第24卷第1期 湖南工业大学学报 Vol.24 No.1
2010年1月 Journal of Hunan University of Technology Jan. 2010

核为$|x-s|^{-1}\ln|x-s|$的强奇异积分的数值计算法

吕　勇，刘兴国，肖满生

（湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412008）

摘　要：讨论了核为$|x-s|^{-1}\ln|x-s|$的一种强奇异积分$\int_a^b \frac{\ln|x-s|}{|x-s|}f(x)\mathrm{d}x$，给出了它的Hadamard有限部分积分的定义，并利用Lagrange线性插值构造了函数$f(x)$这类强奇异积分的数值算法，最后分析和讨论了算法的误差估计。

关键词：强奇异积分；有限部分；数值方法

中图分类号：O172.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2010)01-0063-04

A Numerical Method for A Kind of Hypersingular Integral with Kernel $|x-s|^{-1}\ln|x-s|$

Lv Yong，Liu Xingguo，Xiao Mansheng

（College of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412008，China）

Abstract：Discusses a kind of hypersingular integral $\int_a^b \frac{\ln|x-s|}{|x-s|}f(x)\mathrm{d}x$ with kernel $|x-s|^{-1}\ln|x-s|$, gives the definition of Hadamard's finite-part integral, and constructs a numerical method for $f(x)$ hypersingular integral with Lagrange linear interpolation. At last analyses and discusses the error of the arithmetic.

Keywords：hypersingular integral; the finite-part; a numerical method

0　引言

边界元方法是在经典的边界积分方程求解方法的基础上，吸收了有限元离散化技术而发展起来的一种偏微分方程数值解法。由于利用此方法能降低空间维数，因此它被广泛地应用在弹性力学、断裂力学、流体力学等工程应用领域的数值计算中。然而偏微分方程的边值（或初值）问题归化为边界积分方程时，其积分方程常常是奇异的，有的甚至是强奇异的。因此，寻求计算强奇异积分的数值方法便成为当前积分方程及边界元研究领域中的一个重要课题[1-5]。

强奇异积分被定义为Hadamard有限部分积分，它是传统的Riemann积分和Cauchy主值积分的推广。通过此种定义，可以计算出确定的或近似积分值。本文在前人研究的基础上讨论了核为$|x-s|^{-1}\ln|x-s|$的一类强奇异积分的数值计算，并给出了算法的误差分析，最后通过数值例子说明该理论分析是合理的。

1　数值计算法

本研究中考虑强奇异积分$\int_a^b \frac{\ln|x-s|}{|x-s|}f(x)\mathrm{d}x$，其中

收稿日期：2009-08-21

基金项目：中国包装总公司科研计划学科建设项目（2008-XK08），湖南省教育厅基金资助项目（08C292，09C339），湖南工业大学教学改革研究基金资助项目（08D19）

通信作者：吕　勇（1966-），男，重庆涪陵人，湖南工业大学副教授，硕士，主要研究方向为微分方程数值解，有限元超收敛，E-mail：zzyonglv@163.com

$s\subset(a,b)$。它在区间[a，b]上的Hadamard有限部分积分定义为：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{s-\varepsilon}\frac{\ln|x-s|}{|x-s|}.f(x)\mathrm{d}x+\int_{s+\varepsilon}^{b}\frac{\ln|x-s|}{|x-s|}.f(x)\mathrm{d}x+f(s)\ln\varepsilon^2\right)。$$

记 $I(a,b,s,f)\triangleq f.p.\int_a^b\frac{\ln|x-s|}{|x-s|}.f(x)\mathrm{d}x$，为了计算此强奇异积分在[$a$，$b$]上的Hadamard有限部分积分，将区间[$a$，$b$]以节点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 分为 n 个子区间，且令 $h_i=x_i-x_{i-1}$，$i=1,2,\cdots,n$，在此区间上对函数 $f(x)$ 采用Lagrange插值函数来逼近，

即 $f_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\phi_i(x).f(x_i)$，（1）

式（1）中：$\phi_i(x)$为分片 k 次插值基函数。

因此，用 $f_n(x)$ 代替 $f(x)$，便得到 $I(a,b,s,f)$ 的近似计算公式，即

$$I_n(a,b,s,f)\triangleq f.p\int_a^b\frac{\ln|x-s|}{|x-s|}f_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n}\omega_i(s)f(x_i)，\qquad（2）$$

