

# 迪恩涡运动规律的数值研究

朱 辉, 湛含辉, 李 灿, 彭 彪

(湖南工业大学, 湖南 株洲 412008)

**摘 要:** 借助数值方法, 在极坐标和笛卡尔坐标系下对迪恩涡运动进行了数学描述, 在此基础上, 以长 500 mm、管径 50 mm 的 90°弯管为例, 从径向速度、轴向速度和速度环量 3 个因素出发, 在不同的迪恩数下对弯管中迪恩涡的运动规律进行数值模拟。结果表明, 径向速度在 15°~75°截面上变化较小, 而在入口和出口处则有剧增现象; 轴向速度在整个弯管段呈近似波状变化; 速度环量随迪恩数的增大呈近似抛物状变化。

**关键词:** 迪恩涡; 90°弯管; 迪恩数; 数值模拟

中图分类号: TB126

文献标志码: A

文章编号: 1673-9833(2009)03-0058-05

## Numerical Investigation on the Characteristics of Dean Vortices

Zhu Hui, Zhan Hanhui, Li Can, Peng Biao

(Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412008, China)

**Abstract:** Mathematics descriptions of Dean vortices movements were performed under polar coordinates and Cartesian Coordinates respectively through numerical methods. And on the base of the mathematics description, numerical simulation was carried out to study the characteristics of the Dean vortices from the radial velocity, axial velocity and circulation. The results showed that the radial velocity varied slowly in the curved pipes between the cross-section 15° and 75°, while increased significantly in the inlet and outlet of the pipe, and the axial velocity assumed wavy variation in the whole curved pipe, while the circulation assumed parabolic variation as the increment of Dean number.

**Keywords:** Dean vortices; 90° curved pipe; Dean number; numerical simulation

## 0 引言

弯管广泛地存在于工业应用领域中, 如风机盘管、U形管换热器、各种流体管网等。由于曲率效应的作用, 在一定条件下弯管内可能产生迪恩涡, 使管内速度场、压力场发生变化。迪恩涡的产生使流体运动过程中阻力产生的能量损耗增大<sup>[1]</sup>; 另一方面, 迪恩涡能在避免湍流的情况下提高流体的传质和传热性能<sup>[2]</sup>, 因此, 迪恩涡运动是一种利害兼备的流体运动。

以 W.R.Dean<sup>[3-4]</sup>为代表的国外学者对迪恩涡进行了早期的研究。W.R.Dean 在研究弯管流体运动时发现并验证了迪恩涡的存在, 通过数值分析, 提出了迪恩

涡的强度准则数——迪恩数, 从而得出了影响迪恩涡的因素; J.Eustice<sup>[5-6]</sup>认为对于弯管流体运动, 不存在临界速度, 在流体运动过程中也不会出现压头损失的剧增, 并在实验结果的基础上提出了其可能的原因在在于管内流线型运动的微扰作用导致的流体不稳定。后来的学者从迪恩涡的传热、传质、剪切等性能出发, 利用数值模拟<sup>[7]</sup>以及 LDV 法<sup>[8]</sup>对迪恩涡的流场分布也进行了研究。

迪恩涡既可以引起较高的流动阻力, 也能提高流体的传热、传质性能。因此, 研究迪恩涡的运动规律, 对于弯管流动的减阻设计、流体的强化传热、强化传质等有一定的理论指导意义。

收稿日期: 2009-04-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(20876037)

作者简介: 朱 辉(1983-), 男, 湖南常德人, 湖南工业大学土木工程学院硕士研究生, 主要研究方向为二次流强化传热技术,

E-mail: zhuhui2009@foxmail.com

### 1 迪恩涡的运动形式

迪恩涡是一种常见的物理现象, 是在离心力的作用下弯管中的粘性流体在一定的主流速度下所产生的一对按一定规律运动的反面对称涡旋(见图1)<sup>[9]</sup>。

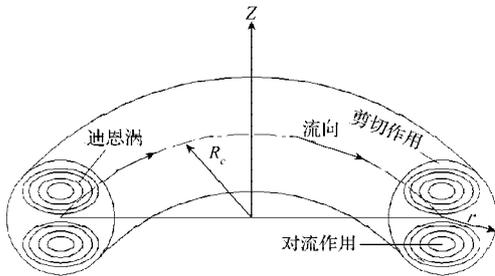


图1 迪恩涡运动

Fig. 1 The schematics diagram of Dean Vortices

迪恩涡最初由 W.R.Dean 在研究弯管内流体流动时发现, 并且对迪恩涡进行了最初的数学分析, 指出迪恩涡对的产生是由于管内流体所受的离心力和粘性力相互作用的结果, 在此基础上提出了一无量纲数——迪恩数。通常迪恩数可表示为:

$$De = Re \cdot (r/R_c)^{0.5} = V \cdot 2r \cdot \nu^{-1} \cdot (r/R_c)^{0.5}, \quad (1)$$

