

匹配追踪信号分解收敛性的一种证明

杜小勇¹, 段晓君²

(1. 国防科学技术大学 电子科学与工程学院, 湖南 长沙 410073;
2. 国防科学技术大学 理学院, 湖南 长沙 410073)

摘要: 针对匹配追踪信号分解的收敛性问题, 借鉴 Qian 的思路, 采用几何辅助方法证明了 Jones 和 Mallat 给出的一般性结论, 并消除了 Qian 的证明中的瑕疵。此证明方法可避免运用多个预备引理, 完善了 Qian 的证明过程, 同时也为读者提供了另外一种理解匹配追踪的思路。

关键词: 匹配追踪; 收敛性证明; 几何辅助法

中图分类号: TN911.7

文献标志码: A

文章编号: 1673-9833(2010)01-0053-04

A Proof on the Convergence of Matching Pursuit Signal Decomposition

Du Xiaoyong¹, Duan Xiaojun²

(1. School of Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;
2. School of Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Aiming at the convergence of matching pursuit signal decomposition, through drawing on Qian's thinking and using geometry means, proves the general conclusion provided by Jones and Mallat and eliminates the flaws in the proof of Qian. This proof avoids applying multi preliminary lemmas and perfects Qian's process of proof, meanwhile offers another way to understand matching pursuit.

Keywords: matching pursuit; convergence proof; geometry aided method

1 研究背景

将给定的信号分解为某函数集或矢量集的线性组合, 是信号分析的重要内容。这种函数集通常是正交基或框架, 如傅立叶基、小波基等, 现已获得了广泛的应用。但随着现代信号处理技术的发展, 过完备词典中的信号表示问题已引起了更广泛的关注^[1-2]。由于词典的过完备特性, 给定的信号在词典中有无穷多种表示形式。然而, 我们获得的信号通常是由少数几个信号驱动源产生的, 或者说, 信号可用过完备词典中少数几个原子的线性组合表示^[3], 这称为稀疏表示。在信号分析问题中, 关键是如何获得这种稀疏表示。匹配追踪就是一种重要的信号表示方法, 其思路比较直观, 常能够获得符合自然特性的信号表达方式^[4-5]。

匹配追踪最早可以追溯到统计回归中的投影追踪方法^[6], Jones 从分析学的角度证明了投影追踪的收敛性^[7]。在信号处理领域, Qian 和 Mallat 等分别于 1993 年和 1994 年对此展开了独立的研究。Mallat 和 Zhang 等^[4]利用平方可积空间中基本函数的平移、调制和尺度变换, 构造了具有时频特性的过完备时频词典, 提出了用于信号时频表示的匹配追踪方法 (Matching Pursuit, MP)。该算法迭代地从词典中选择最贴近残差信号的原子用于信号表示, 同时从残差信号中去掉其在该原子上的投影, 获得新的残差信号。这个过程不断地迭代进行, 直至残差能量小于给定的阈值 (或满足其它的停止条件), 并借鉴 Jones 的思路证明了其收敛性。与此同时, Qian 和 Chen 等^[5]在研究信号的 Wigner 分布时, 独立地提出了类似的信号时频表示方

收稿日期: 2009-07-28

作者简介: 杜小勇 (1976-), 男, 湖北孝感人, 国防科学技术大学讲师, 博士, 主要研究方向为雷达信号处理,

E-mail: xydu@nudt.edu.cn

法,称为自适应高斯表示。他们利用高斯函数的平移、调制和尺度变换构造了相应的时频词典,其求解策略与匹配追踪相同,在搜索最大投影原子时采用了逐步求精的方法,最终获得了消除交叉项的参数化时频分布。在此基础上,Qian等利用几何辅助的方法对其收敛性进行了研究。另外,信号处理中常用的“CLEAN”技术实际上就是利用了匹配追踪思想。目前,匹配追踪及其变形已在信号处理领域有着广泛的应用^[8-9]。

