非线性不等式组的Jacobian光滑牛顿法

何郁波[1]，董晓亮[2]

（1. 怀化学院 数学与应用数学系，湖南 怀化 418008；2. 北方民族大学 信息与计算科学学院，宁夏 银川 750021）

摘　要：将非线性不等式组的求解问题转化为非线性方程组的求解，利用辅助函数的一致光滑逼近性以及Jacobian相容性，采用光滑牛顿法逐次逼近目标方程组从而求得问题的解。在一些假设条件下，算法的全局收敛性得到了保证。

关键词：非线性不等式组；光滑牛顿法；逐次近似；Jacobian相容；全局收敛

中图分类号：O178　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2010)01-0032-04

Jacobian Smoothing Newton Method for Nonlinear Inequalities

He Yubo[1]，Dong Xiaoliang[2]

（1. Department of Mathematics and Applied Mathematics，Huaihua University，Huaihua Hunan 418008，China；
2. School of Information and Computation Science，The North University of Nationalities，Yinchuan 750021，China）

Abstract：Reformulates nonlinear inequalities as nonlinear equations for solving problems. Uses the uniformly smoothing approaching of auxiliary function and Jacobian consistency, as well as a successive approximation smoothing Newton method to solve the non-smoothing equations. And under some assumption, algorithm global convergence is guaranteed.

Keywords：nonlinear inequalities；smoothing Newton method；successive approximation；Jacobian consistency；global convergence

0　引言

考虑非线性不等式组问题[1]，即求$x\in\mathbf{R}^n$，使得

$$F(x)\le 0 \tag{1}$$

成立，其中：

$F:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$；$F(x)=\left(F_1(x),F_2(x),\cdots,F_n(x)\right)^{\mathrm{T}}$；

$F_i:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n\quad(i=1,2,\cdots,n)$；

$\mathbf{R}^n$表示实数集上n维向量空间。

文中假设$F\in C^2\left(\mathbf{R}^n\bigcap\boldsymbol{\Omega}\right)$，其中：

C^2表示具有二阶连续导数的函数集；

$\boldsymbol{\Omega}$表示不等式（1）的解空间集。

引入记号，对

$\forall x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^{\mathrm{T}}$，$y=\left(y_1,y_2,\cdots,y_n\right)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$，记

$$y_+=\left(\max\{0,y_1\},\max\{0,y_2\},\cdots,\max\{0,y_n\}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{2}$$

$$x\circ y=\left(x_1y_1,x_2y_2,\cdots,x_ny_n\right)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n, \tag{3}$$

则由式（2），可将式（1）的问题转化为求解以下非线性方程组

$$[F(x)]_+=0, \tag{4}$$

而由式（3），可得非线性方程组（4）的等价方程组为

$$\Phi(x)=\frac{1}{2}\left[F(x)\right]_+\circ\left[F(x)\right]_+=0。 \tag{5}$$

构造辅助函数

收稿日期：2009-09-08
基金项目：湖南省教育厅基金资助项目（08C668）
通信作者：何郁波（1979-），男，湖南岳阳人，怀化学院教师，硕士，主要研究方向为变分不等式与互补问题的数值算法，
E-mail：heyinprc@yahoo.com.cn

$$\varphi(x,\varepsilon)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}\varepsilon^2 & (x>\varepsilon),\\ \frac{1}{12\varepsilon}(x-\varepsilon)^3 & (-\varepsilon<x<\varepsilon),\\ 0 & (x\le-\varepsilon).\end{cases} \tag{6}$$

式（6）中：$\varepsilon\ge0$为光滑因子；

函数$\varphi(x,\varepsilon)$是二阶可微的，具有以下一些性质。

引理1 对任意$(x,\varepsilon)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^+$，有

1）$\varphi(x,\varepsilon)\ge0$；

2）$\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\varphi(x,\varepsilon)=\frac{1}{2}(x_-)^2$；

3）$\varphi(x,\varepsilon)=0$当且仅当$\varepsilon=0$及$x\le0$；

4）$\varphi(x,\varepsilon)\in C^2(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^-)$；

5）$\varphi(x,\varepsilon)$是凸函数。

引理的证明是显然的。

这里方程组（5）所确定的算子不具可微性，所以不能直接使用牛顿法以及其他的一些方法[2-4]来求解非线性方程组，本文采用光滑逼近函数$\boldsymbol{\Phi}(x,\varepsilon)$来逼近函数$\boldsymbol{\Phi}(x)$。

