第23卷 第5期　　湖　南　工　业　大　学　学　报　　Vol.23 No.5
2009年9月　　Journal of Hunan University of Technology　　Sep. 2009

一类非多项式微分系统中心焦点的判定

张志文，刘兴国

（湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412008）

摘　要：对一类平面非多项式微分系统进行了中心焦点的判定，利用Hopf分支理论，分析得到了系统极限环存在性与稳定性的若干充分条件。

关键词：非多项式微分系统；极限环；中心；焦点

中图分类号：O175.12　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2009)05-0010-04

Determination of Centre Focus for a Class of Non-Polynomial Differential System

Zhang Zhiwen，Liu Xingguo

（School of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412008，China）

Abstract：Determines the centrefoucs for a class of planar non-polynomial differential system. With the Hopf bifurcation theory，obtains certain sufficient conditions for the existence and stability of limit cycles.

Keywords：non-polynomial differential system；limit cycle；center；focus

0　引言

在微分方程平面系统的定性理论和分支理论中，中心焦点判定问题是一个极为重要的研究课题[1-3]。近年来，人们对高次系统的研究日渐增多[4-6]。本文对如式（1）一类具有四阶细焦点的非多项式微分系统进行定性分析：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y=P(x,y),\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+\delta y+axy+cx^2y+bx^2+\\[2mm] \qquad dx^4y^2+\lambda x^2y\left(e^{x^2}-1\right)=Q(x,y),\end{cases}\tag{1}$$

（式（1）中，δ、a、b、c、d、λ均为任意常数），利用基于H. Poincaré 思想的形式级数法，对系统的细焦点进行分析；利用对称原理对系统进行中心判定；利用Hopf分支理论，根据参数变化时焦点稳定性的变化，分析得到了系统极限环存在性与稳定性的若干充分条件。

1　平衡点的性态

因为$e^{x^2}=1+x^2+\dfrac{x^4}{2}+\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{n!}$，$-\infty\le x\le\infty$，从而系统（1）可以写成

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+\delta y+axy+bx^2+cx^2y-\\[2mm] \qquad \lambda yx^4-dx^4y^2+\dfrac{\lambda}{2}yx^6+\lambda x^2y\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{n!}\end{cases}$$

引理 1　对于系统（1），当$\delta\neq 0$时，有：

1）若$b=0$，则有限处实奇点只有$O(0,0)$，且$-2<\delta<0$时为稳定的粗焦点，$0<\delta<2$时为不稳定的粗焦点；

2）若$b\neq 0$，则有限处实奇点有$O(0,0)$和$N\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{b}},0\right)$ 2个，并且$O(0,0)$点的性态同上，N是系统的鞍点。

当$\delta=0$时，$O(0,0)$是系统（1）所对应线性系统的

收稿日期：2009-06-22

基金项目：湖南省教育科学“十一五”规划课题（XJK08CGD005），湖南工业大学教学改革资助课题（08C64）

作者简介：张志文（1985-），男，山西大同人，湖南工业大学理学院学生，E-mail：zzlxg0733@163.com；
刘兴国（1966-），男，湖南岳阳人，湖南工业大学教授，主要从事微分方程定性理论的研究.

中心，需要对奇点 $O(0,0)$进行中心焦点的判定。

下面采用基于 H. Poincaré 思想的形式级数法和对称原理来研究当 $\delta=0$ 时的奇点 $O(0,0)$的性态。

定理 1　对于系统（1），当 $\delta=0$，有：

1）$c>0$ 时，$O(0,0)$为一阶不稳定细焦点；

2）$c<0$ 时，$O(0,0)$为一阶稳定细焦点；

3）$c=0$，$ab+\lambda>0$时，$O(0,0)$为二阶不稳定细焦点；

4）$c=0$，$ab+\lambda<0$时，$O(0,0)$为二阶稳定细焦点；

5）$ab+\lambda=0$，$c=0$，$\lambda+\dfrac{2}{5}ad>0$时，$O(0,0)$为三阶不稳定细焦点；

6）$ab+\lambda=0$，$c=0$，$\lambda+\dfrac{2}{5}ad<0$时，$O(0,0)$为三阶稳定细焦点；

7）$ab+\lambda=0$，$c=0$，$\lambda+\dfrac{2}{5}ad=0$时，$O(0,0)$为四阶不稳定细焦点；

8）$ab+\lambda=0$，$c=0$，$\lambda+\dfrac{2}{5}ad=0$，$\dfrac{12}{35}a^3d-\dfrac{2}{15}ad<0$ 时，$O(0,0)$为四阶稳定细焦点；

