第24卷第1期 湖南工业大学学报 Vol.24 No.1
2010年1月 Journal of Hunan University of Technology Jan. 2010

关于商映射与商空间的性质

郭瑞芝

（湖南师范大学 数学与计算机科学学院，湖南 长沙 410081）

摘 要：研究了商映射与商空间的性质和应用，证明了连通性（包括道路连通性、局部连通性和局部道路连通性）、紧致性、可数紧、序列紧、可分性、Lindelöf性是可商的，并给出了正反两方面的实例。

关键词：商映射；商空间；拓扑性质

中图分类号：O18 **文献标志码**：A **文章编号**：1673-9833(2010)01-0005-05

On Properties of Quotient Map and Quotient Space

Guo Ruizhi

（College of Mathematics and Computer Science，Hunan Normal University， Changsha 410081，China）

Abstract：Properties of quotient map and quotient space and their applications are studied systematically. The quotientability of connectedness (including path connectedness, local connectedness and local path connectedness), compactness, countable compactness, sequential compactness, separability and Lindelöf are proved. And the examples both positive and negative are given.

Keywords：quotient map；quotient space；topological properties

商映射是从1个拓扑空间到另1个拓扑空间（商空间）的连续满射，所以它比一般连续映射要强，但比连续开或闭满射又要弱。构作商空间是建立新的拓扑空间的重要方法，具有重要的应用价值。在拓扑学中一般拓扑空间和连续映射等概念的引入都可以以数学分析课程中的相关内容作为背景，使学习者比较容易接受。但商空间和商映射没有分析基础，这样使学习者难以理解。另外，各种拓扑空间和拓扑性质都可以与商映射和商空间联系起来进行研究探讨。本文从正反两方面系统研究了商映射与商空间的性质和应用，给出了连通性、可数性、分离性以及紧致性与商映射、商空间的关系。

1 概念

商拓扑、商空间的概念虽然没有分析学中的知识作为背景，但可以从更直观的几何学来考虑。几何学中通常采用“截割”和“粘合”技术构造曲面的几何体，这就包含了商拓扑的概念。

定义1[1] 设$(X,\Im)$是1个拓扑空间，Y是1个集合，$f:X\to Y$是1个满射，则Y上的子集族是$\Im_r=\{V\subset Y\mid f^{-1}(V)\in\Im\}$上的1个拓扑，称$\Im_r$是$Y$上的商拓扑，$(Y,\Im_r)$称为商空间。

对于定义1，首先必须指出商拓扑$\Im_r$是由原空间拓扑和满射f完全决定，而且商拓扑$\Im_r$是使得满射f连续的最大的拓扑。

定义2[1] 设X和Y是2个拓扑空间，$f:X\to Y$是满射，如果Y上所带的拓扑就是由X上的拓扑和满射f决定的商拓扑，则称f为商映射。

从定义2可以看出要验证1个连续满射$f:X\to Y$是商映射，只要验证“设V是Y的子集，若$f^{-1}(V)$是X的开集，就有V是Y的开集”即可。

在定义2中必须注意靶集本身带有拓扑，只有当

收稿日期：2009-08-06
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10971060），湖南省自然科学基金资助项目（07JJ6008）
通信作者：郭瑞芝（1962-），女，湖南湘潭人，湖南师范大学教授，博士，主要从事拓扑学研究，E-mail: guorz6279@sohu.com

靶集上本身所带的拓扑与靶集上由源空间的拓扑和满射f所诱导的商拓扑是一致时，f才是商映射。因此有的作者按下列形式定义商映射。

定义 3[2] 设X和Y都是拓扑空间，$f:X\to Y$是满射，如果Y的子集V是Y的开集，当且仅当$f^{-1}(V)$是X的开集，则称f是商映射。

从定义 3 可知商映射是一个比连续映射更强的概念。另外，由于开集和闭集的互余性和原象运算f^{-1}保持集合的补，定义 3 中的开集可以换成闭集。为介绍定义 3 的等价说法，引进“饱和集”的概念。

