一类平面三次系统极限环的存在唯一性

刘兴国，刘　斌，吕　勇

（湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412008）

摘　要：研究一类平面三次系统的极限环问题，利用Hopf分支理论得到了该系统极限环存在性的若干充分条件，利用Л.А.Черкас和Л.И.Жилевыч的唯一性定理得到了极限环唯一性与稳定性的若干充分条件。

关键词：三次系统；极限环；存在性；唯一性

中图分类号：O175.12　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2010)01-0020-05

The Existence and Uniqueness of Limit Cycles for A Class of Planar Cubic System

Liu Xingguo，Liu Bin，Lv Yong

（School of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412008，China）

Abstract：Limit cycles for a class of planar cubic systems are studied. By Hopf bifurcation theory, some sufficient conditions for the existence of limit cycles of such systems are obtained. Furthermore, with the uniqueness theorem of Л.А.Черкас and Л.ИЖилевыч, some sufficient conditions for the uniqueness and stability of limit cycles of such systems are established.

Keywords：cubic system；limit cycle；existence；uniqueness

0　引言

由常微分方程直接研究和判断解的性质，这是常微分方程定性理论的基本思想，极限环问题是常微分方程定性理论研究的主要问题之一。大量非线性振荡数学模型、生态学中的种群竞争模型等都可归结到Liénard方程的研究中。鉴于Liénard方程重要的实际应用背景，自其发现以来，不少学者对其进行了不遗余力的研究，同时也取得了大量的研究成果。近年来，三次微分系统的研究越来越受到人们的重视，原因是生态系统中的Kolmogorov系统、生化反应中的三分子模型等行为可归结到三次系统极限环问题的研究中来。此外，在机械振荡、化学反应、无线电电子线路、人口动力学、神经刺激和非线性力学中三次多项式系统的数学模型随处可见。在三次系统中最为简单的一类方程为：

$$E_3^1:\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x-\delta_1 y+a_1x^2+a_2xy+a_3y^2+\\ \qquad a_4x^3+a_5x^2y+a_6xy^2+a_7y^3.\end{cases}$$

文献[1-2]就$a_3=a_4=a_6=a_7$情形进行了讨论，文献[3]就$a_3=a_5=a_6=a_7$情形进行了讨论，文献[4]就$a_1=a_3=a_6=a_7$情形进行了讨论，文献[5]就$a_4=a_5=a_7$情形进行了讨论。本文采用不同于文献[1-5]的讨论方法对如下的一类三次微分系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y\equiv P(x,y),\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+\delta y+axy+bx^3+cx^2y\equiv Q(x,y)\end{cases}\tag{1}$$

进行定性分析，其中δ，a，b，c，λ均为实常数。本

收稿日期：2009-12-19
基金项目：国家自然科学基金资助项目（60874025），湖南省教育科学“十一五”规划课题资助项目（XJK08CGD005），湖南省教育厅科学研究基金资助项目（08C292），湖南工业大学教学改革研究基金资助项目（08C64）
通信作者：刘兴国（1966-），男，湖南岳阳人，湖南工业大学教授，硕士，主要研究方向为微分方程定性理论，
E-mail：zzlxg0733@yahoo.com.cn

文运用形式级数法对系统$(1)|_{\delta=0}$进行中心焦点的判定，借助于 Dulac 函数法讨论其闭轨的不存在性；依据 Hopf 分支理论，根据参数变化时焦点稳定性的变化分析，得到极限环存在的充分条件；通过将系统进行变换转化为 Liénard 方程，再通过构造对比系统并运用微分方程比较原理验证Л.А.Черкас和Л.И.Жилевыч的极限环唯一性定理中所需条件，然后依据该定理分析得到了多种条件下极限环的唯一性和稳定性条件。