9）$ab=0$，$\lambda=0$，$c=0$，$ad=0$时，$O(0,0)$为中心。

证明　当 $\delta=0$ 时，令形式级数

$$F(x,y)=x^2+y^2+F_3+F_4+\cdots+F_K+\cdots,(K=3,4\cdots),$$

其中$F_K(x,y)=\sum\limits_{i+j=K}a_{ij}x^iy^j$是 x 与 y 的 K 次齐次式，当 $x\in R$ 时，则有$\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=$

$$\left(2x+\frac{\partial F_3}{\partial x}+\frac{\partial F_4}{\partial x}+\cdots\right)y+\left(2y+\frac{\partial F_3}{\partial y}+\frac{\partial F_4}{\partial y}+\cdots\right)\left(-x+axy+\right.$$
$$\left.bx^4+cx^3y+\lambda yx^4+dx^4y^2-\frac{\lambda}{2}yx^6+\lambda x^2y\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}\right),\quad(2)$$

令式（2）右端的 3 次项之和为 0，则有

$$y\frac{\partial F_3}{\partial x}-x\frac{\partial F_3}{\partial y}+2axy^2=0。$$

将上式取极坐标，令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则有

$\dfrac{\mathrm{d}F_3(\cos\theta,\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}=2a\cos\theta\sin^2\theta$，从而可得

$$F_3(\cos\theta,\sin\theta)=2a\int\cos\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2a}{3}\sin^3\theta,$$

即$F_3(x,y)=\dfrac{2a}{3}y^3$。

令式（2）右端 4 次项之和为 0，则有

$$y\frac{\partial F_4}{\partial x}-x\frac{\partial F_4}{\partial y}+axy\frac{\partial F_3}{\partial y}+2cx^2y^2=0,$$

将上式取极坐标 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，并消去 r^4 得

$$\frac{\mathrm{d}F_4(\cos\theta,\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}=2a^2\cos\theta\sin^3\theta+2c\cos^2\theta\sin^2\theta。$$

下面分 5 种情况讨论：

1）当 $c\neq0$ 时，因

$$\int_0^{2\pi}\left[2a^2\cos\theta\sin^3\theta-2c\cos^2\theta\sin^2\theta\right]\mathrm{d}\theta=2c\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\neq0,$$

改取 F_4 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}F_4(\cos\theta,\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}=2a^2\cos\theta\sin^3\theta+2c\cos^2\theta\sin^2\theta-d_4,$$

其中$d_4=\dfrac{c}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta$，且 d_4 与 c 同号。

设 $\Phi(x,y)=x^2+y^2+F_3+F_4$，则有: $\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=d_4r^4+O(r^4)$，从而，当 $c>0$ 时，$O(0,0)$为一阶不稳定的细焦点；当 $c<0$ 时，$O(0,0)$为一阶稳定的细焦点。

2）当 $c=0$ 时，则有

$\dfrac{\mathrm{d}F_4(\cos\theta,\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}=2a^2\cos\theta\sin^3\theta$，由此可得

$F_4(x,y)=\dfrac{1}{2}a^2y^4$。

令式（2）右端的 5 次项为 0，则有

$$y\frac{\partial F_5}{\partial x}-x\frac{\partial F_5}{\partial y}+axy\frac{\partial F_4}{\partial y}+cx^3y\frac{\partial F_3}{\partial y}+2bx^4y=0,$$

将此式取极坐标 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，并消去 r^5 得

$\dfrac{\mathrm{d}F_5(\cos\theta,\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}=2b\cos^4\theta\sin\theta+2a^3\cos\theta\sin^4\theta$，

可求得$F_5(x,y)=-\dfrac{2}{5}bx^5+\dfrac{2}{5}a^3y^5$。

令式（2）右端的 6 次项为 0，则有

$$y\frac{\partial F_6}{\partial x}-x\frac{\partial F_6}{\partial y}+bx^4\frac{\partial F_3}{\partial y}+axy\frac{\partial F_5}{\partial y}+2\lambda x^4y^2=0,$$

将上式取极坐标 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，并消去 r^6 化简得

$$\frac{\mathrm{d}F_6(\cos\theta,\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}=2(ab+\lambda)\cos^4\theta\sin^2\theta+2a^4\cos\theta\sin^5\theta,$$