式（2）中：$\omega_i(s)$为Cotes系数，且

$$\omega_i(s)=f.p\int_a^b\frac{\phi_i(x)\ln|x-s|}{|x-s|}\mathrm{d}x。$$

现以Lagrange线性插值形式给出Cotes系数。取 $\phi_i(x)$（$i=0,1,2,\cdots,n$）为分片线性函数，即

$$\phi_i(x)=\begin{cases}\frac{1}{h_i}(x-x_{i-1}), & x_{i-1}\le x\le x_i;\\ \frac{1}{h_{i+1}}(x_{i+1}-x), & x_i\le x\le x_{i+1}, \quad i=1,2,\cdots,n-1;\\ 0, & 其它；\end{cases}$$

$$\phi_0(x)=\begin{cases}\frac{1}{h_1}(x_1-x), & x_0\le x\le x_1;\\ 0, & 其它；\end{cases}$$

和 $$\phi_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{h_n}(x-x_{n-1}), & x_{n-1}\le x\le x_n;\\ 0, & 其它。\end{cases}$$

设 $s\in(a,b)$，通过细分总能使奇点 s 不出现在两端的单元 (x_0,x_1) 和 (x_{n-1},x_n) 中。因此其Cotes系数计算结果如下，其中 $s\in(x_i,x_{i+1})$，$i=1,2,\cdots,n-2$。

$$\omega_0(s)=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\ln(s-x)}{s-x}\cdot\frac{x_1-x}{h_1}\mathrm{d}x=\frac{s-x_1}{2h_1}\left[\ln^2(s-x_1)-\ln^2(s-x_0)\right]-\frac{1}{h_1}\cdot\left[(s-x_1)\ln(s-x_1)-(s-x_0)\ln(s-x_0)\right]-1，\qquad（3）$$

当 $1\le k\le i-1$ 时，

$$\omega_k(s)=\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{\ln(s-x)}{s-x}\cdot\frac{x-x_{k-1}}{h_k}\mathrm{d}x+\int_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{\ln(s-x)}{s-x}\cdot\frac{x_{k+1}-x}{h_{k+1}}\mathrm{d}x=-\frac{s-x_{k-1}}{2h_k}\left[\ln^2(s-x_k)-\ln^2(s-x_{k-1})\right]+\frac{1}{h_k}\left[(s-x_k)\ln(s-x_k)-(s-x_{k-1})\ln(s-x_{k-1})\right]-\frac{s-x_{k+1}}{2h_{k+1}}\left[\ln^2(s-x_{k+1})-\ln^2(s-x_k)\right]-\frac{1}{h_{k+1}}\cdot\left[(s-x_{k+1})\ln(s-x_{k+1})-(s-x_k)\ln(s-x_k)\right]。\qquad（4）$$

当 $i+2\le k\le n-1$ 时，

$$\omega_k(s)=\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{\ln(x-s)}{x-s}\cdot\frac{x-x_{k-1}}{h_k}\mathrm{d}x+\int_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{\ln(x-s)}{x-s}\cdot\frac{x_{k+1}-x}{h_{k+1}}\mathrm{d}x=\frac{s-x_{k-1}}{2h_k}\left[\ln^2(x_k-s)-\ln^2(x_{k-1}-s)\right]+\frac{1}{h_k}\left[(x_k-s)\ln(x_k-s)-(x_{k-1}-s)\ln(x_{k-1}-s)\right]-\frac{x_{k+1}-s}{2h_{k+1}}\left[\ln^2(x_{k+1}-s)-\ln^2(x_k-s)\right]-\frac{1}{h_{k+1}}\cdot\left[(x_{k+1}-s)\ln(x_{k+1}-s)-(x_k-s)\ln(x_k-s)\right]，\qquad（5）$$

$$\omega_i(s)=\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{\ln(s-x)}{s-x}\cdot\frac{x-x_{i-1}}{h_i}\mathrm{d}x+f\cdot p\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{\ln|x-s|}{|x-s|}\cdot\frac{x_{i+1}-x}{h_{i+1}}\mathrm{d}x=-\frac{s-x_{i-1}}{2h_i}\left[\ln^2(s-x_i)-\ln^2(s-x_{i-1})\right]+\frac{1}{h_i}\left[(s-x_i)\ln(s-x_i)-(s-x_{i-1})\ln(s-x_{i-1})\right]-\frac{x_{i+1}-s}{2h_{i+1}}\left[\ln^2(s-x_i)+\ln^2(x_{i+1}-s)\right]+\frac{1}{h_{i+1}}\left[(s-x_i)\ln(s-x_i)-(x_{i+1}-s)\ln(x_{i+1}-s)\right]+\frac{x_i-x_{i+1}-2s}{h_{i+1}}+1，\qquad（6）$$

