第24卷 第1期　　湖 南 工 业 大 学 学 报　　Vol.24 No.1
2010年1月　　Journal of Hunan University of Technology　　Jan. 2010

n 元函数 Taylor 公式的中间点的极限

王仙云

（吉首大学 数学与计算机科学学院，湖南 吉首 416000）

摘　要：在已有的一元函数的Taylor公式及其中间点的极限公式研究结果的基础上，推广出n元函数的Taylor公式及其中间点的极限公式，并求出了其中间点的极限值，推广了前人的相关结果。

关键词：n 元函数；泰勒公式；中间点；极限

中图分类号：O172.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2010)01-0010-02

The Limit of the Intermediate Point of Taylor Formula Involving *N*-Ary Functions

Wang Xianyun

（College of Mathematics and Computing Science，Jishou University，Jishou Hunan 416000，China）

Abstract：Based on the findings on Taylor formula of 1-ary function and the limit of its intermediate point, promots the corresponding results on the *n*-ary functions and finds the limit of its intermediate point, which generalizes the previous related results.

Keywords：*n*-ary functions; Taylor formula; intermediate point; limit

近年来，一些科研工作者对Taylor公式及Taylor公式的“中间点”的极限进行了研究，并得出了一些有用的结论[1-4]。但这些结论都是建立在一元函数的基础上，并且只肯定了“中间点”的存在性，并没有给出其具体位置和确定其位置的方法。故笔者在文献[1-5]的基础上，继续这方面的研究工作，将一元函数的相关结果推广到n元函数，并求出了其中间点的极限值，推广了前人的研究结果。

1　相关引理

Taylor公式是数学分析中一个非常重要的公式，有着非常广泛的应用。近年来，关于中值定理“中间点”的渐近性研究一直是人们感兴趣的课题之一[2-5]。但是研究者们仅考虑了一元函数的情形，本文将对经典的Taylor公式推广到多元函数的情形进行探讨，并考虑中值定理的中间点的极限问题。为得出本文的研究结论，首先需要明了相关背景知识，即类似于一元函数的Taylor展开式，根据参考文献[5]，有引理1。

引理1　设D是R^n中的一个开集，$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$h=(h_1,h_2,\cdots,h_n)$，且$[a,a+h]\subset D$。若f在点a的邻域内有$m+1$阶连续偏导数，则有式（1）成立，式中$0<\theta<1$。

$$f(a_1+h_1,a_2+h_2,\cdots,a_n+h_n)=f(a_1,a_2,\cdots,a_n)-\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{i!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^i f(a_1,a_2,\cdots,a_n)+\frac{1}{m!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m\cdot f(a_1-\theta h_1,a_2+\theta h_2,\cdots,a_n-\theta h_n)。\quad（1）$$

2　主要结论

定理1　令$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in R^n$，$h=(h_1,h_2,\cdots,h_n)\in R^n$，$h_0=\max\limits_{1\le i\le n}h_i$。令$U$为点$a$的邻域，

收稿日期：2009-08-20

通信作者：王仙云（1976-），女，湖南桑植人，吉首大学讲师，主要从事计算数学方面的教学与研究，
E-mail：litterequation@163.com

且满足$a+h\in U$。若$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在邻域U内有$m+1$阶连续的偏导数，且

$$\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{m+1}f(a_1,a_2,\cdots,a_n)\neq 0,$$

则式（1）中的θ满足：$\lim\limits_{h_0\to 0}\theta=\dfrac{1}{m+1}$。

证明　由引理1可知，式（1）成立。又由多元函数的中值定理知，存在$0<\theta'<1$，使得下式成立：

$$\begin{aligned}&\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m f(a_1+\theta h_1,a_2+\theta h_2,\cdots,\\&a_n+\theta h_n)=\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m\cdot\\&f(a_1,a_2,\cdots,a_n)+\left(\theta h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\theta h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+\theta h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\cdot\\&\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m\cdot\\&f(a_1+\theta'\theta h_1,a_2+\theta'\theta h_2,\cdots,a_n+\theta'\theta h_n)=\\&\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m f(a_1,a_2,\cdots,a_n)+\\&\theta\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{m+1}\cdot\\&f(a_1+\theta'\theta h_1,a_2+\theta'\theta h_2,\cdots,a_n+\theta'\theta h_n)\end{aligned}$$

结合式（1），有：

$$\begin{aligned}&f(a_1+h_1,a_2+h_2,\cdots,a_n+h_n)=f(a_1,a_2,\cdots,a_n)+\\&\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^i f(a_1,a_2,\cdots,a_n)+\\&\frac{1}{m!}\theta\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{m+1}\cdot\\&f(a_1+\theta'\theta h_1,a_2+\theta'\theta h_2,\cdots,a_n+\theta'\theta h_n)。\end{aligned}\tag{2}$$

同时，存在$0<\theta''<1$，使得下式成立：

$$\begin{aligned}&f(a_1+h_1,a_2+h_2,\cdots,a_n+h_n)=f(a_1,a_2,\cdots,a_n)+\\&\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^i f(a_1,a_2,\cdots,a_n)+\\&\frac{1}{(m+1)!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{m+1}\cdot\\&f(a_1+\theta''h_1,a_2+\theta''h_2,\cdots,a_n+\theta''h_n)。\end{aligned}\tag{3}$$

由式（2）、（3）可得：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{m!}\theta\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{m+1}\cdot\\&f(a_1+\theta'\theta h_1,a_2+\theta'\theta h_2,\cdots,a_n+\theta'\theta h_n)=\\&\frac{1}{(m+1)!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{m+1}\cdot\\&f(a_1+\theta''h_1,a_2+\theta''h_2,\cdots,a_n+\theta''h_n)。\end{aligned}$$

化简可得：

$$\begin{aligned}&\theta\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{m+1}\cdot\\&f(a_1+\theta'\theta h_1,a_2+\theta'\theta h_2,\cdots,a_n+\theta'\theta h_n)=\\&\frac{1}{m+1}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{m+1}\cdot\\&f(a_1+\theta''h_1,a_2+\theta''h_2,\cdots,a_n+\theta''h_n)。\end{aligned}$$

令$h_0\to 0$，则

$$\begin{aligned}&\lim_{h_0\to 0}\theta\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{m+1}f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\\&\frac{1}{m+1}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{m+1}f(a_1,a_2,\cdots,a_n)。\end{aligned}$$

由于

$$\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{m+1}f(a_1,a_2,\cdots,a_n)\neq 0,$$

故有$\lim\limits_{h_0\to 0}\theta=\dfrac{1}{m+1}$。证毕。

特别地，当$m=1$时，由引理1和定理1可得n元函数的中值定理，以及中间点的极限值。

推论1　设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在点$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$的邻域N内有2阶连续的偏导数，且有

$(a_1+h_1,a_2+h_2,\cdots,a_n+h_n)\in N$，

则存在$0<\theta<1$，使得：

$$\begin{aligned}&f(a_1+h_1,a_2+h_2,\cdots,a_n+h_n)-f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\\&\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\cdot\\&f(a_1+\theta h_1,a_2+\theta h_2,\cdots,a_n+\theta h_n)。\end{aligned}\tag{4}$$

推论2　设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在点$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$的邻域U内有2阶连续的偏导数，且

$$\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 f(a_1,a_2,\cdots,a_n)\neq 0,$$

则对式（4）中的θ有：$\lim\limits_{h_0\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$。

当$n=1$时，由定理1和2，可得下面的拉格朗日定理。

推论3　设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)可导，则存在一点$\xi\in(a,b)$使得

$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$。

（下转第46页）