定义 4[2] 设f是从集合X到集合Y的满射，C是集合X的子集。若$C=f^{-1}\left(f\left(C\right)\right)$，则称$C$在映射$f$下是饱和集。

定理 1 设X和Y是拓扑空间，$f:X\to Y$是满射，则f是商映射，当且仅当f连续且f将X中的饱和开（或闭）集映射到Y的开（或闭）集。

证明 若f是商映射，设C是X的饱和开集，由定义知$C=f^{-1}\left(f\left(C\right)\right)$，$f(C)$是$Y$的子集，由定义知，$f(C)$是$Y$的开集。反之，设$V$是$Y$的子集，且$f^{-1}(V)$是$X$的开集。因为$f$是满射，则$f^{-1}(V)$是$X$的饱和开集，由假设知$f\left(f^{-1}\left(V\right)\right)=V$是$Y$的开集，又$f$是连续的，由定义 1 或定义 3 知$f$是商映射。

由已有的拓扑空间构造新的拓扑空间常常会用到商拓扑的特殊情形，首先需要用到分解的概念。

定义 5 设X是 1 个集合，X^*是X的两两不交的子集构成的集族，且$\bigcup\limits_{A\in X^*}A=X$，则称$X^*$是$X$的 1 个分解。

不难看出，给出X的 1 个“分解”和给出X上的 1 个“等价关系”是等价的，X^*的每一个元素就是 1 个等价类。在X^*上赋予由自然投射p诱导的商拓扑，空间X^*就称为X的 1 个商空间，这时p是 1 个商映射。

商空间就是将X中每一个等价类粘合成 1 个点所得的拓扑空间。因此，商空间也叫做粘合空间，商映射也叫做粘合映射。例如R^2在中子空间$X=[0,1]\times[0,1]$上定义 1 个等价关系使得：

$$\begin{aligned}X^*=&\{\{x\times 0,x\times 1\}\mid 0<x<1\}\cup\\&\{\{0\times y,1\times y\}\mid 0<y<1\}\cup\{\{0\times 0,0\times 1,1\times 0,1\times 1\}\}\cup\\&\left\{\{x\times y\}\mid 0<x<1,0<y<1\right\},\end{aligned}$$

这时商空间X^*就是环面的一种数字表达。在日常应用中常常将拓扑空间X中的某 1 个子集A粘成 1 个点来构造新的拓扑空间。如将$[0,1]$上子集$\{0,1\}$粘成 1 个点就得到圆周S^1。

2 商映射和商空间的性质

在引进了上述概念后自然就要讨论商映射和商空间的性质。从命题 1 和商映射能将源空间的饱和开（或闭）集映射为开（或闭）集，就能联想到商映射与开（或闭）映射的关系，对此有：

定理 2[2] 设X，Y是拓扑空间，$f:X\to Y$是连续满的开或闭映射，则f是商映射。

定理 2 指出了一类重要的商映射，那是否每一个商映射都一定是开映射或闭映射呢？回答是否定的。定理 2 只是给出了 1 个连续满射是商映射的充分而不必要的条件，1 个商映射可以既不是开映射也不是闭映射。

例 1 设$\pi_1:R\times R\to R$定义为$\pi_1\left(x,y\right)=x$。令$A=\{(x,y)\mid x\geq 0$ 或$y=0\}$，$p=\pi_1|_A$，则p是商映射，但p既不是开映射也不是闭映射。

证明 1）p是商映射。

显然p是满射，又因为投射π_1是连续的且连续映射的限制映射是连续的，所以p是连续满射。设V是R中的子集，且$p^{-1}(V)$是空间A的开集，要证V是R中的开集。为此设x是V中任意一点，因为$x\times 0$是$p^{-1}(V)$中的点，所以存在实数a，b，c，d使

$x\times 0\in\left(\left(a,b\right)\times\left(c,d\right)\right)\cap A\subset p$，于是，