由引理1可知，方程组（5）的近似方程组为

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\varepsilon)=\begin{bmatrix}\Phi_1(\boldsymbol{x},\varepsilon)\\ \Phi_2(\boldsymbol{x},\varepsilon)\\ \vdots\\ \Phi_n(\boldsymbol{x},\varepsilon)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varphi(F_1(\boldsymbol{x}),\varepsilon)\\ \varphi(F_2(\boldsymbol{x}),\varepsilon)\\ \vdots\\ \varphi(F_n(\boldsymbol{x}),\varepsilon)\end{bmatrix}=0\ , \tag{7}$$

若$\varepsilon=0$，则由引理1知，必有$\boldsymbol{F}(x)\le0$；若$\varepsilon>0$，则由引理1可知当$\varepsilon\downarrow0$时，有$0=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\varphi(F_i(\boldsymbol{x}),\varepsilon)=\frac{1}{2}[F_i(\boldsymbol{x})]_+^2$，从而也有$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\le0$。

记$\boldsymbol{\Phi}(x,\varepsilon)=\boldsymbol{\Phi}_\varepsilon(x)$，则由引理1知$\boldsymbol{\Phi}_\varepsilon\in C^2(\mathrm{R}\times\mathrm{R}^-)$。给定函数$\boldsymbol{\Phi}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$，称光滑函数$\boldsymbol{\Phi}_\varepsilon:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n\ (\varepsilon>0)$为$\boldsymbol{\Phi}$的光滑逼近函数；如果对任意$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，存在$\kappa>0$，使得

$$\|\boldsymbol{\Phi}_\varepsilon(x)-\boldsymbol{\Phi}(x)\|\le\kappa\varepsilon\quad(\forall\varepsilon>0), \tag{8}$$

若κ不依赖于$\boldsymbol{x}$，则称$\boldsymbol{\Phi}'_\varepsilon(\boldsymbol{x})$为$\boldsymbol{\Phi}$的一致光滑逼近函数[5]。可验证，由方程组（7）定义的函数$\boldsymbol{\Phi}'_\varepsilon(\boldsymbol{x})$是$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$的一致光滑逼近函数。下面介绍C-次微分的定义。

定义1 假设$\boldsymbol{\Phi}:\mathbf{R}^n\to\mathrm{R}^n$是局部Lipchitz函数，则$\boldsymbol{\Phi}$在$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$处的C-次微分定义为

$$\partial_C\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}:=\partial\boldsymbol{\Phi}_1(\boldsymbol{x})\times\partial\boldsymbol{\Phi}_2(\boldsymbol{x})\times\cdots\times\partial\boldsymbol{\Phi}_n(\boldsymbol{x}),$$

式中：$\partial\boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{x})\ (i=1,2,\cdots,n)$表示$\boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{x})$的广义Jacobi矩阵[6]。

实际上，C-次微分与Clarke广义Jacobian$\partial\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$有如下关系：$\partial\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})\subseteq\partial_C\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$。

下面定义$\boldsymbol{\Phi}'_\varepsilon(\boldsymbol{x})$对$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$的一阶意义上的逼近。

定义2 假设$\boldsymbol{H}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$是局部Lipchitz函数，如果其光滑逼近函数$\boldsymbol{H}_\varepsilon(\boldsymbol{x})$满足下述条件：对$\forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，有$\lim\limits_{\varepsilon\downarrow0}\mathrm{dist}(\boldsymbol{H}'_\varepsilon(\boldsymbol{x}),\partial_C\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}))=0$，则可称光滑逼近函数$\boldsymbol{H}_\varepsilon(\boldsymbol{x})$与$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$满足Jacobian相容性[7]。

由方程组（7）所定义的函数$\boldsymbol{\Phi}_\varepsilon(\boldsymbol{x})$，据引理1，得

引理2 $\boldsymbol{\Phi}_\varepsilon(\boldsymbol{x})$满足Jacobian相容性的条件，即

$\lim\limits_{\varepsilon\downarrow0}\mathrm{dist}(\boldsymbol{\Phi}'_\varepsilon(\boldsymbol{x}),\partial_C\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}))=0$。

