随机变量的数学期望和方差教学探析

黄创霞

（长沙理工大学 数学与计算科学学院，湖南 长沙 410076）

摘　要：从“逼近”的角度介绍了数学期望和方差，通过实例说明从“逼近”的角度更加容易理解数学期望和方差的概念，让学生加深对枯燥数学概念的感性认识，有利于培养学生学习数学的兴趣，提高学生理解、运用数学知识的能力。

关键词：随机变量；数学期望；方差

中图分类号：G642.0　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2010)01-0101-02

On Teaching Mathematical Expectation and Variance of Random Variable

Huang Chuangxia

（School of Mathematics and Computing Science，Changsha University of Science and Technology，Changsha 410076，China）

Abstract：In view of "approximation", introduces mathematical expectation and variance. Exemplifies a much more easy way to understand the mathematical definitions from the "approximation" perspective, and gives advice on how to inspire students' interests in mathematics and develop their understanding and applying abilities on the knowledge of mathematics.

Keywords：random variable；expectation；variance

0　引言

随机变量是一种数学模型，它是Kolmogorov关于概率公理的模型中最常见的特例。用随机变量来描述随机现象是概率论的一个重要手段，因此，随机变量的概念与作用在概率统计课程中具有特别重要的地位。数学期望和方差是随机变量最基本的数字特征，其它所有的数字特征都可看作随机变量的函数的数学期望或方差[1]。

数学期望和方差虽然不能像分布函数、分布律、概率密度一样完整地描述随机变量的特性，但它们能够描述随机变量较重要或人们较关心的某些特征，其在理论上和应用中都非常重要，然而，初学者从普通高等学校概率统计教材上很难对数学期望和方差的概念获得较深刻的认识。

1　数学期望和方差的另一种解释

普通概率统计教材介绍随机变量的数学期望是通过介绍离散型随机变量按各种取值的概率大小所作的加权平均值来进行解释的，而对于连续型随机变量的数学期望则直接给出数学定义，对于方差则解释为该随机变量偏离数学期望的程度，一般地，有下述定义。

定义 1[2]　设离散型随机变量X的概率分布为：

$P\{X=x_i\}=p_i$，$i=1,2,3,\cdots$，

若级数$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|p_i$收敛，则称级数$\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i$为离散型随机变量$X$的数学期望，记为$EX$。

定义 2[3]　设连续型随机变量X的概率密度为$f(x)$，若广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)\mathrm{d}x$收敛，则称$\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$为连续

收稿日期：2009-09-04

基金项目：湖南省教育厅普通高校教学改革研究立项基金资助项目（湘教通[2009]321-115），长沙理工大学教育改革课题基金资助项目（KC0911）

通信作者：黄创霞（1977-），男，湖南湘阴人，长沙理工大学副教授，博士后，硕士研究生导师，主要从事神经网络与动力系统研究，E-mail：cxiahuang@126.com

型随机变量X的数学期望，记为EX。

定义 3[4] 设X是随机变量，若$E[X-EX]^2$存在，则称$E[X-EX]^2$为随机变量X的方差，记为DX。

对于上述数学期望和方差，在教学中发现许多学生都是靠死记硬背来掌握定义的，学习完后对知识容易遗忘，有的学生甚至在考试时数学期望和方差的表达式都记不清楚，这主要是由于学生对抽象的数学定义缺乏感性认识，靠记忆学习高等数学是行不通的。

其实，从“逼近”的角度看，如果只允许用实数m去近似随机变量X，使其平均平方误差最小，那么，这个数m就是随机变量X的“最佳逼近”。下面给出数学期望和方差的另一种解释[5]。

设X是随机变量，且EX^2存在，则由Cauchy-Schwartz不等式知$(EX)^2 \le EX^2 < +\infty$，即$EX$存在，记为$m$。对任意实数$a$，$|X-a|$表示$X$与$a$的随机偏差的绝对值，则实数$a$与随机变量$X$的平均平方误差为

$$\begin{aligned}E(X-a)^2 &= E\left([(X-m)+(m-a)]^2\right)=\\ &E(X-m)^2+2(m-a)E(X-m)+(m-a)^2=\\ &E(X-m)^2+2(m-a)(EX-m)+(m-a)^2=\\ &E(X-m)^2+(m-a)^2 \ge E(X-m)^2,\end{aligned}$$