$x\in\left(a,b\right)=p\left(\left(a,b\right)\times\left(c,d\right)\cap A\right)\subset V$，

因此V是R的开集，故p是商映射。

2）p不是开映射。

因为$[0,1)\times(1,2)=\left((-1,1)\times(1,2)\right)\cap A$是$A$中开集，而$p\left([0,1)\times(1,2)\right)=[0,1)$不是$R$的开集，这说明$p$不是开映射。

3）p不是闭映射。

集合$B_1=\{x\times y\mid xy=1\}$是$R\times R$的闭子集，于是

$B=B_1\cap A=\{x\times y\mid xy=1\ \text{且}\ x>0\}$

是A的闭子集，但$p(B)=(0,+\infty)$不是R中的闭子集，因此，p不是闭映射。

从商映射的定义，定理 2 及反例可看到商映射和开（或闭）映射没有必然的蕴含关系，连续满的开（或闭）映射是商映射，但商映射仅是一个比连续满射强的概念，它可能是开映射，也可能是闭映射，更可能是既不开也不闭的连续满射。

由于从紧致空间到 Hausdorff 空间的连续映射是闭映射，所以有如下推论。

推论 1 设X是紧致空间，Y是 Hausdorff 空间，$f:X\to Y$连续满射，则f是商映射。

以下性质在文献[1-2]中均可找到证明。

定理 3[2] 2 个商映射的复合映射仍是商映射。

定理 4[1] 设$p:X\to Y$是商映射，$f:X\to Y$是连续满射，则f是商映射当且仅当$f\circ p$是商映射。

定理 5[3] 设$p:X\to Y$是商映射，Z是 1 个拓扑空间，$g:X\to Z$是映射满足：$\forall y\in Y, g\left(p^{-1}\left(\{y\}\right)\right)$是$Z$的单点集，则$g$诱导 1 个映射$f:X\to Y$满足$f\circ p=g$，且$f$连续当且仅当$g$连续；$f$是商映射当且仅当$g$是商映射。

推论 2　设$g:X\to Z$是连续满射。令$X^{*}=\{g^{-1}(\{z\})\mid z\in Z\}$，在$X^{*}$上赋予商拓扑。

1）g诱导1个双射$f:X^{*}\to Z$，且f是同胚当且仅当g是商映射；

2）若Z是Hausdorff的，则X^{*}是Hausdorff的。

定理4及推论2给出了1个较好的构造新的商映射和商空间的办法。

例 2　将R^n空间中n维球体

$$B^n=\{x_1\times\cdots\times x_n\mid x_1^2+\cdots+x_n^2\le 1\}$$

的边界S^{n-1}（n-1维球面）粘合成一点所得的商空间与S^n（n维球面）是同胚的。

证明　首先将B^n参数化，即将B^n上的点用参数组$(r,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})$表示。这组参数与直角坐标的关系为

$$\begin{cases}x_1=r\cos\theta_1\cdots\cos\theta_{n-1},\\ x_2=r\cos\theta_1\cdots\cos\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1},\\ x_3=r\cos\theta_1\cdots\cos\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2},\\ \vdots\\ x_n=r\sin\theta_1,\end{cases}$$

其中$0\le\theta_i\le 2\pi, i=1,2,\cdots,n-2, -\dfrac{\pi}{2}\le\theta_{n-1}\le\dfrac{\pi}{2}$，$0\le r\le 1$，$B^n$的边界$\partial B^n=S^{n-1}$对应的参数满足$r=1$，作

$$f:B^n\to S^n$$
$$(r,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})\mapsto$$
$$(\cos\theta_1\cdots\cos\theta_{n-1}\sin(\pi r),$$
$$\cos\theta_1\cdots\cos\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}\sin(\pi r),$$
$$\cos\theta_1\cdots\cos\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2}\sin(\pi r),\cdots$$
$$\cos\theta_1\sin\theta_1\sin(\pi r),\sin\theta_1\sin(\pi r),\cos(\pi r)),$$