1　平衡点的性态

引理 1　对于系统（1），若 $\delta\neq 0$，则有

i）当$b\le 0$时，有限处实奇点只有$O(0,0)$，且$-2<\delta<0$时为稳定的粗焦点，$0<\delta<2$时为不稳定的粗焦点；

ii）当$b>0$时，有限处实奇点有$O(0,0)$、$N_1\left(\frac{1}{\sqrt{b}},0\right)$及$N_2\left(-\frac{1}{\sqrt{b}},0\right)$共 3 个，且$O(0,0)$点性态同 i），$N_1\left(\frac{1}{\sqrt{b}},0\right)$及$N_2\left(-\frac{1}{\sqrt{b}},0\right)$是系统（1）的鞍点。

当$\delta=0$时，显然$O(0,0)$是系统（1）所对应线性系统的中心，但需要对奇点$O(0,0)$进行中心焦点的判定。下面采用基于 Poincaré 思想的形式级数法和对称原理来分析当$\delta=0$时奇点$O(0,0)$的性态。

定理 1　对于系统（1），若 $\delta=0$，则有

i）当$c>0$时，$O(0,0)$为一阶不稳定细焦点；

ii）当$c<0$时，$O(0,0)$为一阶稳定细焦点；

iii）当$c=0$时，$O(0,0)$为中心。

证明　当$\delta=0$时，令

$$F(x,y)=x^2+y^2+F_3(x,y)+F_4(x,y)+\cdots,$$

式中：$F_k(x,y)=\sum_{i+j=k}a_{ij}x^iy^j$是$x$与$y$的$k$次齐次多项式，且$k=3$，4，…。

则有

$$\left.\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}=\left(2x+\frac{\partial F_3}{\partial x}+\frac{\partial F_4}{\partial x}+\cdots\right)y+\left(2y+\frac{\partial F_3}{\partial y}+\frac{\partial F_4}{\partial y}+\cdots\right)\left(-x+axy-bx^3+cx^2y\right).\tag{2}$$

令式（2）右端的 3 次项为 0，有

$$y\frac{\partial F_3}{\partial x}-x\frac{\partial F_3}{\partial y}+2axy^2=0,$$

将上式取极坐标$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$并消去r^3后可得

$$\frac{\mathrm{d}F_3(\cos\theta,\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}=2a\cos\theta\sin^2\theta,$$

取$F_3(\cos\theta,\sin\theta)=\frac{2}{3}a\sin^3\theta$，即$F_3(x,y)=\frac{2}{3}ay^3$。

令式（2）右端的 4 次项为 0，有

$$y\frac{\partial F_4}{\partial x}-x\frac{\partial F_4}{\partial y}+axy\frac{\partial F_3}{\partial y}+2y\left(bx^3+cx^2y\right)=0,$$

即$x\frac{\partial F_4}{\partial y}-y\frac{\partial F_4}{\partial x}=2cx^2y^2+2bx^3y+2a^2xy^3$，

将上式取极坐标$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$并消去r^4化简得

$$\frac{\mathrm{d}F_4(\cos\theta,\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}=2c\cos^2\theta\sin^2\theta+2b\cos^3\theta\sin\theta+2a^2\cos\theta\sin^3\theta.$$

下面分 2 种情形讨论。

1）当$c\neq 0$时，因为

$$\int_0^{2\pi}\left(2c\cos^2\theta\sin^2\theta-2b\cos^3\theta\sin\theta+2a^2\cos\theta\sin^3\theta\right)\mathrm{d}\theta=2c\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\neq 0,$$

改取F_4满足方程

$$\frac{\mathrm{d}F_4(\cos\theta,\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}=2c\cos^2\theta\sin^2\theta-2b\cos^3\theta\sin\theta+2a^2\cos\theta\sin^3\theta-C_4,$$

式中：$C_4=\frac{c}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta$，且$C_4$与$c$同号。

设$\Phi(x,y)=x^2+y^2+F_3+F_4$，则有

$$\left.\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}=C_4r^4+o\left(r^4\right),$$

