

哈密尔顿混沌的连续有限元法

汤琼

(湖南工业大学理学院, 湖南株洲 412008)

摘要: 常微分方程的连续有限元法对非线性哈密尔顿系统连续二次有限元在5阶量意义下近似保辛, 且保持能量守恒。在数值实验中, 结合庞加莱截面和混沌运动对初值的敏感性, 将有限元法用于求解有混沌现象的哈密尔顿系统, 并与辛差分法进行比较, 数值试验结果与理论相吻合, 为哈密尔顿混沌的研究提供了较好的方法。

关键词: 哈密尔顿方程; 连续有限元方法; 辛算法; 能量守恒; 混沌

中图分类号: O175

文献标志码: A

文章编号: 1673-9833(2010)01-0067-05

The Continuous Finite Element Methods for Hamiltonian Chaos

Tang Qiong

(College of Science, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412008, China)

Abstract: The finite element methods of ordinary differential equations are in the 5-order quantity approximately symplectic conservation for continuous quadratic element of nonlinear Hamiltonian systems, and maintain energy conservation. In the numerical experiments of Hamiltonian chaos's, combining section and sensitiveness to initial value of the Chaos movement, applying the quadratic element methods and comparing with symplectic difference methods, obtains the numerical test results consistent with the theoretical. Provides a better method for studying Hamiltonian chaos.

Keywords: Hamiltonian systems; continuous finite element method; symplectic algorithm; energy conservation; chaos

0 引言

经典力学里, 混沌是指一类具有不可预测行为的确定性运动^[1], 几乎所有的经典力学系统都显示有混沌运动。1963年, 气象学家 E. Lorenz 发表了他用数值方法研究大气热对流模型方程时发现的确定性非周期流; 1964年, 天文学家 M. Henon 与 C. Heiles 在关于星系中星体轨道的数值研究中, 发现了当年庞加莱用定性方法研究过的保守系统中的不规则运动, 这表明在经典力学里普遍存在的一种运动形式: 确定性混沌。混沌运动之所以表现出随机性, 其根本原因在于临近轨道的指数型分离。一个确定性运动是否混沌, 与它

附近的轨道运动有着密切的关系, 混沌的这一特征也称作运动对初值的敏感性, 是运动的指数型局部不稳定性。

对于一个不可积的体系, 根据 KAM 原理, 体系中的周期轨迹多受破坏而变为混沌不规则的运动。绝大多数具有 2 个或 2 个以上自由度的保守哈密尔顿系统都是不可积的。绝大多数不可积哈密尔顿系统都既有稳定的规则运动, 也有不稳定的混沌运动, 使得相空间中规则与混沌区交错并存的复杂结构。

哈密尔顿系统是一个重要的动力系统, 因此, 如何正确计算哈密尔顿系统有着重要的意义。正确的计算方法离散后应该保持着问题原型的基本特征, 其中

收稿日期: 2008-08-20

基金项目: 中国包装总公司科研基金资助项目(2008-XK08), 湖南省自然科学基金资助项目(09JJ3007)

通信作者: 汤琼(1972-), 女, 湖南浏阳人, 湖南工业大学副教授, 博士, 主要从事微分方程数值解方面的研究,

E-mail: zgzxysx@163.com

辛性质和能量守恒是哈密顿系统的2个重要特征。冯康等^[2-3]提出了哈密顿系统辛几何算法,即算法的每一步进都是辛变换,取得了一系列的优秀成果。由辛几何算法构造的辛差分格式能保持该系统基本特征,在有关整体性、结构性、长期跟踪能力上具有独特的优越性。T. J. Bridges、J. M. Sanz-Serna、C. Kane、王雨顺、丁培柱^[5-9]等人作了进一步的研究,得出结论:对线性哈密顿系统辛算法能保持能量守恒,但对非线性的哈密顿系统,能量为近似守恒。

利用连续有限元法求解哈密顿系统的有关文献较少,钟万勰等^[10]对常系数线性振动方程研究其线性有限元矩阵,证明它是自动保辛的,他在《时空混和元与多辛》一文中^[11],提出对时间、空间有限元自动保辛;笔者^[12]与陈传森等人研究了哈密顿系统的有限元法,这是一个重要的开端。

本文将有限元法用于求解有混沌现象的哈密顿系统,并与辛差分法进行比较,数值试验结果显示,有限元法能在有混沌现象出现时仍能长时间保持能量守恒,考察当 $Q_1=0$ 时庞加莱截面(Q_2, P_2),有限元法能长时间保持系统的结构,为哈密顿混沌的研究提供了较好的方法。