文献[7]中正是利用辅助函数的一致光滑逼近性和Jacobian相容性构造了双障碍问题的光滑化牛顿方法。在文献[7]的研究基础上，本文研究了关于非线性不等式组的光滑牛顿算法。

1 算法

令$\Psi(x)=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})\|^2$，$\Psi_\varepsilon(x)=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\Phi}_\varepsilon(x)\|^2$，给出光滑牛顿算法的步骤如下。

1）给定初始点$x_0\in\mathbf{R}^n$，$\lambda,\alpha,\eta\in(0,1)$，$\kappa,\gamma>0$、$\sigma\in\left(0,\frac{1}{2}(1-\alpha)\right)$，令$\beta_0=\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_0)\|$，$\varepsilon_0=\frac{\alpha}{2\kappa}\beta_0$，$k:=0$。

2）若$\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_k)\|=0$，则停止；否则转入步骤3。

3）解方程组$\boldsymbol{\Phi}'_{\varepsilon_k}(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{d}=-\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_k)$，（9）

得$\boldsymbol{d}_k$。

4）令t_k为满足下述线性搜索的最小非负整数t，

$$\Psi_{\varepsilon_k}(\boldsymbol{x}_k+\lambda^t\boldsymbol{d}_k)-\Psi_{\varepsilon_k}(\boldsymbol{x}_k)\le-2\sigma\lambda^t\Psi(\boldsymbol{x}_k), \tag{10}$$

令$\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{x}_k+\lambda^{t_k}\boldsymbol{d}_k$。

5）检验$\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_{k+1})\|$，若$\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_{k+1})\|=0$，则停止；否则，若

$$\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_{k+1})\|<\max\{\eta\beta_k,\alpha^{-1}\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_{k+1})-\boldsymbol{\Phi}_{\varepsilon_k}(\boldsymbol{x}_{k+1})\|\}, \tag{11}$$

则令$\beta_{k+1}=\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_{k+1})\|$，选取满足

$$0<\varepsilon_{k+1}<\min\left\{\frac{\alpha}{2\kappa}\beta_{k+1},\frac{\varepsilon_k}{2}\right\} \tag{12}$$

的ε_{k+1}；否则，令$\beta_{k+1}=\beta_k$，$\varepsilon_{k+1}=\varepsilon_k$。

6）令$k:=k+1$，转步骤1。

引理3 假设$\{\boldsymbol{x}_k\}$是由算法所产生的点列，则对$\forall\boldsymbol{x}_k\subset\{\boldsymbol{x}_k\}\subset\mathbf{R}^n$，都有$\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_k)-\boldsymbol{\Phi}_{\varepsilon_k}(\boldsymbol{x}_k)\|<\alpha\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_k)\|$。

由$\boldsymbol{\Phi}_{\varepsilon_k}(\boldsymbol{x}_k)$的一致光滑逼近性及算法中$\varepsilon_k$的选取规则（12）即可证明本引理。

引理4 若算法中$\boldsymbol{\Phi}'_{\varepsilon_k}(\boldsymbol{x}_k)$是非奇异矩阵，则算法

是适定的。

证明 当$\varepsilon>0$时，$\Psi_\varepsilon(x)$连续可微，且$\nabla\Psi_\varepsilon(x)=\Phi_\varepsilon'(x)^{T}\Phi_\varepsilon(x)$，则由引理3可知

$$\begin{aligned}&\Psi_{\varepsilon_k}\left(x_k+\lambda^t d_k\right)-\Psi_{\varepsilon_k}\left(x_k\right)=\\&\lambda^t\left(\nabla\Psi_{\varepsilon_k}\left(x_k\right)\right)^{T}d_k+o(\lambda)=\\&\lambda^t\Phi_{\varepsilon_k}'\left(x_k\right)^{T}\Phi_{\varepsilon_k}\left(x_k\right)d_k+o(\lambda)=\\&-\lambda^t\Phi_{\varepsilon_k}'\left(x_k\right)^{T}\Phi\left(x_k\right)+o(\lambda)-\\&-2\lambda^t\Psi\left(x_k\right)-\lambda^t\Phi\left(x_k\right)^{T}\left(\Phi\left(x_k\right)-\Phi_{\varepsilon_k}\left(x_k\right)\right)+o(\lambda)\le\\&-2\lambda^t\Psi\left(x_k\right)-2\alpha\lambda^t\Psi\left(x_k\right)+o(\lambda)=\\&-2\lambda^t(1-\alpha)\Psi\left(x_k\right)+o(\lambda),\end{aligned}$$