从而当$c>0$时，$O(0,0)$为一阶不稳定细焦点，当$c<0$时，$O(0,0)$为一阶稳定细焦点。

2）当$c=0$时，因为有$P(-x,y)=P(x,y)$，$Q(-x,y)=-Q(x,y)$，所以系统（1）所定义的向量场$(P(x,y),Q(x,y))$关于y轴对称，故当$c=0$时，$O(0,0)$为系统$(1)|_{\delta=0}$的中心。

2　极限环的存在唯一性与稳定性

定理 2　当$ab=0$且下列条件之一成立时，系统（1）在全平面上不存在闭轨。

i）$c>0$，$\delta\ge 0$；

ii）$c<0$，$\delta\le 0$；

iii）$c\ge 0$，$\delta>0$；

iv）$c\le 0$，$\delta<0$。

证明　当$a\neq 0$，$b=0$时，令$L(y)=ay-1=0$，则有$\left.\frac{\mathrm{d}L(y)}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}=\delta+cx^2$，于是可知$y-\frac{1}{a}$是系统（1）于定理 2 相应条件下的无切直线。取 Dulac 函数（当$a=0$时，取

$B(x,y)=-1$），$B(x,y)=\dfrac{1}{ay-1}$，则

$$\operatorname{div}\left(BP,BQ\right)\big|_{(1)}=-\left(ay-1\right)^{-2}\left(\delta+cx^{2}\right),$$

因为在定理 2 的条件之一成立时上式定号，且其 0 值仅在 $x=0$ 处取得，所以在定理 2 条件之一成立时系统（1）在全平面上不存在闭轨。

定理 3 当 $ab=0$，$c=0$，$\delta=0$ 时，系统（1）在全平面上不存在极限环。

证明 由定理 2 证明可知，当 $\operatorname{div}\left(BP,BQ\right)\big|_{(1)}\equiv 0$ 时，系统（1）存在连续可微的积分因子 $B(x,y)$，因而在全平面上不存在极限环。

引理 2 在系统（1）包围奇点 $O(0,0)$ 的闭轨存在区域中总有 $bx^{2}<1$。

证明 对系统（1）而言，当 $b>0$ 时，有 $\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{1-\sqrt{b}x=0}=y$，从而可知，直线 $1-\sqrt{b}x=0$ 和 $1+\sqrt{b}x=0$ 分别被系统（1）的鞍点 $N_1\left(\dfrac{1}{\sqrt{b}},0\right)$ 与 $N_2\left(-\dfrac{1}{\sqrt{b}},0\right)$ 所分割的部分是无切的，故系统（1）包围奇点 $O(0,0)$ 的闭轨不能与直线 $1-\sqrt{b}x=0$ 和 $1+\sqrt{b}x=0$ 相交，否则此闭轨将包围指数为 +1 的奇点 $O(0,0)$ 与鞍点 $N_1\left(\dfrac{1}{\sqrt{b}},0\right)$ 或 $N_2\left(-\dfrac{1}{\sqrt{b}},0\right)$，这是不可能的，所以包围奇点 $O(0,0)$ 的闭轨若存在，则当 $b>0$ 时它必位于带域 $-\dfrac{1}{\sqrt{b}}<x<\dfrac{1}{\sqrt{b}}$ 中，从而 $bx^{2}<1$；当 $b\le 0$ 时结论自然成立。

定理 4 下列条件之一成立时，系统（1）在 $O(0,0)$ 外围至少存在 1 个极限环，且 $\delta<0$ 时所产生的环不稳定，$\delta>0$ 时所产生的环稳定。

i）$c>0$，$-1\ll\delta<0$；

ii）$c<0$，$0<\delta\ll 1$。

证明 在定理 4 的条件 i）下，系统 $(1)\big|_{\delta=0}$ 以 $O(0,0)$ 为不稳定细焦点，而当 $-1\ll\delta<0$ 时，系统（1）以 $O(0,0)$ 为稳定粗焦点，当 δ 从 0 开始减小时，系统（1）的奇点 $O(0,0)$ 由不稳定的细焦点变为稳定的粗焦点，从物理学角度来看，奇点由吸收能量到释放能量，此过程中必产生等幅振荡，再依据 Hopf 分支理论知，在此 2 种参数条件下系统（1）在点 $O(0,0)$ 外围至少产生 1 个不稳定的极限环。