1 常微分方程的连续有限元法及其守恒性

在区间 $J = [0, T]$ 上,考虑一阶常微分方程初值问题: $\frac{dz}{dt} = z' = f(t, z), z(0) = z_0$ 。 (1)

将 J 作拟一致剖分 $J^h: t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = T$, 单元 $I_j = (t_{j-1}, t_j)$ 最大步长 $h = \max h_j, h_j \geq Ch, 1 \leq j \leq N$, 常数 C 与 j, h 无关。在此剖分上,定义 m 次连续有限元空间如下:

$$S^h = \{\omega \mid \omega \in C(J), \text{ 在每个 } I_j \text{ 上 } \omega \in P_m\}。$$

在每个单元上的 m 次多项式有 $m+1$ 个参数,解初值问题时,在 I_j 上的起始值 $z(t_{j-1})$ 已知,故只有 m 个自由度。定义 m 次连续有限元 $Z \in S^h$ 满足:

$$\int_{I_j} (Z' - f(t, Z))v dt = 0, v \in P_{m-1}, Z(0) = z_0。 (2)$$

即在单元 I_j 上与任意 $m-1$ 次多项式 P_{m-1} 正交,若取 $w \in S^h$,其导数 w' 是 $m-1$ 次多项式,这里 v 在 I_j 上是 $m-1$ 次多项式,实际计算时可以取 $v = (t - t_{j-1})^i, i=0, 1, \dots, m-1$,得到一个方程组。

引理1^[4] 微分方程的 m 次连续有限元在单元节点 t_j 上有超收敛:

$$(z - Z)(t_j) = O(h^{2m}) \mid z \parallel_{m+1, \infty}。 (3)$$

设 H 是 $2n$ 个变量 $p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n$ 的可微函数,哈密顿方程是:

$$p' = H_q, q' = H_p。 (4)$$

其中: $p = (p_1, \dots, p_n)^T, q = (q_1, \dots, q_n)^T$, 应用到力学, p, q, H 分别表示动量、位移和能量。令 $z = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$, 则方程(4)可记为 $z' = J^{-1}H_z$, 其中 $J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}, I_n$ 为 n 阶单位矩阵, $H_z = \begin{bmatrix} H_p \\ H_q \end{bmatrix}$, 函数 H 称为系统的哈密顿函数。

显然有 $J^{-1} = J^T = -J$ 。一个 $2n$ 阶矩阵是辛阵,如果 $S^T J S = J$, 记 $Sp(2n)$ 表示所有辛阵组成的辛群,一个 $2n$ 阶矩阵 B 满足 $JB + B^T J = 0$, 则称 B 为无穷小辛阵。

定义1^[3] R^{2n} 上一个微分同胚 $w(z)$, 若

$\left[\frac{\partial w}{\partial z} \right]^T J \left[\frac{\partial w}{\partial z} \right] = J$, 即对于每一个点 z 的Jacobi矩阵是辛矩阵, 则 w 是一个辛变换。

引理2^[2] $S = M^{-1}N \in Sp(2n)$, 当且仅当

$$M J M^T = N J N^T。$$

引理3^[12] 用任意次连续有限元求解哈密顿方程组, 其能量是守恒的。

证明 方程组(4)的 m 次连续有限元 $Z = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$, 满足正交关系:

$$\int_{I_j} (Z' + J H_z) v dt = 0, Z(0) = z(0)。 (5)$$

取 $v = \begin{bmatrix} Q \\ P \end{bmatrix}$, 得

$$\begin{cases} \int_{I_j} (P' + H_q(P, Q))Q dt = 0, P(0) = p_0, \\ \vdots \\ \int_{I_j} (Q' - H_p(P, Q))P dt = 0, Q(0) = q_0, \end{cases} (6)$$

两式相减得:

$$\int_{I_j} (H_q Q' + H_p P') dt = \int_{I_j} \frac{d}{dt} H(P, Q) dt = 0, (7)$$

