耦合玻色–爱因斯坦凝聚系统中的混沌动力学

李 飞，陈 纯

（湖南科技大学 物理系，湖南 湘潭 411201）

摘 要：研究了处在双势阱中的耦合玻色–爱因斯坦凝聚系统的混沌动力学特性。通过理论分析，探讨了原子数差的Melnikov混沌振荡。当系统处于非混沌区域时，数值计算表明，随着调制频率的减小，系统由多周期状态进入混沌状态；系统在某些时段出现混沌宏观量子自囚禁。

关键词：玻色–爱因斯坦凝聚（BEC）；Gross-Pitaevskii方程（GPE）；Melnikov混沌判据；混沌

中图分类号：O431.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673–9833(2009)05–0014–04

Chaotic Dynamics of Coupled Bose-Einstein Condensates System

Li Fei，Chen Chun

（Department of Physics，Hunan University of Science and Technology，Xiangtan Hunan 411201，China）

Abstract: Studies the chaotic dynamics of coupled Bose-Einstein condensates system in a double-well potential. Investigates the Melnikov chaotic oscillation of the atomic number difference through theoretical analysis. When the system is within non-chaotic zone, numerical calculations reveal that it enters chaos state from multi-cycle state with the decrease of modulation frequency and in certain periods of time it appears chaotic macroscopic quantum self-confinement.

Keywords: Bose-Einstein condensates; Gross-Pitaevskii equation(GPE)；Melnikov chaotic criterion; chaos

0 引言

随着实验技术的发展，激光冷却与囚禁为玻色–爱因斯坦凝聚（BEC）的实验研究提供了有利条件。美国科罗拉多大学实验天体物理联合研究所（JILA）和国家标准技术研究所（NIST）的Wieman小组于1995年7月首先报道了在实验上观察到的^{87}Rb原子的玻色–爱因斯坦凝聚现象；同年8月，美国莱斯大学的Bradley小组报道了^{7}Li原子的玻色–爱因斯坦凝聚的观察结果；11月，麻省理工学院的Davis等人又报道了^{23}Na原子的玻色–爱因斯坦凝聚的实验结果[1]。

玻色–爱因斯坦凝聚形成后，可用薄片状的强激光场将其一分为二，在它们之间形成1个势垒，使2个BEC分别处于势垒两侧的势阱中，双势阱BEC模型是基本的物理模型，人们可以用它来研究BEC原子的量子隧穿和量子相干等特性。目前，双势阱BEC系统的动力学特性是物理界研究的热点课题，本文主要讨论双势阱耦合BEC系统的混沌动力学演化特性。

1 双势阱中的耦合BEC系统

在绝对零度附近，处在势阱$V_{tr}(r)$中且具有相互作用的BEC的波函数$\Psi(x,t)$满足平均场Gross-Pitaevskii方程（GPE）[1]：

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi+V_r\Psi+g|\Psi|^2\Psi, \qquad (1)$$

式中：m为原子质量；

$g=4\pi a_s\hbar^2/m$是描述凝聚体玻色子之间相互作用的非线性参数，a_s为原子的s波散射长度，$a_s>0$表示凝聚体粒子间相互排斥，反之则表示相互吸引。

收稿日期：2009-08-18

基金项目：湖南省教育厅科研基金资助项目（08C344），湖南科技大学博士科研启动基金资助项目（E50817）

作者简介：李 飞（1975-），男，湖南江华人，湖南科技大学教师，博士，主要从事非线性和混沌方面的教学与研究，
E-mail：wiself@163.com

选择式（1）的2模近似解形式如下[5-7]：

$$\Psi(x,t)=\psi_1(t)\phi_1(x)+\psi_2(t)\phi_2(x),\tag{2}$$

式中：$\psi_1(t)=\sqrt{N_1(t)}e^{i\theta_1(t)}$和$\psi_2(t)=\sqrt{N_2(t)}e^{i\theta_2(t)}$是只与时间有关的复振幅；

$N_1(t)=|\psi_1(t)|^2$和$N_2(t)=|\psi_2(t)|^2$分别为不同势阱中的粒子数；

$\theta_1(t)$和$\theta_2(t)$分别为势阱1和势阱2中BEC波函数的相位；

$\phi_1(x)$和$\phi_2(x)$分别为势阱1和势阱2中随空间变化的波函数。

将式（2）代入式（1）并对空间坐标积分，得到ψ_1和ψ_2满足的方程如下：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}=H(t)\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix},\tag{3}$$