在定理 4 的条件 ii）下，系统 $(1)\big|_{\delta=0}$ 以 $O(0,0)$ 为稳定细焦点，而当 $0<\delta\ll 1$ 时，系统（1）以 $O(0,0)$ 为不稳定粗焦点，当 δ 从 0 开始增大时，系统（1）的奇点 $O(0,0)$ 由稳定的细焦点变为不稳定的粗焦点，从物理学角度来看，奇点由释放能量到吸收能量，此过程中必产生等幅振荡，再依据 Hopf 分支理论知，在此 2 种参数条件下系统（1）在点 $O(0,0)$ 外围至少产生 1 个稳定的极限环。

定理 5 下列条件之一成立时，系统（1）在 $O(0,0)$ 外围至多存在 1 个极限环，且当 $\delta<0$ 时，若存在极限环则不稳定，$\delta>0$ 时，若存在极限环则稳定。

i）$b=0$，$c>0$，$\delta<0$；

ii）$b=0$，$c<0$，$\delta>0$；

iii）$b>0$，$c>0$，$\dfrac{c^{2}-a^{2}b}{2bc}\le\delta<0$，$f\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{b}}\right)<0$；

iv）$b>0$，$c<0$，$0<\delta\le\dfrac{c^{2}-a^{2}b}{2bc}$，$f\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{b}}\right)>0$；

v）$b>0$，$c>0$，$\dfrac{c^{2}-a^{2}b}{2bc}\le\delta<0$，

$-\dfrac{1}{\sqrt{b}}<x_1<0<x_2<\dfrac{1}{\sqrt{b}}$；

vi）$b>0$，$c<0$，$0<\delta\le\dfrac{c^{2}-a^{2}b}{2bc}$，

$-\dfrac{1}{\sqrt{b}}<x_1<0<x_2<\dfrac{1}{\sqrt{b}}$；

vii）$b<0$，$c>0$，$\dfrac{c^{2}-a^{2}b}{2bc}\le\delta<0$；

viii）$b<0$，$c<0$，$0<\delta\le\dfrac{c^{2}-a^{2}b}{2bc}$；

ix）$b<0$，$c>0$，$\dfrac{c^{2}-a^{2}b}{2bc}\le\delta<0$，$f\left(\pm\sqrt{\dfrac{1}{-b}}\right)<0$；

x）$b<0$，$c<0$，$0<\delta\le\dfrac{c^{2}-a^{2}b}{2bc}$，$f\left(\pm\sqrt{\dfrac{1}{-b}}\right)>0$。

其中：$f(x)=-\left(cx^{2}+ax-\delta\right)$；

x_1 与 x_2 分别为方程 $f(x)=0$ 于定理 5 相应条件下的负根与正根。

证明 将系统（1）写成以下形式

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\left(x-bx^{3}\right)+\left(\delta+ax+cx^{2}\right)y,\end{cases}$$

于是可知系统（1）等价于下列形式的 Liénard 方程

$$\frac{\mathrm{d}^{2}x}{\mathrm{d}t^{2}}-\left(\delta-ax+cx^{2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\left(x-bx^{3}\right)=0,\tag{3}$$

将式（3）进一步写成下面的等价形式

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\phi(y)-F(x),\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=g(x),\end{cases}\tag{4}$$

式中：$\phi(y)=y$；

$$g(x)=x-bx^3；$$

$$F(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=-\int_0^x\left(cu^2+au+\delta\right)\mathrm{d}u。$$