显然f是连续的且为满射，且

$$f(S^{n-1})=f(1,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})=(0,\cdots,0,-1),$$

其余的点之间是一对一的，于是$X^{*}=B^n/S^{n-1}$，又因为B^n是紧致空间，S^n是Hausdorff空间，所以f是商映射，由推论$X^{*}=B^n/S^{n-1}$知同胚于S^n。

在讨论一般连续映射时除作2个映射的复合外，通常还要考虑1个映射的限制和2个映射的卡氏积，那么商映射的限制映射是否仍为商映射，2个映射的卡氏积是否仍为商映射呢。答案为不一定，下面举反例说明。

例 3[4]　设在实数集$\mathbf{R}$上赋予K拓扑$\Im_k$，$\Im_k$是由基$\beta_k=\{(a,b)\mid a<b\}\cup\{(a,b)-K\mid a<b\}$生成的拓扑，记为$R_K$，其中$K=\left\{\dfrac{1}{n}\middle| n\in \mathbf{Z}_+\right\}$，令$Y=R_k/K$，$p:R_k\to Y$是商映射，则

1）Y是T_1的但不是Hausdorff的；

2）$p\times p:R_k\times R_k\to Y\times Y$不是商映射。

证明　1）任取$[y]\in Y=R_k/K$，因为

$$p^{-1}([y])=\begin{cases}K, & y\in K;\\ \{y\}, & y\subset R-K;\end{cases}$$

由于子集合K和每一个单点集$\{y\}$都是R_k的闭子集，即$p^{-1}([y])$是R_k的闭子集，由p是商映射知$\{[y]\}$是R_k/K的闭子集，故R_k/K是R_1的。取R_k/K中的2个不同点[0]、K，因为对于R_k/K中含点[0]的任何开集U，有$p^{-1}(U)$是R_k中含点0的开集，于是必存在足够大的自然数n使得$\dfrac{1}{n}\in p^{-1}(U)$，从而$p\left(\dfrac{1}{n}\right)=\left[\dfrac{1}{n}\right]=K\in U$，因此不可能存在$R_k/K$中分别含点[0]和$K$的开集$U_0$、$V_0$，使得$U_0\cap V_0=\Phi$，故$R_k/K$不是Hausdorff的；

2）因为$p\times p:R_k\times R_k\to R_k/K\times R_k/K$，

$$(p\times p)(x\times y)=[x]\times[y]、$$

由1）知R_k/K不是Hausdorff的，则$\Delta_Y=\{[y]\times[y]\mid[y]\in R_k/K\}$不可能是$R_k/K\times R_k/K$的闭子集（否则$R_k/K$不是Hausdorff空间，矛盾）。又

$$p^{-1}(\Delta_Y)=\{y\times y\mid y\in R_k\}\cup(K\times K),$$

由于R_k是Hausdorff的，所以$\{y\times y\mid y\subset R_k\}$是$R_k\times R_k$的闭子集。$K$也是$R_k$的闭子集，于是$K\times K$是$R_k\times R_k$的闭子集，从而$P^{-1}(\Delta_Y)$是$R_k\times R_k$的闭子集。因此$p\times p$不是商映射。虽然2个商映射的卡式积不必是商映射，但有：

定理 6　设$f:X\to Y$为商映射，K为局部紧致的Hausdorff空间，则$f\times id_k:X\times K\to Y\times K$是商映射。