式中：$H(t)$是系统的哈密顿量（Hamiltonian），且

$$H(t)=\begin{pmatrix}E_1+\alpha_1|\psi_1(t)|^2 & -K\\ -K & E_2+\alpha_2|\psi_2(t)|^2\end{pmatrix},\tag{4}$$

式中：α_1和α_2描述势阱1、2中的单个粒子在平均场近似下的自相互作用能，且$\alpha_i(t)=g\int \mathrm{d}r|\phi_i(x)|^4$；

K表征两凝聚体之间的原子隧穿行为，且

$$K=-\int \mathrm{d}r\left[\hbar^2(\nabla\phi_1\nabla\phi_2)/(2m)-\phi_1V_{tr}\phi_2\right]；$$

E_1和E_2分别为不同势阱中的零点能，且

$$E_i=\int \mathrm{d}r\left[\hbar^2|\nabla\phi_i(x)|^2/(2m)+|\phi_i(x)|^2V_{tr}\right]。$$

显然，总粒子数为$N=N_1+N_2$，研究中主要关心的是2个BEC之间粒子数差的变化，为此，引入2个新变量$z(t)=N_1(t)-N_2(t)/N$和$\Phi(t)=\theta_2(t)-\theta_1(t)$，

式中：$z(t)$表示双势阱中2个BEC之间粒子数之差占总粒子数的比值；

$\Phi(t)$表示耦合BEC之间的相对相位差。

于是得到如下2个微分方程：

$$\dot{z}=-2\sqrt{1-z^2}\sin\Phi-\eta z,\tag{5}$$

$$\dot{\Phi}=\Delta E+\Lambda z+\frac{2z}{\sqrt{1-z^2}}\cos\Phi,\tag{6}$$

式（6）中：$\Delta E=[E_1-E_2+(\alpha_1-\alpha_2)/2]/K$为势阱1和2的基态能量差与其相互作用能的比率；

$\Lambda=(\alpha_1+\alpha_2)/(2K)$表示势阱1和2的相互作用强度参量。

在式（5）、（6）中已把时间t化成了无量纲变量$Kt/\hbar$，$-\eta z$为阻尼。本文中考虑参数Λ为常数，而ΔE含时的情况。由以上分析，可得系统的哈密顿量为

$$H=\frac{\Lambda z^2}{2}+\Delta Ez-2\sqrt{1-z^2}\cos\Phi,$$

将$z(t)$对时间t二次微分，有：

$$\ddot{z}=-4z-\left(\frac{\Lambda}{2}z^2+\Delta Ez-H\right)(\Delta E+\Lambda z)-\eta\dot{z}。\tag{7}$$

2　系统的微扰解

实验时可通过移动激光位置、调节激光场的强度或施加含时外势项V_{tr}来调节双势阱，此时E_i是随时间周期变化的，ΔE可表示为$\Delta E=\Delta E_0+\Delta E_1\sin(\omega t)$，$\Delta E_0$表示直流部分的幅值，$\Delta E_1$为交流部分的幅值，二者均为小量。那么将$H$对时间$t$求导可得：

$$\dot{H}(t)=\frac{\partial H}{\partial z}\dot{z}+\frac{\partial H}{\partial \Phi}\dot{\Phi}+\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial t}=$$
$$\frac{z^2}{2}\frac{\partial \Lambda}{\partial t}+\frac{\partial \Delta E}{\partial t}z=z\omega\Delta E_1\cos(\omega t),\tag{8}$$

将式（8）对时间积分，有：

$$H(t)=H_0+H_1(t),\tag{9}$$

$$H_1(t)=\int z\omega\Delta E_1\cos(\omega t)\mathrm{d}t,\tag{10}$$

式（9）中：H_0为常数；$H_1(t)$与ΔE是同阶小量。

将式（8）~（10）代入式（7），得：

$$\ddot{z}-(\Lambda H_0-4)z+\frac{\Lambda^2}{2}z^3=$$
$$\Lambda H_1z-\frac{3\Delta E\Lambda}{2}z^2-\Delta E^2z+H\Delta E-\eta\dot{z},\tag{11}$$