因为当 $ab+\lambda\neq0$ 时，

$$\int_0^{2\pi}\left[2(ab+\lambda)\cos^4\theta\sin^2\theta+2a^4\cos\theta\sin^5\theta\right]\mathrm{d}\theta=2(ab+\lambda)\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\neq0,$$

改取 F_6 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}F_6(\cos\theta,\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}=2(ab+\lambda)\cos^4\theta\sin^2\theta+2a^4\cos\theta\sin^5\theta-d_6,$$

其中$d_6=\dfrac{ab+\lambda}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\neq0$，且 d_6与 $ab+\lambda$同号。

设$\Psi(x,y)=x^2+y^2+F_3+F_4+F_5+F_6$，则有

$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}=d_6r^6+O\left(r^6\right)$，从而当 c=0，$ab+\lambda$>0 时，$O(0,0)$为二阶不稳定的细焦点；当 c=0，$ab+\lambda$<0 时，$O(0,0)$为二阶稳定的细焦点。

3）当 $ab+\lambda$=0，c=0 时，则有 $F_6(x,y)=\frac{a^2}{3}y^6$。

令式（2）右端的 7 次项为 0，则有

$$y\frac{\partial F_7}{\partial x}-x\frac{\partial F_7}{\partial y}+axy\frac{\partial F_6}{\partial y}+bx^4\frac{\partial F_4}{\partial y}-\lambda x^4y\frac{\partial F_3}{\partial y}+2dx^5y^2=0。$$

将上式取极坐标 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，并消去 r^7 化简得

$$\frac{\mathrm{d}F_7(\cos\theta,\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}=2a^5\cos\theta\sin^6\theta-2d\cos^4\theta\sin^2\theta，$$

可求得 $F_7(x,y)=\frac{2}{7}a^5y^7-\frac{4}{35}dx^7-\frac{2}{5}dx^5y^2$。

令式（2）右端的 8 次项为 0，则有

$$y\frac{\partial F_8}{\partial x}-x\frac{\partial F_8}{\partial y}+bx^4\frac{\partial F_5}{\partial y}+axy\frac{\partial F_7}{\partial y}+\lambda x^4y\frac{\partial F_4}{\partial y}+dx^4y^2\frac{\partial F_3}{\partial y}-\lambda x^6y^2=0。$$

将上式取极坐标 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，并消去 r^8 化简得

$$\frac{\mathrm{d}F_8(\cos\theta,\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}=2a^6\cos\theta\sin^7\theta+\left(\lambda-\frac{4}{5}ad\right)\cos^6\theta\sin^2\theta+2ad\cos^4\theta\sin^4\theta，$$

因为当 $\lambda+\frac{2}{5}ad\neq0$ 时，

$$\int_0^{2\pi}\left[2a^6\cos\theta\sin^7\theta+\left(\lambda-\frac{4}{5}ad\right)\cos^6\theta\sin^2\theta+2ad\cos^4\theta\sin^4\theta\right]\mathrm{d}\theta=\left(\lambda+\frac{2}{5}ad\right)\int_0^{2\pi}\cos^6\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\neq0，$$

改 F_8 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}F_8(\cos\theta,\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}=2a^6\cos\theta\sin^7\theta+\left(\lambda-\frac{4}{5}ad\right)\cos^6\theta\sin^2\theta-2ad\cos^4\theta\sin^4\theta-d_8，$$

其中 $d_8=\frac{\lambda+\frac{2}{5}ad}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^6\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta$，且 d_8 与 $\lambda+\frac{2}{5}ad$ 同号。

设$\varphi(x,y)=x^2+y^2+F_3+F_4+F_5+F_6+F_7+F_8$，则有 $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=d_8r^8+O\left(r^8\right)$，从而当 $ab+\lambda$=0，c=0，$\lambda+\frac{2}{5}ad$>0 时，$O(0,0)$为三阶不稳定的细焦点；当 $ab+\lambda$=0，c=0，$\lambda+\frac{2}{5}ad$<0 时，$O(0,0)$为三阶稳定的细焦点。

4）当 $ab+\lambda$=0，c=0，$\lambda+\frac{2}{5}ad$=0 时，可得 $F_8(x,y)=\frac{a^6}{4}y^8$。