这就说明$E(X-m)^2=\min\limits_a\{E(X-a)^2\}$。

上式的意思是：若用实数去代表随机变量，它的数学期望m是使得平均平方误差最小的那个实数，而这个最小平均平方误差是$E(X-EX)^2$，将这个量记为DX，它就是方差，因而，方差就是随机变量和它的数学期望的平均平方误差，也就是它与所有任意实数的最小平均平方误差，可见，随机变量的方差确实刻画了它的分散程度。

2 实例题析

例 设X是连续型随机变量，概率密度满足：当$x \notin [a,b]$时，$f(x)=0$，求证：

$a \le EX \le b$，$DX \le [(b-a)/2]^2$。

证明 因为X是连续型随机变量，由于

$a=\int_a^b af(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b bf(x)\mathrm{d}x = b$，所以有$a \le EX \le b$，其实，由题目已知条件可知，连续型随机变量$X$只能在闭区间$[a, b]$上取值，由于$EX$是连续型随机变量$X$的“最佳逼近”，它当然不会是在闭区间$[a, b]$以外取值，那么$a \le EX \le b$就是显而易见的。又由于方差是随机变量和它的数学期望的平均平方误差，也是它与所有任意实数的最小平均平方误差，因而，取$\forall c \in [a,b]$，有$DX \le E(X-c)^2$成立。另一方面，对于连续型随机变量X，取$c=(a+b)/2$，有

$E(X-c)^2 \le E(b-c)^2 = (b-c)^2 = [(b-a)/2]^2$成立，故此立即可得$DX \le [(b-a)/2]^2$。

3 结语

上述例题为笔者所执教的概率统计课程的1道配套练习题，当时许多同学只会证明$a \le EX \le b$，而对$DX \le [(b-a)/2]^2$的证明则束手无策。实际上，教材在介绍数学期望和方差的性质时也提到不等式$DX \le E(X-c)^2$，但是许多学生由于没有从根本上理解这个不等式的涵义，仅靠机械记忆方差的性质，当然也就不会在证明题中想到应用它。笔者在执教甲、乙2个班的概率统计课程中，做了个小实验，2个班新课随后都详细讲解了该习题，在甲班按照教材内容直接讲解答案，在乙班先从“逼近”的角度补充相关数字特征背景，然后再讲解习题。在期末复习中，本人再次请同学解答本题，有趣的是，经调查，甲班居然有30 %的同学对不等式$DX \le [(b-a)/2]^2$的证明依然束手无策，而乙班则基本上没有做不出来的，此情况引发笔者写出了这篇教学浅探。可见，对于执教概率统计课程的高校教师而言，在按教材讲授完课程基本内容后，还有必要从其它角度对知识进行深入讲解和补充，以便让学生对枯燥的数学概念有更深刻的认识，同时，也有利于提高学生的数学素养，开拓知识视野，培养数学思维。

参考文献：

[1] 徐丽君. 浅谈数学期望的计算与应用[J]. 攀枝花学院学报，2005，22(6)：84-87.
Xu Lijun. Discussion on the Computing and Applications of the Mathematical Expectation[J]. Journal of Panzhihua University，2005，22(6)：84-87.

[2] 韩旭里，谢永钦. 概率论与数理统计[M]. 上海：复旦大学出版社，2006.
Han Xuli，Xie Yongqin. Probability and Mathematical Statistics[M]. Shanghai：Fudan University Press，2006.

[3] 谢永钦. 概率论与数理统计[M]. 北京：北京邮电大学出版社，2009.
Xie Yongqin. Probability and Mathematical Statistics[M]. Beijing：Beijing University of Posts and Telecommunications Press，2009.

[4] 金治明，李永乐. 概率论与数理统计[M]. 长沙：国防科技大学出版社，1997.
Jin Zhiming，Li Yongle. Probability and Mathematical Statistics[M]. Changsha：National University of Defense Technology Press，1997.

[5] 钱敏平，叶 俊，萧树铁. 随机数学[M]. 北京：高等教育出版社，2004.
Qian Minping，Ye Jun，Xiao Shutie. Stochastic Mathematics [M]. Beijing：Advanced Education Press，2004.

（责任编辑：李玉珍）