证明　因为$f\times id$连续，所以只需证：对$Y\times K$的子集A，若$W=(f\times id_k)^{-1}(A)$是$X\times K$的开集，则A是$Y\times K$的开集即可。因为$f\times id_k$是满射，有$f\times id_k(W)=A$。任取A中的一点$y_0\times k_0$，取$x_0\in f^{-1}(\{y_0\})$，令$K_0=\{k\in K\mid x_0\times k\in W\}$，$\forall k_1\in K_0$，有$x_0\times k_1\in W$，这意味着$W$是$X\times K$中含点$x_0\times k_1$的开集，从而存在$X$中含有点$x_0$的开集$U$和$K$中含点$k_1$的开集$V$，使$K_0=\{k\in K\mid x_0\times k\in W\}$，$\forall k_1\in K_0$，于是$k_1\in V\subset K_0$。因此$K_0$是$K$的开集，且$(\{x_0\}\times K)\cap W=\{x_0\}\times K_0$，$k_0\in K_0$。又因为$K$是局部紧致的Hausdorff空间，则$K$是正则的。由文献[2]引理31.1知，存在点$k_0$的开邻域$V$使得$\overline{V}$是紧致的，且$\overline{V}\subset K_0$。令$U=\{x\in X\mid\{x\}\times\overline{V}\subset W\}$，则$x_0\in U$且$U\times\overline{V}\subset W$，故$y_0\times k_0\in(f\times id_k)(U\times V)\subset(f\times id_k)(W)=A$。

下面要证明$(f\times id_K)(U\times V)=f(U)\times V$是$Y\times K$的开集，显然只要证明$f(U)$是$Y$的开集。

由于f是商映射，只要证$f^{-1}(f(U))=U$且U是X的开集。

对于任意映射f均有$U\subset f^{-1}(f(U))$，又

$$f^{-1}\left(f(U)\right)\times\overline{V}=(f\times id_K)^{-1}\left(f(U)\times\overline{V}\right)=$$
$$(f\times id_K)^{-1}\cdot(f\times id_K)\left(U\times\overline{V}\right)\bigcup(f\times id_K)^{-1}\circ$$
$$(f\times id_K)(W)=\left(U\times\overline{V}\right)\bigcup W=W,$$

所以，由 U 的构造知 $f^{-1}\left(f(U)\right)\subset U$，故有 $f^{-1}\left(f(U)\right)=U$。

最后证明 U 是 X 的开集。设 $x\in U$ 且 $\{x\}\times\overline{V}\subset W$，任取 $k\in\overline{V}$，$x\times k$ 是 W 中的点。因为 W 是开集，则存在 U_k 是 X 的开集，V_k 是 K 中的开集，使得 $x\times k\in U_k\times V_k\subset W$，从而 K 中的开集族 $\left\{V_k\ k\in\overline{V}\right\}$ 是 $\overline{V}$ 的覆盖，由 $\overline{V}$ 的紧致知，存在有限个 V_1，…，V_n 使得 $\overline{V}\subset V_1\bigcup\cdots\bigcup V_n\subset W$。

令 $U_x=U_1\bigcap\cdots\bigcap U_n$，则 $x\in U_x$ 是 X 的开集且 $U_x\times\overline{V}\subset W$，因此 $U_x\subset U$，故 U 是 X 的开集。

文献[5]对定理5作了进一步的研究，引进了比商拓扑更强的“上诱导拓扑”概念，得到了如下定理。

定理7[5] 设 $\left\{X_j\right\}_{j\in J}$ 为一族拓扑空间，Y 为拓扑空间，Z 为局部紧的Hausdorff空间，且映射族 $\{f_j:X_j\to Y\}_{j\in J}$ 满足 $\bigcup_{j\in J}\mathrm{Im}\,f_j=Y$，若 Y 上的拓扑由 $\{f_j\}_{j\in J}$ 上诱导，则 $Y\times Z$ 上拓扑亦由 $\{f_j\times id:X_j\times Z\to Y\times Z\}_{j\in J}$ 上诱导。