$$\omega_{i+1}(s)=f\cdot p\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{\ln|x-s|}{|x-s|}\cdot\frac{x-x_i}{h_i}\mathrm{d}x+\int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}}\frac{\ln|x-s|}{|x-s|}\cdot\frac{x_{i+2}-x}{h_{i+2}}\mathrm{d}x=\frac{s-x_i}{2h_{i+1}}\left[\ln^2(s-x_i)+\ln^2(x_{i+1}-s)\right]+\frac{1}{h_{i+1}}\left[(x_{i+1}-s)\ln(x_{i+1}-s)-(s-x_i)\ln(s-x_i)\right]+\frac{x_{i+2}-s}{2h_{i+2}}\left[\ln^2(x_{i+2}-s)-\ln^2(x_{i+1}-s)\right]-\frac{1}{h_{i+2}}\left[(x_{i+2}-s)\ln(x_{i+2}-s)-(x_{i+1}-s)\ln(x_{i+1}-s)\right]+\frac{2s-x_i-x_{i+1}}{h_{i+1}}+1，\qquad（7）$$

$$\omega_n(s)=\int_{x_{n-1}}^{x_n}\frac{\ln(x-s)}{x-s}\cdot\frac{x-x_{n-1}}{h_n}\mathrm{d}x=$$

$$\frac{s-x_{n-1}}{2h_n}\cdot\left[\ln^2(x_n-s)-\ln^2(x_{n-1}-s)\right]+\frac{1}{h_n}\cdot$$

$$\left[(x_n-s)\ln(x_n-s)-(x_{n-1}-s)\ln(x_{n-1}-s)\right]-1。\qquad(8)$$

2　误差分析

设$R_f(x)=f(x)-f_n(x)$，其中$f_n(x)$按式（1）定义。则$E_n(f)=\left|I(a,b,s,f)-I_n(a,b,s,f)\right|=$

$$\left|f\cdot p\int_a^b\frac{\ln|x-s|}{|x-s|}R_f(x)\mathrm{d}x\right|。\qquad(9)$$

为了讨论Lagrange线性插值产生的误差，仅对Hadamard有限部分积分$f\cdot p\int_a^b\frac{\ln|x-s|}{|x-s|}R_f(x)\mathrm{d}x$进行讨论。将$f\cdot p\int_a^b\frac{\ln|x-s|}{|x-s|}R_f(x)\mathrm{d}x$分段处理，不妨设$s\subset(x_i,x_{i+1})$，则

$$f\cdot p\int_a^b\frac{\ln|x-s|}{|x-s|}R_f(x)\mathrm{d}x=\left(\int_a^{x_{i-1}}+\int_{x_{i+2}}^b\right)\frac{\ln|x-s|}{|x-s|}R_f(x)\mathrm{d}x+$$

$$\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i}+\int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}}\right)\frac{\ln|x-s|}{|x-s|}R_f(x)\mathrm{d}x+f\cdot p\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{\ln|x-s|}{|x-s|}R_f(x)\mathrm{d}x。\qquad(10)$$

引理1　设$f(x)\in C^2[a,b]$，则

$$\left|\frac{\mathrm{d}^\alpha R_f(x)}{\mathrm{d}x^\alpha}\right|\le Ch^{2-\alpha},\quad\alpha=0,1,2。$$

引理2　设$f(x)\in C^2[a,b]$，$s\in(x_i,x_{i+1})$，则

$$\left|\left(\int_a^{x_{i-1}}+\int_{x_{i+2}}^b\right)\frac{\ln|x-s|}{|x-s|}R_f(x)\mathrm{d}x\right|\le Ch^2\ln^2h。$$

证明　只考虑$\left|\int_a^{x_{i-1}}\frac{\ln|x-s|}{|x-s|}R_f(x)\mathrm{d}x\right|\le Ch^2\ln^2h$，因为$s\subset(x_i,x_{i+1})$，则

$$\int_a^{x_{i-1}}\frac{\ln|x-s|}{|x-s|}R_f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{x_{i-1}}\frac{\ln(s-x)}{(s-x)}R_f(x)\mathrm{d}x=$$

$$\int_a^{x_{i-1}}\frac{\ln\frac{s-x}{h}+\ln h}{(s-x)}R_f(x)\mathrm{d}x=$$

$$\int_a^{x_{i-1}}\frac{\ln\frac{s-x}{h}}{s-x}R_f(x)\mathrm{d}x+\ln h\int_a^{x_{i-1}}\frac{R_f(x)}{s-x}\mathrm{d}x。$$