故在节点 t_j 上, $H(P(t_j), Q(t_j)) = H(p_0, q_0)$ 。

2 非线性Hamilton系数的二次有限元的高精度保辛性

考虑一般哈密顿系统:

$$z' = J H_z(z), z(0) = z_0。 (8)$$

其 m 次连续有限元 Z 在区间 I_j 上满足:

$$\int_{I_j} (Z' - J H_z(Z))v dt = 0, v \in P_{m-1}, Z(0) = z_0。 (9)$$

将上式对 Z_j 求导, 得到 $\frac{\partial Z}{\partial Z_j}$ 的方程:

$$\int_{I_j} \left(\frac{\partial Z'}{\partial Z_j} + J H_z \frac{\partial Z}{\partial Z_j} \right) v dt = 0, v \in P_{m-1}。 (10)$$

在标准区间 $E=(-1,1)$ 上引进 Legendre 正交多项式:

$$L_0 = 1, L_1 = x, L_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \dots,$$

$$L_m = \frac{1}{2^m m!} \partial^m (x^2 - 1)^m, \dots$$

任何平方可积函数 u 可展开为 Legendre 多项式 (L-型) 级数, $u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j L_j(x)$, $\alpha_j = \left(j + \frac{1}{2}\right) (u, L_j)$, 考虑 M-型拟正交多项式:

$$M_0 = 1, M_1 = x, M_2 = \frac{1}{2}(x^2 - 1), \dots,$$

$$M_{m+1} = \int_{-1}^1 L_m(x) dx, m = 0, 1, 2, \dots$$

利用变换 $r = \frac{h}{2}x + \frac{t_j - t_{j-1}}{2}$ 将积分区间 I_j 化为标准区间 $E = (-1, 1)$ 。取 v 为 L_j , $j = 0, 1, \dots, m-1$, 则上述方程 (10) 化为:

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{\partial Z_j}{\partial Z_j} - \frac{h}{2} \mathbf{J} \mathbf{H}_{zz} \frac{\partial Z}{\partial Z_j} \right) L_j dx = 0, \quad (11)$$

考虑 z 的 2 次元 Z 的 M-型展开在标准区间 E 上,

$$Z = \frac{M_0 - M_1}{2} Z_j + \frac{M_0 + M_1}{2} Z_{j+1} + a_2 M_2,$$

其中, M_i 为 M-型函数, a_2 为对应的系数, Z_j, Z_{j+1} 分别为有限元在区间 $I_j = (t_j, t_{j+1})$ 左右端点的值。

由式 (11) 得:

$$\begin{pmatrix} I - \frac{h\mathbf{J}(\mathbf{H}_{zz}, M_2 L_1)}{2(L_1, L_1)} & \frac{h\mathbf{J}(\mathbf{H}_{zz}, M_0 L_1 + M_1 L_1)}{4(L_1, L_1)} \\ \frac{h\mathbf{J}(\mathbf{H}_{zz}, M_2 L_0)}{2(L_0, L_0)} & I + \frac{h\mathbf{J}(\mathbf{H}_{zz}, M_0 L_0 + M_1 L_0)}{4(L_0, L_0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial a_2}{\partial Z_j} \\ \frac{\partial a_2}{\partial Z_{j+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h\mathbf{J}}{2(L_1, L_1)} \left(\mathbf{H}_{zz} \frac{M_0 - M_1}{2}, L_1 \right) \\ I - \frac{h\mathbf{J}}{2(L_0, L_0)} \left(\mathbf{H}_{zz} \frac{M_0 - M_1}{2}, L_0 \right) \end{pmatrix}$$

记系数 b_{ksl} 为 $k+s$ 次多项式 $M_k L_s$ ($k, s = 0, 1, 2$) 关于 L-型展开中对应 L_l 项的系数, 由

$$\left(\mathbf{H}_{zz}, \frac{\partial^k (x^2 - 1)^k}{\partial x^k} \right) = O(h^k), k = 1, 2, \dots;$$

$$\text{则 } \frac{h\mathbf{J}(\mathbf{H}_{zz}, M_2 L_1)}{2(L_1, L_1)} = O(h^2), \frac{h\mathbf{J}(\mathbf{H}_{zz}, M_0 L_1)}{4(L_1, L_1)} = O(h^2),$$

$$\frac{h\mathbf{J}(\mathbf{H}_{zz}, M_1 L_0)}{4(L_0, L_0)} = O(h^2), \frac{h\mathbf{J}(\mathbf{H}_{zz}, L_0)}{4(L_1, L_1)} = O(h^2).$$

由引理 1、2 和定义 1, 有

$$\begin{pmatrix} \partial Z_{j-} \\ \partial Z_j \end{pmatrix}^T \mathbf{J} \begin{pmatrix} \partial Z_{j+1} \\ \partial Z_j \end{pmatrix} = \mathbf{J} + O(h^2).$$