式中:  $Re$  为雷诺数;

$r$  为弯管半径;

$R_c$  表示螺圈半径;

$V$  为主流速度;

$\nu$  表示流体的运动黏度, 与流体的种类有关。

迪恩数代表离心力与粘性力的比值, 同时也衡量着迪恩涡的强度。

### 2 极坐标系和笛卡尔坐标系下迪恩涡的数学描述

在迪恩涡运动形式的基础上对其进行数学描述。假如弯管为圆环的一部分, 建立弯管的物理模型, 并建立极坐标  $(r, \varphi, z)$ , 则有  $(r-b)^2 + z^2 = a^2$ , 其中,  $a$  为弯管半径;  $b$  为弯管的曲率半径, 且  $b \gg a$ , 极坐标系示意图如图2所示。

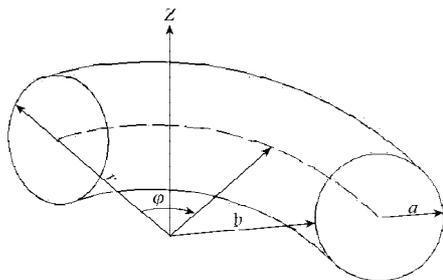


图2 极坐标系示意图

Fig. 2 The schematics diagram of the polar coordinates

流体由  $\varphi$  方向上的压力梯度驱动, 假设管内流速为  $\mathbf{u} = (u_r, u_\varphi, u_z)$ , Navier-Stocks 方程 (N-S 方程组描

述的迪恩涡运动) 为:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \\ \rho \left( \frac{Du_r}{Dt} - \frac{u_\varphi^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} \right), \\ \rho \left( \frac{Du_\varphi}{Dt} + \frac{u_\varphi u_r}{r} \right) = G(r, z, t) + \mu \left( \nabla^2 u_\varphi - \frac{u_\varphi}{r^2} \right), \\ \rho \frac{Du_z}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 u_z, \end{cases} \quad (2)$$

式中: 物质导数  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_r \frac{\partial}{\partial r} + u_z \frac{\partial}{\partial z}$ ;

$G$  为沿管流方向的压力梯度,  $G = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi}$ 。

假设式(2)存在单向解, 则  $u_r = u_z = 0$ , 代入方程组

有:  $\frac{\partial p}{\partial z} = 0, \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{u_\varphi^2}{r}$ , 从而  $\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} = 0$ 。因此, 当且仅当  $u_\varphi$  为常数的时候才存在单向解, 这种情况仅出现在无滑移边界条件下的同心圆柱之间的流体运动, 任何弯管中的流体不可能出现单向解。但是, 当弯管接近于直管时, 可以假设流动存在近似的单向解。当  $a$  确定时,  $r$  和  $z$  为自变量, 假设  $b \gg a$ , 因此  $r = b + ax^*$ , 并有  $\frac{\partial}{\partial r} \sim \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x^*} \gg \frac{1}{r}$ 。将  $z$  尺度化为  $z = az^*$ , 并且假设速度  $U_0 = u_\varphi$ ,

同理, 压力  $p$  也可以尺度化为  $p \sim \rho U_0^2 a / b$ , 径向速度

可以表示为:  $u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} \sim u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \sim \frac{u_\varphi^2}{r}$ , 因此可以推断出:

$$u_r \sim u_z \sim U_0 \left( \frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{2}}。$$

在上述基础上可以得到:  $u_\varphi = U_0 u_\varphi^*$ ;

$u_{r,z} = U_0 \left( \frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{2}} u_{x,z}^*$ ;  $p = \rho U_0^2 \left( \frac{a}{b} \right) p^*$ 。忽略  $\left( \frac{a}{b} \right)$  的高阶项,

则式(2)可以表示为:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u_z^*}{\partial z^*} = 0, \\ \frac{\rho U_0^2}{b} \left( \frac{Du_x^*}{Dt} - \frac{u_\varphi^{*2}}{1} \right) = -\frac{\rho U_0^2}{b} \cdot \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\mu U_0}{a^2} \cdot \left( \frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{2}} \nabla^{*2} u_x^*, \\ \frac{\rho U_0^2}{(ab)^{1/2}} \cdot \frac{Du_\varphi^*}{Dt} = G + \frac{\mu U_0}{a^2} \cdot \nabla^{*2} u_\varphi^*, \\ \frac{\rho U_0^2}{b} \cdot \left( \frac{Du_z^*}{Dt} \right) = \frac{\rho U_0^2}{b} \cdot \frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \frac{\mu U_0}{a^2} \cdot \left( \frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{2}} \nabla^{*2} u_z^*. \end{cases} \quad (3)$$