直接求系统的解析解比较困难。笔者注意到，对于弱藕合情形，$\Delta E_{1,2}$的值非常小，可运用直接微扰法来分析。将式（11）的一般解展开至一阶，即：

$$z=z_0+z_1\ (|z_0|\gg|z_1|),\tag{12}$$

将式（12）代入式（11），可得：

$$\ddot{z}_0-(H_0\Lambda-4)z_0+\frac{1}{2}\Lambda^2z_0^3=0,\tag{13}$$

$$\ddot{z}_1-(H_0\Lambda-4)z_1+\frac{3}{2}\Lambda^2z_0^2z_1=\varepsilon_1,\tag{14}$$

式中：$\varepsilon_1=\Lambda H_1z_0-\frac{3}{2}\Lambda\Delta Ez_0^2+H_0\Delta E-\eta\dot{z}_0$。

根据前面的假设可知：$|z_1|\sim|\Delta E_{0,1}|\sim|\eta|\sim|H_1|$。当$H_0\Lambda-4>0$时，式（13）有同宿解

$z_0=\left(2\sqrt{H_0\Lambda-4}\,\mathrm{sech}\,\xi\right)/\Lambda$，式中$\xi=(t-t_0)\sqrt{H_0\Lambda-4}$，$t_0$是系统的初始时间。根据文献[2-8]，可得$\varepsilon_1=0$时式（14）的2个线性无关解：

$$f_1=\frac{\mathrm{d}z_0}{\mathrm{d}t}=-\frac{2}{\Lambda}(H_0\Lambda-4)\,\mathrm{sech}\,\xi\tanh\xi,\tag{15}$$

$$f_2=f_1\int(f_1)^{-2}\mathrm{d}t=\frac{\Lambda}{4\sqrt{(H_0\Lambda-4)^3}}\cdot$$
$$\mathrm{sech}\,\xi(2-3\xi\tanh\xi-\sinh^2\xi),\tag{16}$$

由于式（16）中含有双曲正弦函数，f_2将随着时间t成指数增长，所以f_2是无界的。利用式（15）和（16）可构造式（14）的通解如下[2-8]：

$$z_1=f_2\int_{C_1}^{t}f_1\varepsilon_1\mathrm{d}t-f_1\int_{C_2}^{t}f_2\varepsilon_1\mathrm{d}t,\tag{17}$$

这里 C_1、C_2 是由初始条件决定的2个任意常数，将变量 ε_1、式（15）、（16）代入式（17）并计算 $t\to\infty$ 时的极限，则发现 $\lim\limits_{t\to\pm\infty} z_1 \to \pm\infty$，这表明式（17）的通解是Lyapunov不稳定的。如果条件 $G_{\perp}=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{C_1}^{t} f\varepsilon_1 \mathrm{d}t=0$ 得到满足，则这种不稳定性能被控制，即式（17）的解是Lyapunov稳定的。研究证明当 $C_{+}-C_{-}=0$ 时能消去常数 C_1，于是得到系统的Melnikov函数[2-8]

$$M(t_0)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1\varepsilon_1 \mathrm{d}t=0。\tag{18}$$

众所周知，Melnikov函数正比于Poincare截面中稳定与非稳定流形之间的距离。如果Melnikov函数具有简单零点（Simple zeros），则稳定与非稳定流形将发生横截相交，此时BEC原子隧穿过程将出现混沌。

3 非微扰数值模拟

当BEC系统不满足微扰条件时，直接微扰法将不再适用于系统，此时可通过数值计算模拟BEC系统的动力学行为。为了不受暂态过程影响，笔者忽略了 $0<t<500$ s时间段的动力学过程。首先，通过设定参数 $\Delta E_0=1.0$，$\Delta E_1=1.0$，$A=30$，$\eta=0.001$，$\omega=19.9$，笔者画出了BEC系统在不同参数下的 $\left(z,\dot{z}\right)$ 平面相图（见图1）和相应的 z 随时间的演化曲线（见图2）。

从图1、2可看出，当 $\Delta E_0=1.0$，$\Delta E_1=1.0$，$A=30$，$\eta=0.001$，$\omega=19.9$ 时，相图和 z 的时间演化曲线都表明系统处于多周期状态，而且是处于宏观量子自囚禁状态（MQST）。