对于商映射的限制映射有：商映射的限制映射不一定是商映射，但商映射限制在饱和开集（或闭集）上仍然是商映射。

定理8 设 $p:X\to Y$ 是商映射，A 与 X 相对于映射 p 是饱和的，令 $q:A\to p(A)$ 是 p 在 A 上的限制，则

1）当 A 是 X 的开集（或闭集）时，q 是商映射；

2）当 p 是 X 的开（或闭）映射时，q 是商映射。

证明 1）$\forall V\subset p(A)$，$q^{-1}(V)=p^{-1}(V)$；

$\forall U\subset X$，$p(U\bigcap A)=p(U)\bigcap p(A)$。

对于第一个等式，因为 $V\subset p(A)$，A 是饱和集，所以 $p^{-1}(V)\subset A$，于是 $q^{-1}(V)=p^{-1}(V)\bigcap A=p^{-1}(V)$。

对于第二个等式，因为若 U，A 是 X 的任意2个子集均有 $p(U\bigcap A)\subset p(U)\bigcap p(A)$，又任取 $y\subset p(U)\bigcap p(A)$，存在 $u\in U$，$a\in A$ 使 $p(u)=y=p(a)$，于是 $u\in p^{-1}\left(\{p(a)\}\right)$，又由于 A 是饱和集，$A\supset p^{-1}\left(\{p(a)\}\right)$，所以 $u\subset A\bigcap U$，故 $y\subset p(U\bigcap A)$，因此 $p(U)\bigcap p(A)\subset p(U\bigcap A)$，即第二个等式成立。

2）若 A 是 X 的开集或 p 是开映射，则 q 是商映射。

显然 $q=p\,|\,A:A\to p(A)$ 是连续的，因此只需证：若 $V\subset p(A)$ 且 $q^{-1}(V)$ 是 A 的开子集，则 V 是 $p(A)$ 的开子集。

① 当 A 是 X 的开集时，由 $q^{-1}(V)$ 是 A 的开集可得 $q^{-1}(V)$ 是 X 的开子集，由1）有 $p^{-1}(V)=q^{-1}(V)$，于是 $p^{-1}(V)$ 是 X 的开集，又 p 是商映射，故 V 是 Y 的开集，又 $V=V\bigcap p(A)$，从而 V 是 $p(A)$ 的开集。因此 q 是商映射。

② 当 p 是开映射时，因为 $q^{-1}(V)=p^{-1}(V)$，$q^{-1}(V)$ 是 A 中的开集，故存在 U 是 X 的开子集，使 $p^{-1}(V)=U\bigcap A$，由 p 是满射，得 $p\left(p^{-1}(V)\right)=V$，于是 $V=p\left(p^{-1}(V)\right)=p\left(U\bigcap A\right)=p(U)\bigcap p(A)$，而 $p(U)$ 是 Y 中的开集，故 V 是 $p(A)$ 中的开集，因此 q 是商映射。

3）若 A 是 X 的闭集或 p 是闭映射，则 q 是商映射。将2）证明中的“开”集换成“闭”集即可。

定理6说明，商空间的子空间不一定是商空间。

3 拓扑性质的可商性

若一个拓扑性质在商映射下不变，则称该拓扑性质是可商的，或者说一个拓扑空间具有某种性质。若该拓扑空间的商空间仍然具有这种性质,则称这种性质是可商的。

因为拓扑性质在同胚映射下不变的性质，所以它是拓扑学研究的重要内容之一，是点集拓扑学的研究内容，所以研究拓扑性质的可商性是非常必要且非常有意义的，在拓扑学中一般介绍的拓扑性质有：连通性，可数性，分离性和紧致性。

3.1 连续性的可商性

通常情况下，连通性包括一般连通性、道路连通性、局部连通性和局部道路连通性。由于连通性，道路连通性都是连续映射下不变的，而商映射是连续的，故连通性和道路连通性均是可商的。而局部连通性和局部道路连通性在连续开映射下一定是不变的。又商映射不一定是开映射，那么局部连通性和局部道路连通性是否可商不能直接作结论。下面的定理说明局部连通性和局部道路连通性均是可商的。