令式（2）右端的 9 次项为 0，则有

$$y\frac{\partial F_9}{\partial x}-x\frac{\partial F_9}{\partial y}+axy\frac{\partial F_8}{\partial y}+bx^4\frac{\partial F_6}{\partial y}+dx^4y^2\frac{\partial F_4}{\partial y}+\lambda x^4y\frac{\partial F_5}{\partial y}+\frac{1}{2}\lambda x^6y\frac{\partial F_3}{\partial y}=0，$$

将上式取极坐标 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，并消去 r^9 化简得

$$\frac{\mathrm{d}F_9(\cos\theta,\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}=2a^7\cos\theta\sin^8\theta+a\lambda\cos^6\theta\sin^3\theta+2a^2d\cos^7\theta\sin^5\theta，$$

可求得

$$F_9(x,y)=\frac{2}{9}a^7y^9-\frac{12}{315}a^2dx^9-\frac{6}{35}a^2dx^7y^2-\frac{2}{5}a^2dx^5y^4。$$

令式（2）右端的 10 次项为 0，则有

$$y\frac{\partial F_{10}}{\partial x}-x\frac{\partial F_{10}}{\partial y}+bx^4\frac{\partial F_7}{\partial y}+axy\frac{\partial F_9}{\partial y}+dx^4y^2\frac{\partial F_5}{\partial y}-\lambda x^4y\frac{\partial F_6}{\partial y}+\frac{1}{2}\lambda x^6y\frac{\partial F_4}{\partial y}+\frac{2\lambda}{3}x^8y^2=0。$$

将上式取极坐标 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，并消去 r^{10} 化简得

$$\frac{\mathrm{d}F_{10}(\cos\theta,\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}=2a^8\cos\theta\sin^9\theta-\left(\frac{2}{15}ad-\frac{12}{35}a^3d\right)\cos^8\theta\sin^2\theta-2a^3d\cos^6\theta\sin^4\theta-2a^3d\sin^6\theta\cos^4\theta-\frac{4}{5}bd\cos^9\theta\sin\theta，$$

因为当 $\frac{12}{35}a^3d-\frac{2}{15}ad\neq0$ 时，

$$\int_0^{2\pi}\left[2a^8\cos\theta\sin^9\theta-\left(\frac{2}{15}ad-\frac{12}{35}a^3d\right)\cos^8\theta\sin^2\theta-2a^3d\cos^6\theta\sin^4\theta+2a^3d\sin^6\theta\cos^4\theta-\frac{4}{5}bd\cos^9\theta\sin\theta\right]\mathrm{d}\theta=\left(\frac{12}{35}a^3d-\frac{2}{15}ad\right)\int_0^{2\pi}\cos^8\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\neq0，$$

改取 F_{10} 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}F_{10}(\cos\theta,\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}=2a^8\cos\theta\sin^9\theta-\left(\frac{2}{15}ad-\frac{12}{35}a^3d\right)\cos^8\theta\sin^2\theta-2a^3d\cos^6\theta\sin^4\theta+2a^3d\sin^6\theta\cos^4\theta-\frac{4}{5}bd\cos^9\theta\sin\theta-d_{10}，$$

其中$d_{10}=\dfrac{\frac{6}{35}a^3d-\frac{1}{15}ad}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^8\theta\sin^2\theta d\theta$，且$d_{10}$与$\frac{2}{15}ad-\frac{12}{35}a^3d$异号。

设$\omega(x,y)=x^2+y^2+F_3+F_4+F_5+F_6+F_7+F_8+F_9+F_{10}$，则有$\frac{d\omega}{dt}=d_{10}r^{10}+O\left(r^{10}\right)$，从而当$ab+\lambda=0$，$c=0$，$\lambda+\frac{2}{5}ad=0$，$\frac{12}{35}a^3d-\frac{2}{15}ad>0$时，$O(0,0)$为四阶不稳定的细焦点；当$ab+\lambda=0$，$c=0$，$\lambda+\frac{2}{5}ad=0$，$\frac{12}{35}a^3d-\frac{2}{15}ad<0$时，$O(0,0)$为四阶稳定的细焦点。

5）当$\delta=0$，$ab=0$，$\lambda=0$，$c=0$，$ad=0$时，系统满足$\begin{cases}P(x,-y)=-P(x,y)\\Q(x,-y)=Q(x,y)\end{cases}$或$\begin{cases}P(-x,y)=P(x,y)\\Q(-x,y)=-Q(x,y)\end{cases}$，根据对称原理可知，$O(0,0)$必是系统的中心。