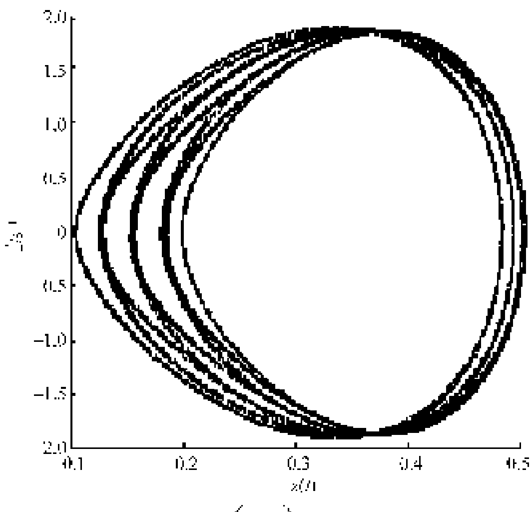

图1 系统 $\left(z,\dot{z}\right)$ 平面相图

Fig. 1 Phase diagram for system $\left(z,\dot{z}\right)$ plane

保持其它参数不变，当 $\omega=14.5$ 时，笔者发现双势阱BEC系统出现了典型的混沌吸引子，见图3；而对应的随时间的变化曲线（图4）则显示，在时间处于[500,540]之间时，系统处于宏观量子自囚禁状态，图3、4说明原子隧穿过程是混沌的。

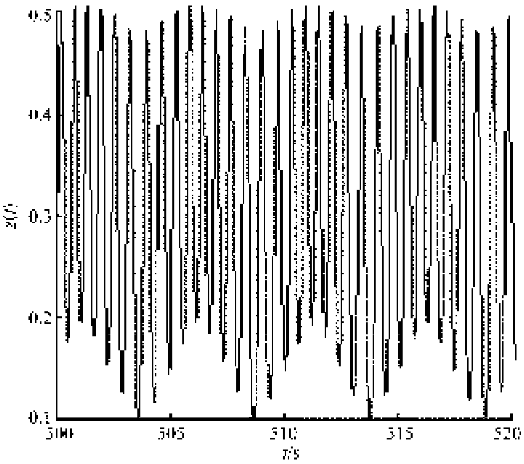

图2 z 的时间演化曲线

Fig. 2 Time-evolution of z

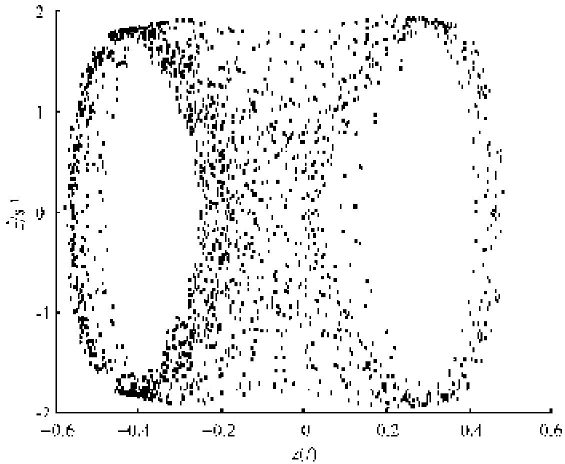

图3 系统 $\left(z,\dot{z}\right)$ 平面相图

Fig. 3 Phase diagram for system $\left(z,\dot{z}\right)$ plane

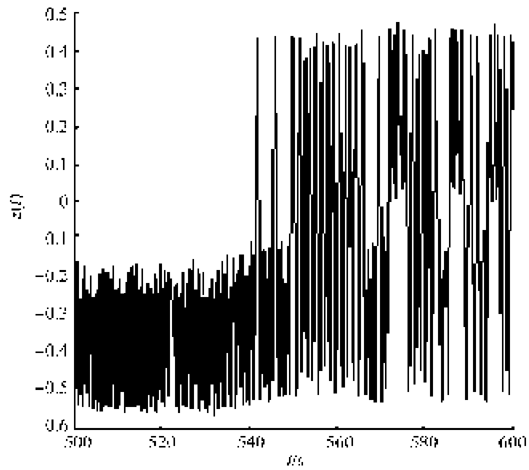

图4 z 的时间演化曲线

Fig. 4 Time-evolution of z

当进一步减小频率 ω 至12时，从图5可看出，系统相图上的混沌区域扩大了，这表明BEC粒子隧穿运动更加无序，对应的 z 随时间的演化曲线亦表明系统混沌程度加深了，见图6。