定理9 设 $p:X\to Y$ 是商映射，若 X 是局部连通的或局部道路连通的，则 Y 是局部连通的或局部道路连通的。

证明 由文献[2]定理25.3知：拓扑空间 Y 是局部连通的当且仅当对 Y 中的任意开集 U，U 的每一个连通分支 Y 是中的开集。假定 U 是 Y 中的开集，C 是 U 的一个连通分支，要证 C 是 Y 的开集。由于 p 是商映射，只要证 $p^{-1}(C)$ 是 X 的开集。为此任取 $p^{-1}(C)$ 中的一点 x，因为 $p^{-1}(C)\subset p^{-1}(U)$，$p^{-1}(U)$ 是 X 的开集，由于 X 是局部连通的，则 $p^{-1}(U)$ 中含点 x 的连通分支 C_x 是 X 的开集。由 p 连续知 $p(C_x)$ 是 Y 的连通子集且 $p(x)\in p(C_x)\bigcap C$，而 C 是含点 $p(x)$ 的连通分支，则 $p(C_x)\subset C$，于是 $C_x\subset p^{-1}(C)$，故 $p^{-1}(C)$ 是 X 的开集。

对于局部道路连通性是可商性质的证明，只要利

用文献[2]中定理 25.4，按上面类似证明即可。

3.2　可数性的可商性

与可数性有关的拓扑空间有第一、第二可数空间、可分空间和 Lindelöf 空间。第一、第二可数空间在连续开映射下的像仍然是第一、第二可数空间；可分空间和 Lindelöf 空间的连续像仍然是可分的、Lindelöf 的。因此可分性和 Lindelöf 性是可商的，但第一、第二可数性是否可商就不明了。下面的例子说明第一、第二可数性是不可商的。

例 4　设 $X=R$，赋予标准拓扑，则 X 既是第一可数的也是第二可数的。设 $\mathbf{Z}$ 是全体整数集，$Y=X/\mathbf{Z}$，赋予商拓扑，则 Y 不是第一可数的，因为 Y 中的点 Z 处没有可数局部基，从而 Y 更不是第二可数的。

3.3　分离性的可商性

与分离性有关的拓扑空间通常是指 T_0、T_1 空间，Hausdorff 空间，正则空间和正规空间[2]，所有这些分离性都不是可商的。例 3 中 1）说明不是可商的，但该例中 R_k 的不是正则的。下面再举例说明正则性也不是可商的。

例 5　设 X 是正则空间但不是正规的，由于 X 不是正规的，则一定存在 X 的 2 个不相交的非空闭子集 A、B 使得 A、B 不能用开集分开。令 $Y=X/A$，则商空间 X/A 中的点的形式为 A 和 $\{x\}$，$x\in X-A$。$p:X\to X/A$ 是自然投射，因为 $p^{-1}(\{A\})=A$ 中是 X 中的闭集，故 $\{A\}$ 是 X/A 中的闭集。又 $p^{-1}\left(\{\{x\}\mid x\in B\}\right)$ 是 X 中的闭集，所以集 $\{\{x\}\mid x\in B\}$ 是 X/A 中的闭集，若存在 X/A 中的开集 U、V 使 $\{A\}\subset U,\{\{x\}x\in B\}\subset V$ 且 $U\cap V=\Phi$，则 $p^{-1}(U)\supset A,p^{-1}(V)\supset B$ 且 $p^{-1}(U),p^{-1}(V)$ 是 X 中开集，$p^{-1}(U)\cap p^{-1}(V)=\Phi$，这与假设 A，B 不能用开集分开矛盾。因此 X/A 不是正则的。