2　极限环的存在性与稳定性

定理2　下列条件之一成立时，系统（1）在$O(0,0)$外围至少存在1个极限环，且$\delta<0$时所产生的环不稳定，$\delta>0$所产生的环稳定。

1）$c>0$，$-1\ll\delta<0$；

2）$c<0$，$0<\delta\ll1$；

3）$c=0$，$ab+\lambda>0$，$-1\ll\delta<0$；

4）$c=0$，$ab+\lambda<0$，$0<\delta\ll1$；

5）$ab+\lambda=0$，$c=0$，$\lambda+\frac{2}{5}ad>0$，$-1\ll\delta<0$；

6）$ab+\lambda=0$，$c=0$，$\lambda+\frac{2}{5}ad<0$，$0<\delta\ll1$；

7）$ab+\lambda=0$，$c=0$，$\lambda+\frac{2}{5}ad=0$，$\frac{12}{35}a^3d-\frac{2}{15}ad>0$，$-1\ll\delta<0$；

8）$ab+\lambda=0$，$c=0$，$\lambda+\frac{2}{5}ad=0$，$\frac{12}{35}a^3d-\frac{2}{15}ad<0$，$0<\delta\ll1$。

证明　在定理的条件1）、3）、5）或7）下，当$\delta=0$时，系统以$O(0,0)$为不稳定的细焦点；而当$-1\ll\delta<0$时，系统（1）以$O(0,0)$为稳定的粗焦点；当δ从0开始减小时，系统的奇点$O(0,0)$由不稳定的细焦点变为稳定的粗焦点。从物理学的角度来看，奇点由吸收能量到释放能量，此过程中必产生等幅振荡，故可知在此几种参数的条件下，系统在点$O(0,0)$外围至少产生1个不稳定的极限环。

在定理的条件2）、4）、6）或8）下，当$\delta=0$时系统以$O(0,0)$为稳定的细焦点。而当$0<\delta\ll1$时，系统（1）以$O(0,0)$为不稳定的粗焦点。当δ从0开始增加时，系统的奇点$O(0,0)$由稳定的细焦点变为不稳定的粗焦点。从物理学的角度来看，奇点由释放能量到吸收能量，此过程中必产生等幅振荡，故可知在此几种参数的条件下系统在点$O(0,0)$外围至少产生1个稳定的极限环。

参考文献：

[1] 张芷芬，丁同仁，黄文灶，等. 微分方程定性理论[M]. 北京：科学出版社，1985.
Zhang Zhifen，Ding Tongren，Huang Wenzao，et al. Qualitarive Theory of Differentid Equations[M]. Beijing：Science Press，1985.

[2] 张锦炎，冯贝叶. 常微分方程几何理论与分支问题[M]. 北京：北京大学出版社，1981.
Zhang Jinyan，Feng Beiye. Geometric Theory of Common Differentid Equations and the Bifurcation Problems[M]. Beijing：Peking University Press，1981.

[3] 刘兴国，黄立宏. 一类平面多项式系统极限环的存在唯一性[J]. 高校应用数学学报A辑，2007，22(4)：455-461.
Liu Xingguo，Huang Lihong. Existence and Uniqueness of Limit Cycle for a Class of Planar Polynomial System[J]. Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities(Ser. A)，2007，22(4)：455-461.

[4] 宋　涛，黄卫东，张伯骏. 一类多项式系统中心焦点判定问题的研究[J]. 天津工业大学学报，2006，25(6)：75-77.
Song Tao，Huang Weidong，Zhang Bojun. Study of Center Focus Decision Problem for a Type of Polynomial System[J]. Journal of Tianjin Polytechnic University，2006，25(6)：75-77.

[5] 李国涛，刘兴国. 一类非多项式微分系统的定性分析[J]. 湖南工业大学学报，2008，22(6)：10-12.
Li Guotao，Liu Xingguo. Qualitative Analysis on a Class of Non-Polynomial Differential System[J]. Journal of Hunan University of Technology，2008，22(6)：10-12.

[6] 刘兴国，吕　勇. 一类平面微分系统的定性分析[J]. 湖南工业大学学报，2008，22(4)：17-21.
Liu Xingguo，Lv Yong. Qualitative Analysis for a Class of Planar Differential Systems[J]. Journal of Hunan University of Technology，2008，22(4)：17-21.

（责任编辑：张亦静）