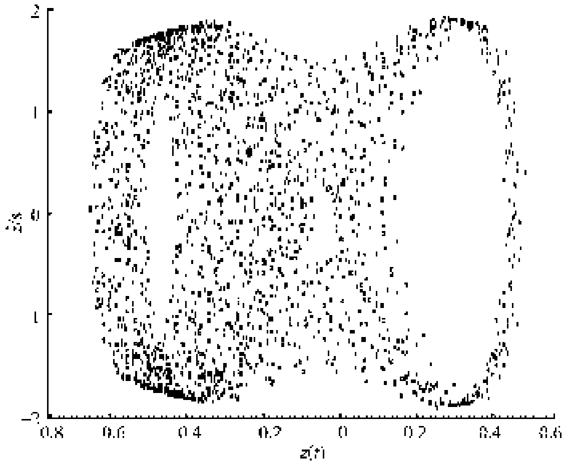

图5　系统在$(z, \dot{z})$平面相图

Fig. 5　Phase diagram for system $(z, \dot{z})$ plane

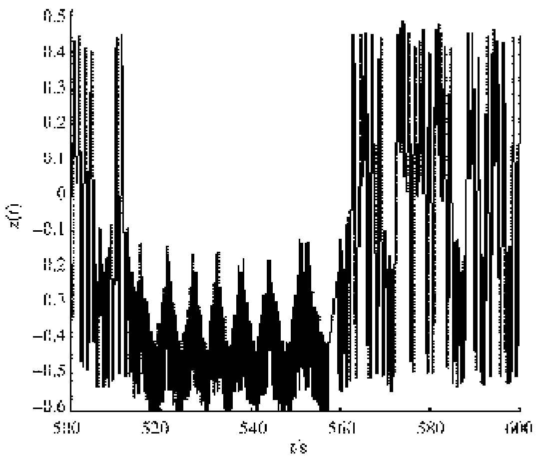

图6　z的时间演化曲线

Fig. 6　Time-evolution of z

4　结语

本文讨论了耦合玻色－爱因斯坦凝聚系统中的混沌动力学特性。运用直接微扰法构造了系统的微扰通解，分析表明该通解的有界性条件包含了Melnikov混沌判据。当系统处于非微扰区域时，数值计算表明，通过调节相关参数能够导致系统从多周期状态进入混沌。研究发现，参数的变化及势阱的非对称性均能导致BEC系统的宏观量子自囚禁。在实验中可以通过调节外加激光的强度及位置等来调控双势阱，或通过Fechbach共振来改变参数Λ的值，从而实现对系统参数的调制，进而控制系统的动力学行为。

参考文献：

[1]　Dalfovo F，Giorgini S，Pitaevskii L，et al. Theory of Bose-Einstein Condensation in Trapped Gases[J]. Rev. Mod. Phy.，1999，71：463-512.

[2]　Hai W，Lee C，Chong G，et al. Chaotic Probability Density in Two Periodically Driven and Weakly Coupled Bose- Einstein Condensates[J]. Phys. Rev. E，2002，66：026202-026208.

[3]　Fang J，Hai W，Chong G，et al. Chaotic Josephson Effects in Two-Coupled Bose-Einstein Condensates[J]. Physica A，2005，349：133-142.

[4]　Li F，Hai W，Ren Z，et al. Chaotic Phase Oscillation of a Proton Beam in a Synchrotron[J]. Phys. Lett. A，2006，355：104-109.

[5]　Li F，Shu W，Jiang J，et al. Spatiotemporal Dynamics of Bose-Einstein Condensates in Moving Optical Lattices[J]. Eur. Phys. J. D，2007，41：355-361.

[6]　Li F，Zhou B，Shu W，et al. Chaotic Dynamics of a Parametrically Modulated Josephson Junction with Quadratic Damping[J]. Eur. Phys. J. D，2008，50：75-80.

[7]　Hai W，Rong S，Zhu Q. Discrete Chaotic States of a Bose-Einstein Condensate[J]. Phys. Rev. E，2008，78：066214-066220.

[8]　Zhu Q，Hai W，Rong S. Transition Probability from Matter-Wave Soliton to Chaos[J]. Phys. Rev. E，2009，80：016203-016208.

[9]　方见树. 一维斜光格子势阱中囚禁Bose-Einstein凝聚体的混沌行为[J]. 株洲工学院学报，2005，19(6)：1-5.
Fang Jianshu. Chaotic Behavior of Trapped Bose-Einstein Condensates in One-Dimensional Tilted Optical Lattice Potential[J]. Journal of Zhuzhou Institute of Technology，2005，19(6)：1-5.

（责任编辑：李玉珍）