所以由引理1和积分中值定理可得：

$$\left|\int_a^{x_{i-1}}\frac{\ln|x-s|}{|x-s|}R_f(x)\mathrm{d}x\right|<Ch^2\left|\int_a^{x_{i-1}}\frac{\ln\frac{s-x}{h}}{s-x}\mathrm{d}x\right|+$$

$$Ch^2|\ln h|\left|\int_a^{x_{i-1}}\frac{\mathrm{d}x}{s-x}\right|=\frac{1}{2}Ch^2\left|\ln^2\frac{s-a}{h}-\ln^2\frac{s-x_{i-1}}{h}\right|-$$

$$Ch^2|\ln h|\left|\ln(s-a)-\ln(s-x_{i-1})\right|\le Ch^2\ln^2h。$$

引理3　条件同引理2，则

$$\left|\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i}+\int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}}\right)\frac{\ln|x-s|}{|x-s|}R_f(x)\mathrm{d}x\right|\le Ch^2\left(\ln^2h+\ln^2\sigma(h,s)\right),$$

其中$\sigma(h,s)=\min\limits_{0\le i\le n}\frac{|s-x_i|}{h}$。

证明　只考虑

$$\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{\ln|x-s|}{|x-s|}R_f(x)\mathrm{d}x\right|\le Ch^2\left(\ln^2h+\ln^2\sigma(h,s)\right)。$$

因为$s\in(x_i,x_{i+1})$，则

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{\ln|x-s|}{|x-s|}R_f(x)\mathrm{d}x=\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{\ln(s-x)}{(s-x)}R_f(x)\mathrm{d}x=$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{\ln\frac{s-x}{h}}{s-x}R_f(x)\mathrm{d}x+\ln h\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{R_f(x)}{s-x}\mathrm{d}x,$$

所以

$$\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{\ln|x-s|}{|x-s|}R_f(x)\mathrm{d}x\right|\le\frac{1}{2}Ch^2\left|\ln^2\frac{s-x_{i-1}}{h}-\ln^2\frac{s-x_i}{h}\right|+$$

$$Ch^2|\ln h|\left|\ln(s-x_{i-1})-\ln(s-x_i)\right|\le$$

$$\frac{1}{2}Ch^2\left(\ln^2h+\ln^2\sigma(h,s)\right)+Ch^2|\ln h|\cdot\left|\ln\sigma(h,s)\right|+$$

$$Ch^2\ln^2h\le Ch^2\left(\ln^2h+\ln^2\sigma(h,s)\right)。$$

引理4　条件同引理2，则

$$\left|f\cdot p\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{\ln|x-s|}{|x-s|}R_f(x)\mathrm{d}x\right|\le Ch^2\left(\ln^2h+\ln^2\sigma(h,s)\right)。$$

证明　根据Hadamard有限部分积分的定义可得

$$f\cdot p\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{\ln|x-s|}{|x-s|}R_f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0}\left[\int_{x_i}^{s-\varepsilon}\frac{\ln|x-s|}{|x-s|}R_f(x)\mathrm{d}x+\right.$$

$$\left.\int_{s+\varepsilon}^{x_{i+1}}\frac{\ln|x-s|}{|x-s|}R_f(x)\mathrm{d}x+R_f(s)\cdot\ln\varepsilon^2\right],$$

则$\left|f\cdot p\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{\ln|x-s|}{|x-s|}R_f(x)\mathrm{d}x\right|-$

$$\left|f\cdot p\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{\ln\left|\frac{x-s}{h}\right|}{|x-s|}R_f(x)\mathrm{d}x+p\cdot v\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{\ln h}{|x-s|}R_f(x)\mathrm{d}x\right|\le$$

$$Ch^2\left|f\cdot p\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{\ln\left|\frac{x-s}{h}\right|}{|x-s|}\mathrm{d}x\right|+Ch^2|\ln h|\cdot\left|p\cdot v\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{1}{|x-s|}\mathrm{d}x\right|\le$$

$$Ch^2\left|\ln^2\frac{s-x_i}{h}+\ln^2\frac{x_{i+1}-s}{h}\right|+Ch^2\cdot|\ln h|\cdot\left|\ln(s-x_i)+\right.$$