由算法中参数的设定，可知$\sigma<\frac{1}{2}(1-\alpha)<(1-\alpha)$，所以存在一非负整数$t$，使得式（10）成立。

2 收敛性分析

记
$$K=\{0\}\cup\left\{k\,\middle|\,\left\|\Phi\left(x_k\right)\right\|\le\max\left\{\eta\beta_{k-1},\alpha^{-1}\left\|\Phi\left(x_k\right)-\Phi_{\varepsilon_{k-1}}\left(x_k\right)\right\|\right\}\right\},$$
$$K_1=\left\{k\in K\,\middle|\,\eta\beta_{k-1}\ge\alpha^{-1}\left\|\Phi\left(x_k\right)-\Phi_{\varepsilon_{k-1}}\left(x_k\right)\right\|\right\},$$
$$K_2=\left\{k\in K\,\middle|\,\eta\beta_{k-1}<\alpha^{-1}\left\|\Phi\left(x_k\right)-\Phi_{\varepsilon_{k-1}}\left(x_k\right)\right\|\right\},$$
则$K=K_1\cup K_2\cup\{0\}$。

假设1 水平集

$L_0:=\left\{x\in \mathbf{R}^n\,\middle|\,\Psi(x)\le(1+\alpha)^2\Psi\left(x_0\right)\right\}$有界，且对$\forall x\in L_0$，当$\varepsilon>0$时，$\Phi_\varepsilon'(x)$是非奇异的。

定理1 若假设1成立，则由算法产生的序列$\{x_k\}$为无穷序列，且

$$\{x_k\}\subset L_0,\ \lim_{k\to\infty}\Phi\left(x_k\right)=0。\tag{13}$$

证明 不妨设$K=\{0=k_0<k_1<k_2<\cdots\}$，对任意非负整数$k$，定义$k_j$为$K$中小于$k$的最大指标，即$k_j=\max\left\{k_i\in K\,|\,k_i\le k\right\}$，则由算法步骤5可知有$\varepsilon_k=\varepsilon_{k_j}$，$\beta_k=\beta_{k_j}$。因为$\Phi_\varepsilon'(x)$是一致光滑逼近函数，所以根据算法步骤4知$\left\|\Phi_{\varepsilon_{k_j}}\left(x_k\right)\right\|\le\left\|\Phi_{\varepsilon_{k_j}}\left(x_{k_j}\right)\right\|$。

由一致光滑逼近的定义，对$j\ge0$，有

$$\begin{aligned}&\left\|\Phi\left(x_k\right)\right\|\le\left\|\Phi\left(x_k\right)-\Phi_{\varepsilon_k}\left(x_k\right)\right\|+\left\|\Phi_{\varepsilon_k}\left(x_k\right)\right\|=\\&\left\|\Phi\left(x_k\right)-\Phi_{\varepsilon_k}\left(x_k\right)\right\|+\left\|\Phi_{\varepsilon_{k_j}}\left(x_k\right)\right\|\le\\&\kappa\varepsilon_k+\left\|\Phi_{\varepsilon_{k_j}}\left(x_k\right)\right\|\le\kappa\varepsilon_k+\left\|\Phi_{\varepsilon_{k_j}}\left(x_{k_j}\right)\right\|\le\\&\kappa\varepsilon_{k_j}+\left\|\Phi_{\varepsilon_{k_j}}\left(x_{k_j}\right)-\Phi\left(x_{k_j}\right)\right\|+\left\|\Phi\left(x_{k_j}\right)\right\|\le\\&\kappa\varepsilon_{k_j}+\kappa\varepsilon_{k_j}+\left\|\Phi\left(x_{k_j}\right)\right\|=\\&\kappa\varepsilon_{k_j}+\kappa\varepsilon_{k_j}+\left\|\Phi\left(x_{k_j}\right)\right\|=2\kappa\varepsilon_{k_j}+\beta_k,\end{aligned}\tag{14}$$