则有 $f(x),g(x),\phi(y)$ 连续可微，$\phi(y)=y$ 单调递增，且 $y\phi(y)=y^2>0,\ y\neq 0,\ f(0)=F'(0)=-\delta$。

由引理2知，在包围原点的极限环存在的区域中总有 $bx^2<1$，故 $xg(x)=x^2\left(1-bx^2\right)>0,x\neq 0$。取 $f_1(x)=f(x)+g(x)\left[0+0F(x)\right]=f(x)=-\left(cx^2+ax-\delta\right)$，当 $c\neq 0$ 时，则有 $f_1(\pm\infty)=-\infty\,\mathrm{sgn}\,c,\ f_1(0)=f(0)=-\delta$，$\mathrm{sgn}\left[f_1(\pm\infty)f_1(0)\right]=\mathrm{sgn}\,c\delta$，若 c 与 δ 异号，则必存在 $x_1<0<x_2$，使得 $f_1(x_1)=f_1(x_2)=0$；或当 $b\neq 0$ 且 $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{|b|}}\right)$ 均与 δ 同号时（要求 $c\neq 0$），则必存在 $-\frac{1}{\sqrt{|b|}}<x_1<0<x_2<\frac{1}{\sqrt{|b|}}$，使得 $f_1(x_1)=f_1(x_2)=0$，且在区间 $[x_1,x_2]$ 上，当 $\delta<0$ 且 $c>0$ 或 $\delta<0$ 且 $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{|b|}}\right)<0$ 时，$f(x)\geq 0$，当 $\delta>0$ 且 $c<0$ 或 $\delta>0$ 且 $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{|b|}}\right)>0$ 时，$f(x)\leq 0$。

又系统（1）亦可写成

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y=P(x,y),\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x\left(1-bx^2\right)-f_1(x)y=Q(x,y),\end{cases}$$

而当 $f_1(x)=f(x)\equiv 0$ 时，系统（1）变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y=P_1(x,y),\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x\left(1-bx^2\right)\equiv Q_1(x,y),\end{cases}\qquad(5)$$

易算得 $PQ_1-P_1Q=y^2f(x)$。而当 $x\in[x_1,x_2]$ 时，$f_1(x)$ 定号，此时 PQ_1-P_1Q 亦定号。根据比较原理，当 $x\in[x_1,x_2]$ 时，系统（1）的闭轨线与系统（5）的闭轨线必重合或不相交。显然，系统（1）的闭轨与系统（5）的闭轨不重合，从而在带域 $x_1\leq x\leq x_2$ 中系统（1）与系统（5）的闭轨不能相交。而当 $b\leq 0$ 时，原点是系统（5）唯一奇点且为中心，自然系统（5）的闭轨将充满带域 $x_1\leq x\leq x_2$；当 $b>0$ 时，原点为系统（5）的中心，$N\left(\pm\frac{1}{\sqrt{b}},0\right)$ 为系统（5）的鞍点，只要 $-\frac{1}{\sqrt{b}}<x_1<0<x_2<\frac{1}{\sqrt{b}}$，系统（5）的闭轨将充满带域 $x_1\leq x\leq x_2$。若系统（1）的闭轨线不完全包含区间 $[x_1,x_2]$，则系统（1）经过区间 $[x_1,x_2]$ 上任一点的闭轨必与系统（5）的闭轨相交，结论矛盾。因而系统（1）的闭轨若存在则必包含定理5相应条件下的区间 $[x_1,x_2]$。记

$$T_1=-x^2T_2，$$

$$T_2=bcx^2-2abx+\left(c+3b\delta\right)，$$

$$T_3=\left(1-bx^2\right)\delta，$$

$$T=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f_1(x)}{g(x)}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{cx^2+ax+\delta}{bx^3-x}\right)=\frac{-x^2\left[bcx^2-2abx+\left(c+2b\delta\right)\right]+\left(1-bx^2\right)\delta}{\left(bx^3-x\right)^2}=\frac{T_1+T_3}{\left(bx^3-x\right)^2}，$$