定理 1 非线性哈密尔顿系统的二次元在 5 阶量意义下高精度保辛, 即

$$\begin{pmatrix} \partial Z_{j-} \\ \partial Z_j \end{pmatrix}^T \mathbf{J} \begin{pmatrix} \partial Z_{j+1} \\ \partial Z_j \end{pmatrix} = \mathbf{J} + O(h^5) \text{ 具有 4 阶精度.}$$

其中, 二次元具体计算格式如下:

$$Z_j, Z_{j+1} = \frac{h_j}{2} \mathbf{J} \int_{-1}^1 \mathbf{H}_z(\mathbf{Z}) dx,$$

$$\frac{5}{6} Z_j - \frac{2}{3} Z_{j-\frac{1}{2}} - \frac{1}{6} Z_{j-1} = -\frac{h_j}{4} \mathbf{J} \int_{-1}^1 \mathbf{H}_{zz}(\mathbf{Z})(x+1) dx \quad (12)$$

由上述方程组确定 Z 在点 $t_{j-\frac{1}{2}}, t_j$ 上的值 $Z_{j-\frac{1}{2}}, Z_j$, 逐层单元求解 Z 在各节点的值。

3 数值试验

数值试验 1 考虑非线性哈密尔顿系统

$$H(p, q) = \frac{p^2 + 4q^2 + 4q^4}{3},$$

$$p_0 = 0.5, q_0 = 0.25.$$

其正则方程为: $p' = -\left(\frac{4q + 8q^3}{3}\right), q' = p$ 。

方程的解析解不知道。

考虑 4 阶辛 R-K 法^[3] (2 级 Gauss-Legendre 格式, 具有 4 阶精度的辛格式), 其 Butcher 表中 A, b 如下:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3-2\sqrt{3}}{12} \\ 3+2\sqrt{3} & 1 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

分别用 4 阶辛 R-K 法 (4SRK)、4 阶辛差分格式^[2] (4SS)、二次元 (2FE) 求解, 有关长时间计算轨道稳定性的结果见图 1、2 和表 1。

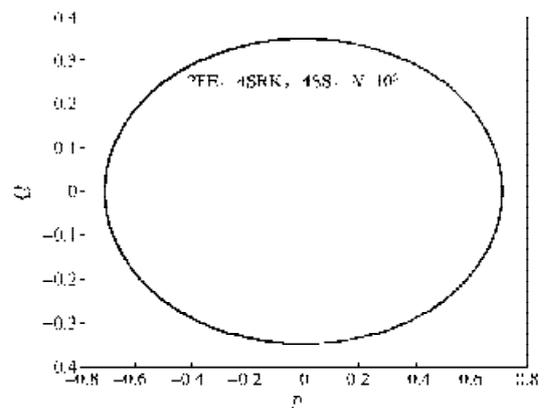


图 1 2FE,4SRK,4SS, $h=0.1, N=10^5$ 时相空间 (P, Q) 曲线图
Fig.1 The phase space (P, Q) track plot of 2FE,4SRK,4SS, $h=0.1$ and $N=10^5$

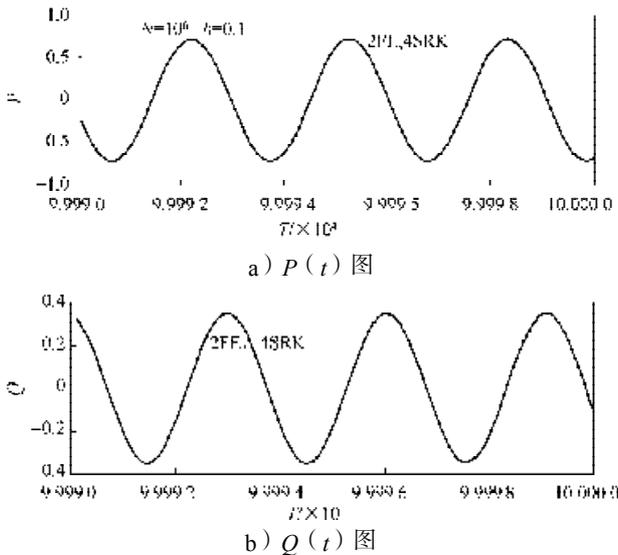


图2 2FE, 4SRK, $N=10^6$, $h=0.1$ 时最后100个点的 $P(t)$ 、 $Q(t)$ 图形

Fig. 2 The $P(t)$ 、 $Q(t)$ plot of last 100 points for 2FE, 4SRK, $N=10^6$ and $h=0.1$