如果$j=0$，则立即得到$\{x_k\}\subset L_0$。如果$j\ge1$，则由算法步骤5得$\varepsilon_{k_j}<\frac{1}{2}\varepsilon_{k_j-1}=\frac{1}{2}\varepsilon_{k_{j-1}}$；及当$k_j\in K_1$时，有$\beta_{k_j}\le\eta\beta_{k_{j-1}}$；当$k_j\subset K_2$时，有

$$\beta_{k_j}\le\alpha^{-1}\left\|\Phi\left(x_{k_j}\right)-\Phi_{\varepsilon_{k_j-1}}\left(x_{k_j}\right)\right\|\le\frac{\kappa}{\alpha}\varepsilon_{k_j-1}=\frac{\kappa}{\alpha}\varepsilon_{k_{j-1}}\le\frac{1}{2}\beta_{k_{j-1}}。$$

令$r=\max\left\{\frac{1}{2},\eta\right\}$，综合即得

$$\varepsilon_{k_j}\le\frac{1}{2}\varepsilon_{k_{j-1}}\le\cdots\le\frac{1}{2^{j-1}}\varepsilon_0=\frac{1}{2^j}\frac{\alpha}{\kappa}\left\|\Phi\left(x_0\right)\right\|\tag{15}$$

$$及\beta_{k_j}\le r\beta_{k_{j-1}}\le\cdots\le r^{j-1}\beta_0=r^{j-1}\left\|\Phi\left(x_0\right)\right\|,\tag{16}$$

从而，由式（14）~（16）且对$j>0$，有

$$\begin{aligned}&\left\|\Phi\left(x_k\right)\right\|\le2\kappa\varepsilon_{k_j}+\beta_k\le r^{j-1}(1+\alpha)\left\|\Phi\left(x_0\right)\right\|\le\\&(1+\alpha)\left\|\Phi\left(x_0\right)\right\|,\end{aligned}\tag{17}$$

所以$\{x_k\}\subset L_0$。

设K是有穷集合，则K_1，K_2都是有限的。令$\bar{k}=\max_{k_j\in K}k_j$，则对所有$k>\bar{k}$，有

$$\varepsilon_k=\varepsilon_{\bar{k}},\ \beta_k=\beta_{\bar{k}}=\left\|\Phi\left(x_{\bar{k}}\right)\right\|,\tag{18}$$

$$\left\|\Phi\left(x_k\right)\right\|>\eta\beta_k=\eta\left\|\Phi\left(x_{\bar{k}}\right)\right\|>0\tag{19}$$

$$及\ \alpha\left\|\Phi\left(x_k\right)\right\|>\left\|\Phi_{\varepsilon_k}\left(x_k\right)-\Phi\left(x_k\right)\right\|。\tag{20}$$

则由式（19），对所有$k>\bar{k}$，有

$$\Psi\left(x_k\right)\ge\eta^2\Psi\left(x_{\bar{k}}\right)。\tag{21}$$

令$\bar{\varepsilon}=\varepsilon_{\bar{k}}$，则对所有的$k>\bar{k}$，由算法步骤5知

$$\Psi_{\varepsilon_k}\left(x_k\right)=\Psi_{\bar{\varepsilon}}\left(x_k\right),\ \Phi_{\varepsilon_k}\left(x_k\right)=\Phi_{\bar{\varepsilon}}\left(x_k\right)。$$

由假设1及算法步骤3知，对所有$k>\bar{k}$，$\{d_k\}$是有界的。

若$\inf_k\lambda^{t_k}=\lambda^*>0$，则由算法步骤3知，当$k>\bar{k}$，由序列$\left\{\Psi_{\bar{\varepsilon}}\left(x_k\right)\right\}$的单调性知必有$\Psi_{\bar{\varepsilon}}\left(x_k\right)\to-\infty\ (k\to\infty)$，这与$\Psi_{\bar{\varepsilon}}(x)\ge0$矛盾，故$K$不是有限集，由式（17）即

可得$\lim\limits_{k\to\infty}\Phi(x_k)=0$。

若$\inf\limits_k \lambda^k = 0$，则当$k$充分大时，有

$$\Psi_{\bar{\varepsilon}}\left(x_k+\lambda^{k-1}d_k\right)-\Psi_{\bar{\varepsilon}}\left(x_k\right)>-2\sigma\lambda^{k-1}\Psi\left(x_k\right), \tag{22}$$