Mallat和Zhang在提出匹配追踪信号分解方法时,借鉴Jones针对投影追踪的研究思路,证明了匹配追踪分解的收敛性。这是一种纯粹的分析学方法,其核心是证明分解获得的信号序列是Cauchy列,这需要先证明并利用2个关于收敛级数的引理,几何直观性稍显不足。Qian等独立提出了匹配追踪的信号分解技术(自适应信号展开)时,通过几何辅助的方法对其收敛性进行了证明,其结论主要是针对过完备词典展开的,也可以认为是Mallat等人的结论的特例。但是,Qian等人的证明过程略存瑕疵,即在关键的零极限步骤上理由不够充分,且证明过程中并未用到词典的过完备性。本文沿用Qian的几何辅助证明思路,结合分析学方法对该证明过程进行了完善,并将其扩展到更一般的情形,便于信号处理学习过程中对匹配追踪方法的直观理解。

2 匹配追踪

2.1 基本模型

记 $\mathcal{D} = \{h_\gamma(t) : \gamma \in A\}$ 表示希尔伯特空间 H 中的一个函数集,称为词典,其元素 $h_\gamma(t)$ 称为原子, A 为指标集。在信号分析和信号处理领域,常常希望将感兴趣的信号 $s(t)$ 表示为若干原子的线性组合,即

$$s(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} B_p h_{\gamma_p}(t), \quad (1)$$

记 $s_0(t) = s(t)$,在匹配追踪信号分解过程中,选择最贴合残差信号 $s_p(t)$ 的原子 $h_p(t)$,即

$$|B_p|^2 = \max_{\gamma} |f_{\gamma}|^2 = \max_{\gamma} \left| \int s_p(t) h_{\gamma}^*(t) dt \right|^2, \quad (2)$$

对于 $p \geq 1, s_p(t)$ 是 $s_{p-1}(t)$ 向 $h_{p-1}(t)$ 上作正交投影后的残差,即

$$s_p(t) = s_{p-1}(t) - B_{p-1} h_{p-1}(t), \quad (3)$$

由于 $h_p(t)$ 是归一化的(即有 $\|h_p\|^2 = 1$),则

$$\|s_p\|^2 = \|s_{p-1}\|^2 - |B_{p-1}|^2, \quad (4)$$

经过 n 步分解后,有如下关系式

$$s(t) = \sum_{p=0}^n B_p h_{\gamma_p}(t) + s_{n+1}(t), \quad (5)$$

$$\|s\|^2 = \sum_{p=0}^n |B_p|^2 + \|s_{n+1}\|^2.$$

2.2 信号分解的收敛性

Mallat等在文献[4]中借鉴Jones的思路,利用分析学方法,证明了式(5)中2个函数列的收敛性,即

$$s_n(t) \rightarrow P_V^\perp \{s\}, \sum_{p=0}^n B_p h_{\gamma_p}(t) \rightarrow P_V \{s\}, n \rightarrow +\infty. \quad (6)$$

其中: $V = \text{span}\{\mathcal{D}\}$;

$P_V \{\cdot\}$ 表示信号在子空间 V 中的投影;

$P_V^\perp \{\cdot\}$ 表示信号在 V 的正交补中的投影。

Qian等利用几何辅助方法,研究了 \mathcal{D} 为过完备词典时式(5)的收敛性,其匹配追踪信号分解过程如图1所示。

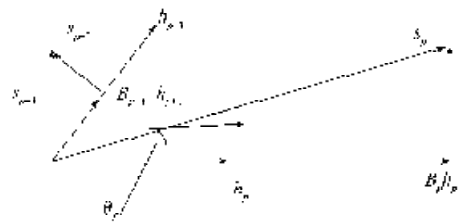


图1 匹配追踪信号分解的几何示意图

Fig. 1 Geometric diagram for matching pursuit signal decomposition

为完整计,下面对Qian的证明过程作简要描述^[5]。记 $s_p(t)$ 和 $h_p(t)$ 的夹角为 θ_p ,则

$$\cos \theta_p = \frac{\langle s_p, h_p \rangle}{\|s_p\| \|h_p\|} = \frac{B_p}{\|s_p\|}, \quad (7)$$

结合式(4)可得:

$$\|s_p\|^2 = (\sin \theta_{p-1})^2 \|s_{p-1}\|^2.$$

如此重复,可知 n 步之后有

$$\|s_{n-1}\|^2 = \prod_{p=1}^n (\sin \theta_p)^2 \|s\|^2 \leq \|s\|^2 (\sin \theta_{\max})^{2n}, \quad (8)$$