表1 数值试验1中2FE, 4SRK, 4SS在节点的能量误差 H_h-H
Table 1 The energy errors H_h-H for 2FE, 4SS and 4SRK in the first numerical experimental

求解方法	T				
	1	10	100	1 000	10 000
二次元	-1.110e-16	1.110e-16	-8.326e-16	-4.773e-15	-3.447e-14
4阶辛R-K法	5.876e-8	5.760e-10	1.210e-9	2.735e-8	7.330e-8
4阶辛格式	-6.824e-7	-2.795e-7	-2.960e-7	-4.600e-7	-1.155e-7

从图1可看出, 通过较大步长、较长时间 ($T=10^4$) 的计算, 二次元、4阶辛R-K法、4阶辛格式计算的相空间 (p, q) 轨道重合; 从图2可看出, 用二次元计算的结果与4阶辛R-K法计算所得 $P(t)$ 、 $Q(t)$ 的曲线在积分步数 $N=10^6$ 还保持重合, 二次元与辛算法能较长时间保持轨道稳定性; 从表1可见, 二次元能较长时间保持能量守恒。

数值试验2 具有2个振子耦合的 Henon-Heiles (HH) 体系是一个著名混沌体系的例子, 它是具有对称性势能天体问题的一个模型。很多类的三体系统, 当只考虑 Taylor 展开的前三项时, 可以简化成一个 Henon-Heiles 类型的哈密顿体系。

考虑 Henon-Heiles 体系的哈密顿系统可以写成如下形式:

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + q_1^2 q_2 - \frac{1}{3} q_2^3$$

由文献[1]知, 当 $H < 1/12$ 时, 对任意初始条件, 解是正则的; 当初始条件增加使 $H > 1/12$ 时, 导致混沌现象的出现。

取初始条件 (设为初始条件1) 为:

$p_1=(2*0.15925)^{1/2}$, $p_2=q_1=q_2=0$, $H=0.15925 > 1/12$, 分别取步长 $h=1/5, 1/10$, 积分区间 $T=[0, 30000]$, 并分别

用 2FE, 4SRK, 4SS 计算能量误差 H_h-H , 结果见表2。

表2 初始条件1的在节点的能量误差 H_h-H
Table 2 The energy errors H_h-H for 2FE, 4SS and 4SRK of the first initial condition

求解方法	T			
	30	300	3 000	30 000
$h=1/5$ 2FE	8.326 7e-17	-8.881 8e-16	-2.664 5e-15	1.235 1e-14
4SRK	3.185 4e-7	5.820 9e-7	5.092 6e-7	-2.174 0e-7
4SS	1.725 0e-6	2.289 1e-6	2.485 3e-6	-2.772 7e-7
$h=1/10$ 2FE	5.551 1e-17	-1.082 5e-15	-6.383 8e-15	-3.005 9e-14
4SRK	2.002 5e-8	3.634 3e-8	3.128 0e-8	6.851 2e-9
4SS	1.089 3e-7	1.455 1e-7	1.586 0e-7	1.339 8e-7

取如下初始条件 (设为初始条件2):

$p_1=0.12, p_2=q_1=q_2=0.12, H=0.029925 < 1/12$, 步长取 $h=1/5$, 积分区间 $T=[0, 30000]$, 用 2FE, 4SRK, 4SS 计算能量误差 H_h-H , 结果见表3。

表3 初始条件2的节点的能量误差 H_h-H
Table 3 The energy errors H_h-H for 2FE, 4SS and 4SRK of the second initial condition

求解方法	T			
	30	300	3 000	30 000
2FE	-1.3444e-17	4.3368e-19	-2.3896e-16	-1.1106e-15
4SRK	-4.8026e-5	-4.8042e-5	-4.8022e-5	-4.8018e-5
4SS	-3.0848e-7	-4.3700e-7	-4.3814e-7	-2.7566e-7

对 $H < 1/12$ 及 $H > 1/12$ 两种情形, 分别用二次元、4阶辛R-K法及4阶辛格式做了计算, 从上表2、3可见, 二次元计算 Henon-Heiles 体系时, 在有混沌现象出现时仍能长时间保持能量守恒, 而对于辛差分格式, 能量偏差较大, 特别是有混沌现象和没有混沌现象能量误差值有较大区别。考察当 $Q_1=0$ 时的庞加莱截面 (Q_2, P_2), 2种情形下, 3种方法绘制的图像都分别出现了混沌和没有混沌的现象, 且能长时间保持系统的结构。

