphi(\xi_x)-\varphi(a)}{x-a}\right)\Big/\left(\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}\right)\right]=$$

$$\frac{\varphi'_{+}(a)}{\sqrt[m]{m+1}}\Big/\varphi'_{+}(a)=\frac{1}{\sqrt[m]{m+1}},$$

即式（7）成立。

定理4　设$f(t)$，$g(t)$满足推广积分中值定理的条件，且$g(a)\neq 0$，$f'_{+}(a)$存在。则式（2）中的ξ_x满足

$$\lim_{x\to a}\frac{f(\xi_x)-f(a)}{x-a}=\frac{1}{2}f'_{+}(a)。\qquad（8）$$

证明　构造

$$h(x)=\frac{\int_a^x f(t)\cdot g(t)\mathrm{d}t-f(a)\int_a^x g(t)\mathrm{d}t}{\left[\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right]^{2}},$$

类似定理2证明，一方面有：

$$\lim_{x\to a}h(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{2\int_a^x g(t)\mathrm{d}t}=$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{2g(\eta_x)(x-a)}=\frac{1}{2g(a)}\cdot f'_{+}(a),$$

另一方面有：

$$\lim_{x\to a}h(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(\xi_x)-f(a)}{\int_a^x g(t)\mathrm{d}t}=$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(\xi_x)-f(a)}{g(\eta_x)(x-a)}=$$

$$\frac{1}{g(a)}\lim_{x\to a}\frac{f(\xi_x)-f(a)}{x-a},$$

比较以上2式可知式（8）成立。

定理5　设$f(t)$，$g(t)$满足定理4的条件，$\varphi(t)$是$[a，x]$上的单调函数，且当$t=a$时右导数$\varphi'_{+}(a)\neq 0$，则式（2）中的ξ_x满足

$$\lim_{x\to a}\frac{f(\xi_x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{f'_{+}(a)}{\varphi'_{+}(a)}。\qquad（9）$$

证明 应用定理4和$\varphi(t)$满足的条件，类似由定理2证明定理3的方法，这里从略。

定理6 设$f(t)$在$[a, x]$上连续，在a点k次可微($k\in N$)且$f^{(i)}(a)=0$，($i=1,2,\cdots,k-1$)；$f^{(k)}(a)\neq 0$，$g(t)$在$[a, x]$上连续不变号且$g(a)\neq 0$，则式（2）中的ξ_x满足：

$$\lim_{x\to a}\frac{f^{(i)}(\xi_x)}{x-a}=\begin{cases}0, & i=1,2,\cdots,k-2;\\ \dfrac{f^{(k)}(a)}{\sqrt[k]{k+1}}, & i=k-1。\end{cases} \tag{10}$$

证明 由洛必达法则有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{|x-a|^k}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^k}=$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{k(x-a)^{k-1}}=\cdots=$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f^{(k-1)}(x)}{k!(x-a)}=\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)\neq 0,$$

取$\varphi(x)=x$，应用定理2可得

$$\lim_{x\to a}\frac{\xi_x-a}{x-a}=\frac{1}{\sqrt[k]{k+1}}, \tag{11}$$

进而，

$$\lim_{x\to a}\frac{f^{(i)}(\xi_x)}{x-a}=$$

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f^{(i)}(\xi_x)-f^{(i)}(a)}{\xi_x-a}\cdot\frac{\xi_x-a}{x-a}\right]=$$

$$\frac{f^{(i+1)}(a)}{\sqrt[k]{k+1}}=\begin{cases}0, & i=1,2,\cdots,k-2;\\ \dfrac{f^{(k)}(a)}{\sqrt[k]{k+1}}, & i=k-1。\end{cases}$$

证毕。

说明 若$f(t)$，$g(t)$满足定理6条件，以上证明中得到的式（11），其实已在文献[9]中得到（定理1），而定理1显然是此处定理2取$\varphi(t)=t$的特殊情况。

定理7 在定理6条件中，再加上条件$\varphi(t)$在$[a, x]$上单调，且存在$\varphi'(a)\neq 0$，则

$$\lim_{x\to a}\frac{f^{(i)}(\xi_x)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=$$

$$\begin{cases}0, & i=1,2,\cdots,k-2;\\ \dfrac{1}{\sqrt[k]{k+1}}\cdot\dfrac{f^{(k)}(a)}{\varphi'(a)}, & i=k-1。\end{cases} \tag{12}$$

证明 利用定理6，类似由定理2证明定理3的方法，即可得证。

参考文献：

[1] 胡晶地. 中值定理“中间点”的渐近性态[J]. 高等数学研究，2009，12(1)：52-54.
Hu Jingdi. The Progressive Teleomorph of the Intermediate Point of Mean Value Theorem[J]. Studies in College Mathematics，2009，12(1)：52-54.

[2] 施伟民，陈争鸣. 关于积分中值定理的中间值的渐进性质[J]. 吉林化工学院学报，2006，23(2)：77-79.
Shi Weimin，Chen Zhengming. The Asymptote Behavior of Intermediate Point in the Mean Value Theorem for Integrals [J]. Journal of Jilin Institute of Chemical Technology，2006，23(2)：77-79.

[3] 刘昌茂. 积分中值定理中间点的渐近性更一般结果[J]. 吉首大学学报：自然科学版，2006，27(3)：8-11.
Liu Changmao. Asymptoticity of the Intermediate Point in the Mean Value Theorem of Integrals[J]. Jounal of Jishou University：Natural Science Edition，2006，27(3)：8-11.

[4] 刘晓纲，艾 青，张树义. 关于中值定理“中间点”的渐近性[J]. 渤海大学学报：自然科学版，2005，26(4)：333-335.
Liu Xiaogang，Ai Qing，Zhang Shuyi. On Asymptotic Behavior of “Medial point” for Mean Value Theorem[J]. Journal of Bohai University：Natural Science Edition，2005，26(4)：333-335.

[5] Jacobson B. On the Mean Value Theorem for Integrals[J]. Amer. Math. Monthly，1982(89)：300-301.

[6] Zhang B L. A Note on the Mean Value Theorem for Integrals [J]，Amer. Math. Monthly，1997 (104)：561-562.

[7] 戴立辉，吴 亭. 积分第一中值定理中间点的渐近性[J]. 闽江学院学报，2009，30(2)：24-29.
Dai Lihui，Wu Ting. Asymptotic Properties of Intermediate Point on the First Mean Value Theorem for Integral[J]. Journal of Minjiang University，2009，30(2)：24-29.

[8] 高国成，郑艳琳，张来亮. 关于积分中值定理的一个注记[J]. 大学数学，2003，19(2)：94-95.
Gao Guocheng，Zheng Yanlin，Zhang Lailiang. A Note on the Mean Value Theorem for Integrals[J]. College Mathematics，2003，19(2)：94-95.

[9] 安芹力. 积分中值定理的渐近性推广[J]. 高等数学研究，2009，12(1)：55-56.
An Qinli. Integral Mean-Value Theorem Asymptotic Promotion[J]. Studies in College Mathematics，2009，12(1)：55-56.

（责任编辑：罗立宇）