其中: $(\sin \theta_{\max})^2 \geq (\sin \theta_p)^2, \forall p$ 。

由于 $(\sin \theta_{\max})^2 < 1$ (否则 $h_p(t)$ 与 $s_p(t)$ 正交,从而 $B_p=0$),于是文献[5]的研究者断言序列 $\|s_n\|^2 (\sin \theta_{\max})^{2n}$ 单调递减且趋于0。

事实上,虽然 $(\sin \theta_{\max})^2 < 1$,但是 θ_{\max} 与 n 是有关的,文中并未说明 $(\sin \theta_{\max})^2$ 能以某个小于1的正数为上界,因此只能说明数列 $\{\|s_n\|^2\}$ 单调递减且收敛,但极限为0的理由并不充分。如当 $q_n = 1 - \frac{1}{n}$ 时恒有 $0 < q_n < 1$,但 $\lim_{n \rightarrow +\infty} [q_n]^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$ 。另外,证明过程中也没有用到 \mathcal{D} 为完备或过完备词典的条件。

3 Qian 的收敛性证明的完善与扩展

3.1 过完备词典中的收敛性

当 \mathcal{D} 为过完备词典时, 有如下定理成立。

定理 1 若 \mathcal{D} 为 \mathcal{H} 中的过完备词典, 则式 (5) 中的余项满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(t) = 0$ 。

证明 由式 (4) 可知, 数列 $\left\{ \|s_n(t)\| \right\}_{n=0}^{+\infty}$ 单调递减且有下界, 从而收敛。不妨设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n(t)\| = a \geq 0$, 则可断言 $a=0$ 。

事实上, 对于给定的 $\varepsilon_c > 0, \exists N > 0, \forall n \geq N$, 不等式 $0 < a \leq \|s_n(t)\| < a + \varepsilon_0$ 均成立。因此, \mathcal{H} 中的点列 $\{s_n(t), n \geq N\}$ 均落在图 2 所示的内、外半径分别为 a 和 $a + \varepsilon_0$ 的圆环内。由于 $\Gamma = \{s_n(t), n \geq N\}$ 是 \mathcal{H} 中的有界集, 根据 Weistrass 定理, Γ 中存在收敛子列 $\{s_{n_k}(t)\}$ 。记 $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_{n_k}(t) = s_\infty(t)$, 则必有 $s_\infty(t)$ 与 \mathcal{D} 正交。

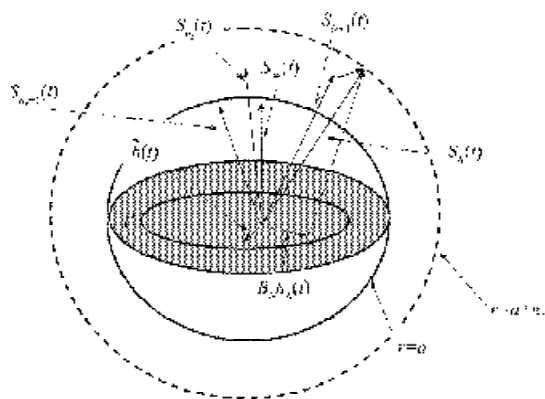


图 2 匹配追踪分解收敛性的辅助几何示意图

Fig. 2 Geometric diagram for convergence of matching pursuit decomposition

如若不然, 即 $s_\infty(t)$ 与 \mathcal{D} 不正交, 则存在 $\tilde{h}(t) \in \mathcal{D}$ 使得 $\beta \triangleq \langle s_\infty(t), \tilde{h}(t) \rangle^2 > 0$ 。根据内积的连续性和极限的保号性, $\exists N_1 > 0, \text{ s.t. } \forall k > N_1$, 有

$$\langle s_{n_k}(t), \tilde{h}(t) \rangle^2 > \beta/2。$$

另一方面, 由于 $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_{n_k}(t) = s_\infty(t)$, 则

$$\exists K \geq N_1, \text{ s.t. } \|s_{n_k}(t)\|^2 < a^2 - \beta/4。$$

因此, 根据式 (4) 可知:

$$\begin{aligned} \|s_{n_k+1}(t)\|^2 &= \|s_{n_k}(t)\|^2 - |B_{n_k}| \leq a^2 + \\ &\beta/4 - \beta/2 = a^2 - \beta/4 < a^2。 \end{aligned}$$

从而 $\|s_{n_k+1}(t)\| < a$, 这与序列 $\left\{ \|s_n(t)\| \right\}$ 单调递减, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n(t)\| = a$ 相矛盾!