则 $\mathrm{sgn}\,T=\mathrm{sgn}\left(T_1+T_3\right)$，$\mathrm{sgn}\ T_1=-\mathrm{sgn}\ T_2$，又由引理2知 $bx^2<1$，从而 $\mathrm{sgn}\ T_3=-\mathrm{sgn}\ \delta$。当 $b=0$，$c\neq 0$ 时，若 $c>0$，$\delta<0$，则 $T<0$，若 $c<0$，$\delta>0$，则 $T>0$；当 $b=0$，$c=0$ 时，$\mathrm{sgn}\ T=\mathrm{sgn}\,\delta$；当 $bc\neq 0$ 时，T_2 为一元二次三项式，其二次项系数为 bc，其根的判别式为 $\Delta=-4b^2\left(2\delta c+\frac{a^2b-c^2}{b}\right)$，则当 $bc<0$ 且 $\Delta\leq 0$ 时，$T_2\leq 0,\ T_1\geq 0$，当 $bc>0$ 且 $\Delta\leq 0$ 时，$T_2\geq 0$，$T_1\leq 0$。

结合上面的分析，再根据Л.А.Черкас和Л.И.Жилевыч的唯一性定理[6]，有：

1）当定理5的条件i）或iii）或v）或vii）或ix）成立时，有 $T_1\leq 0$，$T_3<0$，从而 $T<0$，故 $\frac{f_1(x)}{g(x)}$ 在 $(-\infty,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$ 内单调不增，且 $f(0)=-\delta>0$，所以系统（1）在 $O(0,0)$ 点外围至多存在1个不稳定的极限环。

2）当定理5的条件ii）或iv）或vi）或viii）或x）成立时，有 $T_1\geq 0$，$T_3>0$，从而 $T>0$，故 $\frac{f_1(x)}{g(x)}$ 在 $(-\infty,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$ 内单调不减，且 $f(0)=-\delta<0$，所以系统（1）在 $O(0,0)$ 点外围至多存在1个稳定的极限环。

定理5证毕。

由定理4和定理5易得下面的定理。

定理6　下列条件之一成立时，系统（1）在 $O(0,0)$ 外围存在唯一极限环，且当 $\delta<0$ 时极限环不稳定，$\delta>0$ 时极限环稳定。

i）$b=0$，$c>0$，$-1\ll\delta<0$；

ii）$b=0$，$c<0$，$0<\delta\ll 1$；

iii）$b>0$，$c>0$，$\frac{c^2-a^2b}{2bc}<\delta<0,\ |\delta|\ll 1$，

$f\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{b}}\right)<0$;

iv）$b>0$，$c<0$，$0<\delta\le\dfrac{c^2-a^2b}{2bc}$，$|\delta|\ll 1$，

$f\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{b}}\right)>0$;

v）$b>0$，$c>0$，$\dfrac{c^2-a^2b}{2bc}\le\delta<0$，$|\delta|\ll 1$，

$-\dfrac{1}{\sqrt{b}}<x_1<0<x_2<\dfrac{1}{\sqrt{b}}$;

vi）$b>0$，$c<0$，$0<\delta\le\dfrac{c^2-a^2b}{2bc}$，$|\delta|\ll 1$，

$-\dfrac{1}{\sqrt{b}}<x_1<0<x_2<\dfrac{1}{\sqrt{b}}$;

vii）$b<0$，$c>0$，$\dfrac{c^2-a^2b}{2bc}\le\delta<0$，$|\delta|\ll 1$;

viii）$b<0$，$c<0$，$0<\delta\le\dfrac{c^2-a^2b}{2bc}$，$|\delta|\ll 1$;