$$\left.\ln(x_{i+1}-s)\right|\le Ch^2\ln^2\sigma(h,s)+Ch^2\ln^2 h+Ch^2|\ln h|\cdot$$

$$|\ln\sigma(h,s)|\le Ch^2\left(\ln^2 h+\ln^2\sigma(h,s)\right)。$$

3 结论

定理 1 设$f(x)\in C^2[a,b]$，若区间$[a，b]$上的剖分是一致的，即$h_i=h=\frac{b-a}{n}$，且$s\ne x_i$，则存在正常数C，使得

$$|I(a,b,s,f)-I_n(a,b,s,f)|<Ch^2\left(\ln^2 h+\ln^2\sigma(h,s)\right),\quad(11)$$

其中：$\sigma(h,s)=\min\limits_{0\le i\le n}\frac{|s-x_i|}{h}$。

4 数值例子

计算强奇异积分

$$I(-1,1,s,f)==f.p.\int_{-1}^{1}\frac{\ln|x-s|}{|x-s|}.f(x)\mathrm{d}x,$$

其中：$f(x)=x^2$。

如当s=0.36时，采用一致剖分计算方法，可得此强奇异积分的准确值为−0.341 142 9。

表1是在一致剖分条件下，对不同单元数进行近似计算所得的近似值和近似值与准确值间的误差。

表1 一致剖分条件下的误差

Table 1 Error of the uniform meshes

项 目	单 元 数			
	10	20	40	80
近似值	−0.338 359 1	−0.325 774 9	−0.341 067 6	−0.339 504 9
误 差	2.78e−003	1.54e−002	7.53e−005	1.64e−003

从表1可看出，使用本文所提出的数值方法计算所得的近似值与准确值有很好的逼近效果，但是由于奇异性的影响，使得它们的误差比没有好的规律。

如果同样取s=0.36，在剖分时让s为某一单元的中点，并且保持总的单元数不变，这时除了两端点所在单元大小可能不一致外，内部单元均一致剖分，两端点所在单元大小不超过内部单元的大小，表2就是在这种情形下的不同单元数的近似值和近似值与准确值间的误差。

表2 s为中点剖分条件下的误差

Table 2 Error of the midpoint s

项 目	单 元 数			
	10	20	40	80
近似值	−0.253 023 2	−0.318 457 0	−0.343 360 3	−0.340 506 8
误 差	8.81e−002	2.27e−002	2.22e−003	6.36e−004

从表2可看出，这种情形下不但近似值与准确值有很好的逼近效果，而且它们的误差比有较好的规律，这一规律与我们的理论分析是吻合的。如表2中，单元数为10与20，他们的误差比为3.9，单元数为40与80，他们的误差比为3.5；而表1中单元数为10的近似值比单元数为20的近似值要高，单元数为40的近似值比单元数为80的近似值要高。当然，由于理论分析中误差含有$\ln^2 h+\ln^2\sigma(h,s)$，所以误差的效果还有待提高，目前作者正在致力这方面的研究。

参考文献：

[1] Linz P. On the Approximate Computation of Certain Strongly Singular Integrals[J]. Computation，1985，35：345-353.

[2] 邬吉明，余德浩. 区间上强奇异积分的一种近似计算方法[J]. 数值计算与计算机应用，1998(2)：118-126.
Wu Jiming，Yu Dehao. An Approximte Computation of Hypersingular Integrals on Interval[J]. Journal of Numerical Methods and Computer Applications，1998(2)：118-126.

[3] 杜其奎. 一种强奇异积分的近似计算方法[J]. 工程数学学报，1999(3)：43-48.
Du Qikui. On the Approximate Computation for A Class of Hypersingular Integral on Interval[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics，1999(3)：43-48.

[4] Wu Jiming，Lv Yong. A Superconvergence Result for the Second-Order Newton-Cotes Formula for Certain Finite-Part Integrals[J]. IMA Journal of Numerical Analysis，2005，25，253-263.

[5] 吕 勇，陈江兵. 一类强奇异积分数值方法的误差估计[J]. 株洲工学院学报，2005，19(1)：28-30.
Lv Yong，Chen Jiangbing. The Error of A Numerical Method for A Kind of Hypersingular Integral[J]. Journal of Zhuzhou Institute of Technology，2005，19(1)：28-30.

（责任编辑：廖友媛）