3.4　紧致性的可商性

紧致性、可数紧致性和序列紧致性都是在连续映射下是不变的，因此紧致性、可数紧致性和序列紧致性均是可商的。但局部紧致性、极限点紧致性不是可商的，下面举例说明。

例 6　设 $X=R$ 带有通常拓扑，则 X 是局部紧致的，$\mathbf{Z}$ 是整数集，X/A 是商空间。$p:X\to X/\mathbf{Z}$ 是自然投射。设 U 是商空间 X/A 中包含点 Z 的 1 个开邻域的集合，则 $p^{-1}(U)$ 是 X 的子集且存在 X 中开集 V 使得 $\mathbf{Z}\subset V\subset p^{-1}(U)$。由于 X 上的拓扑为通常拓扑，则 $\forall n\in\mathbf{Z}_-,p^{-1}(U)\cap(n,n-1)\neq\Phi$，取 $x_n\in p^{-1}(U)\cap(n,n+1)$，记 $U_n=p^{-1}(U)\cap\left(\dfrac{n+x_n}{2},\dfrac{n+1+x_n}{2}\right)$，则 $p(p^{-1}(U)-\{x_n\mid n\in\mathbf{Z}_+\})\cup\{p(U_n)\mid n\in\mathbf{Z}\_\}$ 是空间 Y 中的集合 U 的 1 个开覆盖，显然它没有有限子覆盖，因此商空间 X/A 不是局部紧致的。

例 7　设 $X=\mathbf{Z}_+$ 带有以 $\beta=\{\{2n-1,2n\}\mid n\in\mathbf{Z}_+\}$ 为拓扑基生成的拓扑；$Y=\mathbf{Z}_+$ 带有离散拓扑，则 X 是列紧的。事实上，设 A 是 X 的任何一个无限子集，则 $\min A$ 存在，当 $\min A$ 为奇数时，令 $\alpha=\min A+1$；当 $\min A$ 为偶数时，令 $\alpha=\min A-1$，可以验证 $\alpha\in d(A)$。但 Y 不是列紧的。作 $p:X\to Y,p(2n-1)=n,p(2n)=n$，则 $\forall n\in Y$，$p^{-1}(\{n\})=\{2n,2n-1\}$，这说明 p 是连续的且为满射。又 $p(\{2n-1,2n\})=\{n\}$ 是 Y 的开集，则 p 是开映射，于是 p 是商映射，说明列紧空间的商空间不一定是列紧的。

文献[5−7] 给出了关于商映射和商空间的一些结论，这方面还有一些值得考虑的地方：如分离性的不可商性，文中只给出了 Hausdorff 性和正则性的不可商性的例子。考虑举出其它分离性不可商的例子，在何种条件下，它们就可以是可商的；又如商映射的卡氏积不一定是商映射，文中给出了一个结论，是否还有其它这方面的结论，等等。

参考文献：

[1] 熊金城. 点集拓扑讲义[M]. 北京：高等教育出版社，1981.
Xiong Jincheng. Lecture Notes on Topology[M]. Beijing: High Education Press，1981.

[2] Munkres J M. Topology[M]. Beijing: China Machine Press，2004.

[3] 汪　林，杨富春. 拓扑空间中的反例[M]. 北京：科学出版社，2000.
Wang Lin, Yang Fuchun. Counterexamples in Topological Spaces[M]. Beijing: Science Press，2000.

[4] Arthur Steen L A， Arthur Seebach Jr J. Counterexamples in Topology[M]. New York：Springer-Verlag，1978.

[5] 张　平，沈文淮. 关于商映射的一个定理的推广[J]. 海南师范大学学报：自然科学版，2003，21(4)：297−299.
Zhang Ping, Shen Wenhuai. On A Generalization of A Thereom on Quotient Maps[J]. J. Hainan Normal University: Natural Sciences, 2003，21(4)：297−299.

[6] 关　鹏，孙　君. 商空间映射的连续性及同胚性[J]. 长春大学学报，2007，17(1)：5−7.
Guan Peng, Sun Jun. The Continuity and Homeomorphism of Maps between Quotient Spaces[J]. J. Changchun University，2007，17(1)：5−7.

[7] 张纪平，胡彩霞. 商映射和商空间[J]. 广西民族学院学报：自然科学版，2004，10(3)： 44−46.
Zhang Jiping, Hu Caixia. Quotient Maps and Quotient Spaces [J]. J. Guangxi Nationality College: Natural Sciences, 2004，10(3)：44−46.

（责任编辑：罗立宇）