由于 \mathcal{D} 为过完备词典, 则 $\mathcal{V} \triangleq \text{span}\{\mathcal{D}\} = \mathcal{H}$ 。由 $s_\infty(t)$ 与 \mathcal{D} 正交可知 $s_\infty(t)$ 与 \mathcal{H} 正交, 从而 $s_\infty(t) = 0$ 。故有

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|s_n(t) - s_{n-1}(t)\| = a = 0$, 从而

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(t) = 0, \quad s(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^n B_p h_p(t)。$$

收敛性得证。

3.2 一般词典中的收敛性

根据式 (6) 以及前文所用的记号, 有如下的收敛性定理。

定理 2 若 \mathcal{D} 为 \mathcal{H} 中的词典, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{r=0}^n B_r h_r(t) = P_V \{s\},$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(t) = P_V^\perp \{s\}。$$

证明 由于 $s \in \mathcal{H}$, 则 $s = P_V \{s\} + P_V^\perp \{s\}$ 。

$\forall h(t) \in \mathcal{D}$, 有

$$\langle s, h \rangle = \langle P_V \{s\} + P_V^\perp \{s\}, h \rangle = \langle P_V \{s\}, h \rangle, \quad (9)$$

记: $s_0 = s, \tilde{s}_0 = P_V^\perp \{s\}$,

$$h_0 = \arg \max_{h \in \mathcal{D}} |\langle s_0, h \rangle|,$$

$$\tilde{h}_0 = \arg \max_{h \in \mathcal{D}} |\langle \tilde{s}_0, h \rangle|,$$

则有 $h_0 = \tilde{h}_0$, 且

$$\begin{aligned} s_1 &= s_0 - B_0 h_0 = P_V \{s\} + P_V^\perp \{s\} - \langle s_0, h_0 \rangle h_0 = \\ &\tilde{s}_0 - \langle \tilde{s}_0, \tilde{h}_0 \rangle \tilde{h}_0 + P_V^\perp \{s\} = \tilde{s}_1 + P_V^\perp \{s\}, \end{aligned} \quad (10)$$

假设 $k = n$ 时, 有 $h_{n-1} = \tilde{h}_{n-1}, s_n = \tilde{s}_n + P_V^\perp \{s\}$, 则再次利用式 (9) 可得:

$$\begin{aligned} h_n &= \arg \max_{h \in \mathcal{D}} |\langle s_n, h \rangle| = \arg \max_{h \in \mathcal{D}} |\langle \tilde{s}_n + P_V^\perp \{s\}, h \rangle| = \\ &\arg \max_{h \in \mathcal{D}} |\langle \tilde{s}_n, h \rangle| = \tilde{h}_n, \\ s_{n+1} &= s_n - \langle s_n, h_n \rangle h_n = \tilde{s}_n + P_V^\perp \{s\} - \\ &\langle \tilde{s}_n, \tilde{h}_n \rangle \tilde{h}_n = \tilde{s}_{n+1} + P_V^\perp \{s\}, \end{aligned} \quad (11)$$

根据数学归纳法可知, 除存在一个固定项 $P_V^\perp \{s\}$ 外, s 和 $P_V \{s\}$ 在 \mathcal{D} 中的分解过程是完全相同的。进一步由定理 1 可知, 分解过程是收敛的, 且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^n B_p h_p(t) = P_V \{s\}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(t) = P_V^\perp \{s\}。$$

注 匹配追踪分解的残差信号 $P_V^\perp \{s\}$ 实际上就是图 2 中所示的 $s_\infty(t)$ 。

4 结语

匹配追踪是一种非线性信号分解方法, 但是能够获得待分析信号的线性表示, 应用十分广泛, 也是现代信号处理领域中的重要方法。Mallat 和 Zhang 等^[4]关于其收敛性的证明是分析学方法, 其证明过程中还需要利用多个关于收敛级数的引理; Qian 等^[5]的证明几何直观性好, 但其中关于残差数列极限的获取有待完善, 且结论只是文献[4]的特例。本文沿用 Qian 的几何