可见, 用连续有限元法求解哈密顿混沌系统有较好的效果, 它可以从另一方面弥补辛差分算法的不足, 从而为哈密顿混沌系统的数值计算提供了一种较好的方法。

参考文献:

[1] 顾雁. 量子混沌[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1996. Gu Yan. Quantum Chaos[M]. Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, 1996.
[2] 冯康. 冯康文集[M]. 北京: 国防工业出版社, 1995. Feng Kang. Collected Works of Feng Kang[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1995.
[3] 冯康, 秦孟兆. 哈密顿系统的辛几何算法[M]. 杭州: 浙江科学技术出版社, 2003. Feng Kang, Qin Mengzhao. Symplectic Geometry Algorithm

- for Hamiltonian Systems[M]. Hangzhou: Zhejiang Science and Technology Publishing House, 2003.
- [4] 陈传森. 有限元超收敛构造理论[M]. 长沙: 湖南科技出版社, 2001.
Chen Chuanmiao. Finite Element Superconvergence Construction Theory[M]. Changsha: Hunan Science & Technology Press, 2001.
- [5] Bridges T J, Reich S. Multisymplectic Integrators : Numerical Schemes for Hamiltonian PDEs that Conserve Symplecticity[J]. Phys Lett A, 2001, 284: 184-193.
- [6] Sanz-Serna J M, Calvo M P. Numerical Hamiltonian Problems [M]. London: Chamman and Hall, 1994.
- [7] Kane C, Emarsden J, Ortiz M. Symplectic-Energy-Momentum Preserving Variational Integrators[J]. Math Phys, 1999, 40: 3353-3371.
- [8] 王雨顺, 王 斌, 秦孟兆. 2+1 维 Sine-Gordon 方程多辛格式的复合计算[J]. 中国科学: A 辑, 2003, 33(3): 272-281.
Wang Yushun, Wang Bin, Qin Mengzhao. Complex Calculation of Multi-Symplectic Schemes for the (2+1) Dimensional Sine-Gordon Equation[J]. Science in China: Series A, 2003, 33(3): 272-281.
- [9] 刘学深, 丁培柱. 量子系统保结构计算新进展[J]. 物理学进展, 2004, 24(1): 47-89.
Liu Xueshen, Ding Peizhu. New Progress of Structure-Preserving Computation for Quantum System[J]. Progress in Physics, 2004, 24(1): 47-89.
- [10] 钟万勰, 姚 征. 时间有限元与保辛[J]. 机械强度, 2005, 27(2): 178-183.
Zhong Wanxie, Yao Zheng. Time Domain Fem and Symplectic Conservation[J]. Journal of Mechanical Strength, 2005, 27(2): 178-183.
- [11] 钟万勰. 时空混和元与多辛[J]. 计算力学学报, 2007, 24(2): 1-6.
Zhong Wanxie. Time-Space Harmony Element and Multi-Symplecticity[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2007, 24(2): 1-6.
- [12] Tang Q, Chen C M. Continuous Finite Element Methods for Hamiltonian Systems[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2007, 28(8): 1071-1080.

(责任编辑: 廖友媛)

我校《受限空间多相流动传热与传质机理研究》项目

喜获 2009 年湖南省自然科学奖一等奖

1月28日上午, 2009年湖南省科学技术奖励大会在长沙隆重召开, 我校《受限空间多相流动传热与传质机理研究》项目获得湖南省自然科学奖一等奖, 该项目负责人、校长王汉青出席大会并上台领奖, 副校长谷正气和科技处负责人参加了大会。

《受限空间多相流动传热与传质机理研究》项目获奖, 打破了该奖项一等奖长期由省内重点高校垄断的局面, 标志着我校科技工作提升到一个新的水平。该项目课题组成员二十年如一日, 致力于流体力学在暖通空调领域的运用, 成果丰硕, 完成国家级自然科学基金项目7项, 在国内外刊物上发表学术论文200余篇, 其中被SCI收录34篇, EI收录62篇, ISTP检索43篇。该成果丰富和完善了本学科和相关学科领域有关受限空间传热与传质分析方法, 加深了对其机理的认识, 推动了学科理论的深入发展, 对本学科和相关学科领域具有重要的工程实践指导意义。