从而有

$$\begin{aligned}
-2\sigma\Psi\left(x_k\right)&<\frac{\Psi_{\bar{\varepsilon}}\left(x_k-\lambda^{k-1}d_k\right)-\Psi_{\bar{\varepsilon}}\left(x_k\right)}{\lambda^{k-1}}=\\
&\nabla\Psi_{\bar{\varepsilon}}\left(x_k\right)^{\mathrm{T}}d_k=\left(\Phi_{\bar{\varepsilon}}'\left(x_k\right)^{\mathrm{T}}\Phi_{\bar{\varepsilon}}\left(x_k\right)\right)^{\mathrm{T}}d_k=\\
&\Phi_{\bar{\varepsilon}}\left(x_k\right)^{\mathrm{T}}\Phi_{\bar{\varepsilon}}'\left(x_k\right)\left(\Phi_{\bar{\varepsilon}}'\left(x_k\right)\right)^{-1}\Phi\left(x_k\right)=\\
&-\Phi_{\bar{\varepsilon}}\left(x_k\right)^{\mathrm{T}}\Phi\left(x_k\right)=\\
&-\left(\Phi\left(x_k\right)+\Phi_{\bar{\varepsilon}}\left(x_k\right)-\Phi\left(x_k\right)\right)^{\mathrm{T}}\Phi\left(x_k\right)=\\
&-2\Psi\left(x_k\right)+\left(\Phi\left(x_k\right)-\Phi_{\bar{\varepsilon}}\left(x_k\right)\right)^{\mathrm{T}}\Phi\left(x_k\right)\le\\
&-2\Psi\left(x_k\right)+\left\|\Phi\left(x_k\right)-\Phi_{\bar{\varepsilon}}\left(x_k\right)\right\|\left\|\Phi\left(x_k\right)\right\|\le\\
&-2\Psi\left(x_k\right)+2\alpha\Psi\left(x_k\right)=\\
&2(1-\alpha)\Psi\left(x_k\right).
\end{aligned} \tag{23}$$

式（23）中最后的不等式应用了引理 3 的结论。

由式（23）可得$\sigma>1-\alpha$，这与$\sigma\in\left(0,\frac{1}{2}(1-\alpha)\right)$矛盾，所以$K$不可能是有限集，因而$K$为无限集，则在式（17）两边取极限，由于$r<1$，即得

$\lim\limits_{k\to\infty}\Phi(x_k)=0$，证毕。

3　结语

非线性不等式组的求解在实际问题中有着广泛的应用，它频繁出现在数据分析、计算机辅助设计、图像重构和集合分离等领域，因此非线性不等式组的求解非常重要。本文设计的 Jacobian 光滑牛顿算法较易实现对非线性不等式组的求解，且是全局收敛的，该算法可推广到解集非空的高维非线性不等式的求解，今后将进一步研究该算法的局部收敛性。

参考文献：

[1] 何郁波，马昌凤. 非线性不等式组的信赖域算法[J]. 工程数学学报，2008，25(2)：224−230.
He Yubo，Ma Changfeng. Trust Region Method for Nonlinear Inequalities[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics，2008，25(2)：224−230.

[2] Chen X. On the Convergence of Broyden-Like Methods for Nonlinear Equations with Nondifferentiable Terms[J]. Ann Inst Statis Math，1990，42(2)：387−401.

[3] Chen X，Qi L. Parameterized Newton Method and Broyden-Like Method for Solving Nonsmooth Equations[J]. Computational Optimization and Applications，1994，46(3)：157−179.

[4] Ma C. Convergence Analysis of a Successive Approximation Quasi-Newton Method for Solving Nonlinear Complementarity Problems[J]. Journal Mathematical Research and Exposition，2006，16(3)：333−346.

[5] 韩继业，修乃华，戚厚铎. 非线性互补理论与算法[M]. 上海：上海科学技术出版社，2006.
Han Jiye，Xiu Naihua，Qi Houduo. Nonlinear Complementarity Theory and Algorithms[M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Publisher，2006.

[6] Clarke F H. Optimization and Nonsmooth Analysis[M]. New York：John Wiley，1983.

[7] Chen X，Qi L，Sun D. Global and Superlinear Convergence of the Smoothing Newton Method and Its Application to General Box Constrained Variational Inequalities[J]. Math Comp，1998，67(222)：519−525.

（责任编辑：李玉珍）