辅助证明思路, 结合分析学方法对其证明过程进行了完善, 并扩展到更一般的情形, 便于信号处理学习过程中对匹配追踪方法的直观理解。

参考文献:

- [1] Chen S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic Decomposition by Basis Pursuit[J]. SIAM Review, 2001, 43(1): 129-159.
- [2] Candès E, Wakin M. An Introduction to Compressive Sampling[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 21-30.
- [3] Mallat S. Applied Mathematics Meets Signal Processing[C]// Invited Lecture at ICM'98. Available: http://www.cmap.polytechnique.fr/~mallat/papiers/ICM_pap.ps.
- [4] Mallat S G, Zhang Z. Matching Pursuits with Time-Frequency Dictionaries[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993, 41(12): 3397-3415.
- [5] Qian S, Chen D. Signal Representation Using Adaptive Normalized Gaussian Functions[J]. Signal Processing, 1994, 36(1): 1-11.
- [6] Friedman J H, Stuetzle W. Projection Pursuit Regression[J]. J. Amer. Statist. Asso., 1981, 76(3): 817-823.
- [7] Jones L K. On A Conjecture of Huber Concerning the Convergence of Projection Pursuit Regression[J]. Ann. Statist., 1987, 15(2): 880-882.
- [8] Tropp J, Gilbert A C. Signal Recovery from Part Information via Orthogonal Matching Pursuit[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 53(12): 4655-4666.
- [9] Candès E J, Romberg J. Sparsity and Incoherence in Compressive Sampling[J]. Inverse Problems, 2007, 23(3): 969-985.

(责任编辑: 廖友媛)

(上接第 49 页)

- [4] 周洪涛, 王宗军, 宋海刚. 基于模糊优化的多目标投资组合选择模型研究[J]. 华中科技大学学报: 自然科学版, 2005, 33(1): 67-69.
Zhou Hongtao, Wang Zongjun, Song Haigang. A Multi-Objective Portfolio Selection Model Based on Fuzzy Optimization[J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology: Nature Science Edition, 2005, 33(1): 67-69.
- [5] 严应超, 张传新. 多目标投资组合研究[J]. 全国商情 (经济理论研究), 2008(2): 80-81.
Yan Yingchao, Zhang Chuanxin. Research on Multi-Objective Portfolio[J]. National Trade (Economic Theory), 2008(2): 80-81.
- [6] 王梦东, 童仕宽. 基于二次规划的多目标投资组合模型[J]. 武汉理工大学学报, 2007, 29(8): 171-174.
Wang Mengdong, Tong Shikuan. Multi-Objected Investment Combination Model Base on Quadratic Programming[J]. Journal of Wuhan University of Technology, 2007, 29(8): 171-174.
- [7] 肖冬荣, 黄静. 基于均值、方差和偏度的投资组合模糊优化模型[J]. 统计与决策, 2006(7): 37-38.
- Xiao Dongrong, Huang Jing. Based on the Mean, Variance and Skewness Portfolio Model by Fuzzy Optimization[J]. Statistics and Decision, 2006(7): 37-38.
- [8] 王俊, 叶中行. 一种改进的实数型遗传算法在多目标最优投资组合选择中的应用[J]. 宁夏大学学报, 2004, 25(3): 1-4.
Wang Jun, Ye Zhongxing. An Improved Real-Valued Genetic Algorithm in Multi-Objective Optimal Portfolio Selection[J]. Journal of Ningxia University, 2004, 25(3): 1-4.
- [9] 苏冬蔚, 麦元勋. 流动性与资产定价: 基于我国股市资产换手率与预期收益的实证研究[J]. 经济研究, 2004(2): 95-105.
Su Dongwei, Mai Yuanxun. Liquidity and Asset Pricing: An Empirical Exploration of Turnover and Expected Returns on Chinese Stock Markets[J]. Economic Research Journal, 2004(2): 95-105.
- [10] 解可新, 韩立信, 林友联. 最优化方法[M]. 天津: 天津大学出版社, 1997: 218-265.
Xie Kexin, Han Lixin, Lin Youlian. Optimization[M]. Tianjin: Tianjin University Press, 1997: 218-265.

(责任编辑: 张亦静)