ix）$b<0$，$c>0$，$\dfrac{c^2-a^2b}{2bc}\le\delta<0$，$|\delta|\ll 1$，

$f\left(\pm\sqrt{\dfrac{1}{-b}}\right)<0$;

x）$b<0$，$c<0$，$0<\delta<\dfrac{c^2-a^2b}{2bc}$，$|\delta|\ll 1$，

$f\left(\pm\sqrt{\dfrac{1}{-b}}\right)>0$。

其中：$f(x)=-\left(cx^2+ax-\delta\right)$；

x_1与x_2分别为方程$f(x)=0$于定理6相应条件下的负根与正根。

当$b\le 0$时，极限环的唯一性是相对全平面而言的；当$b>0$时，极限环必存在于带域$-\dfrac{1}{\sqrt{b}}<x<\dfrac{1}{\sqrt{b}}$中，且其极限环与$x$轴负半轴交点必位于区间$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{b}},x_1\right)$内，与轴正半轴交点必位于区间$\left(x_2,\dfrac{1}{\sqrt{b}}\right)$内。

3 结语

关于极限环唯一性问题的研究，对于一般的平面系统而言至今尚没有全面有效的方法。对于Liénard型方程极限环唯一性问题的研究，如能恰当地运用Л.А.Черкас和Л.И.Жилевыч的极限环唯一性定理，则可构建多种参数条件下极限环的唯一性。

参考文献：

[1] 马知恩. 一类三次系统极限环的存在唯一性[J]. 数学年刊，1986，7A(1)：1-6.
Ma Zhi′en. Existence and Uniqueness of Limit Cycles for A Cubic System[J]. Chinese Annals of Mathematics，1986，7A(1)：1-6.

[2] Qiu Ya . Limit Cycles of Cubic Liénard Equation(Ⅱ)[J]. Annals of Differential Equations，1994，10(3)：307-337.

[3] 王 现. 关于系统$\dot{x}=\Phi(y)-F(x)$，$\dot{y}=-g(x)$的极限环之惟一性[J]. 南京大学学报，1990，26(3)：363-372.
Wang Xian. The Uniqueness of Limit Cycles for System $\dot{x}=\Phi(y)-F(x)$，$\dot{y}=-g(x)$[J]. Journal of Nanjing University，1990，26(3)：363-372.

[4] 金铁英. 一类三次系统极限环的存在,不存在及惟一性[J]. 锦州师范学院学报，1999，20(4)：1-6.
Jin Tieying. The Existence，Nonexistence and Uniqueness of Limit Cycles for A Cubic System[J]. Journal of Jinzhou Teachers College，1999，20(4)：1-6.

[5] 杨宇俊,张剑峰. 一类三次系统的极限环与分支问题[J]. 高校应用数学学报A辑，2006，21(4)：405-412.
Yang Yujun，Zhang Jianfeng. Limit Cycle of a Kind of Cubic System and the Problem of Bifurcation[J]. Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. A，2006，21(4)：405-412.

[6] 张芷芬，丁同仁，黄文灶，等. 微分方程定性理论[M]. 北京：科学出版社，1985.
Zhang Zhifen，Ding Tongren，Huang Wenzao，et al. Qualitative Theory of Differential Equation[M]. Beijing：Science Press，1985.

[7] 刘兴国,吕 勇. 一类平面微分系统的定性分析[J]. 湖南工业大学学报，2008，22(4)：17-21.
Liu Xingguo，Lv Yong. Qualitative Analysis for A Class of Planar Differential Systems[J]. Journal of Hunan University of Technology，2008，22(4)：17-21.

[8] 张志文,刘兴国. 一类非多项式微分系统中心焦点的判定[J]. 湖南工业大学学报，2009，23(5)：10-13.
Zhang Zhiwen，Liu Xingguo. Determination of Centre Focus for A Class of Non-Polynomial Differential System[J]. Journal of Hunan University of Technology，2009，23(5)：10-13.

（责任编辑：李玉珍）