选择尺度化的  $U_0$ , 同时定义参数  $K$ , 使  $\frac{Ga^2}{\mu U_0} = 1$  且

$K = \frac{\rho U_0 a}{\mu} \left( \frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{2}}$ , 再去掉所有量纲变量的上标\*, 得到

式(2)的另一种表达式:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \\ K \left( \frac{Du_x}{Dt} - u_\varphi^2 \right) = -K \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \nabla^2 u_x, \\ K \frac{Du_\varphi}{Dt} = 1 + \nabla^2 u_\varphi, \\ K \frac{Du_z}{Dt} = -K \frac{\partial p}{\partial z} + \nabla^2 u_z. \end{cases} \quad (4)$$

此方程组实际上为二维  $N-S$  方程组, 不同之处在于方程组多了对作用于弯管内壁面的体积力  $u_\varphi^2$  的描述。

在三维笛卡尔坐标系  $(x, y, z)$  中, 令  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ ,

借助流函数  $\psi(x, z)$ , 令  $u = u_x = \frac{\partial \psi}{\partial z}, w = -u_z = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ ,

$u_\varphi = v(x, z)$ , 因此式(4)可化简为:

$$\begin{cases} K(\psi_z v_x - \psi_x v_z) = 1 + \nabla^2 v, \\ K(\psi_z \Omega_x - \psi_x \Omega_z) = \nabla^2 \Omega - 2Kv v_z, \end{cases} \quad (5)$$

式中:  $\Omega = -\nabla^2 \psi$ , 表示管流方向的涡量;

参数  $K$  即迪恩数  $De$ , 可以理解为弯管曲率比  $(a/b)$  修正后的雷诺数。

### 3 数值模拟

#### 3.1 控制方程与湍流模型

通过以上对迪恩涡运动的分析可知, 对于一定的密度和粘度条件下的不可压缩流体, 连续性方程(即质量守恒方程)和  $N-S$  方程(即动量守恒方程)共同组成了弯管内迪恩涡运动的控制方程, 其中质量守恒方程表示为:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (6)$$

动量守恒方程可表示为:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \nabla P, \quad (7)$$

式中:  $\nabla$  为汉密尔顿梯度算子;

$\mathbf{u}$  为速度矢量;

$\nu$  是流体的运动粘度;

$\nabla^2$  为拉普拉斯算子;

$\nabla P$  为  $x, y, z$  方向上的表面力梯度。

由于迪恩涡存在着旋流流动特性, 因此利用  $k-e$  湍流模型可能无法得到理想的计算结果。带旋流修正的 Realizable  $k-e$  模型不仅为湍流粘性增加了一个公式, 而且为耗散率增加了新的传输方程, 使得该模型对于旋转流动、强逆压梯度的边界层流动、流动分离和二次流有较好的体现。带旋流修正的 Realizable  $k-e$  方程的湍动能传输方程可表示为:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \mu + \frac{\mu t}{\sigma_k} \right) \cdot \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b - \rho \varepsilon - Y_M + S_k, \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\alpha}{\alpha x_j}(\rho \varepsilon u_j) = \frac{\alpha}{\alpha x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu t}{\sigma_\varepsilon} \right) \cdot \frac{\alpha}{\alpha x_j} \right] + \rho C_1 \cdot S_\varepsilon - \rho C_2 \cdot \frac{\varepsilon^2}{k + \sqrt{\nu \varepsilon}} + C_{1\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{k} \cdot C_{3\varepsilon} \cdot G_b + S_\varepsilon, \quad (9)$$

方程中:  $G_k$  是由层流速度梯度而产生的湍流动能;

$G_b$  是由浮力而产生的湍流动能;

$Y_M$  是可压缩湍流中过渡的扩散产生的波动;

$C_2$  和  $C_{1\varepsilon}$  是常量;

$\sigma_k$  和  $\sigma_\varepsilon$  是  $k$  方程和  $e$  方程的湍流普朗特(Prandtl)数;

$S_k$  和  $S_\varepsilon$  为源项, 由用户自己定义;

$C_1$  可以通过下式来计算,

$$C_1 = \max \left[ 0.43, \frac{\eta}{\eta + 5} \right], \eta = S \cdot \frac{k}{\varepsilon}, \quad (10)$$

方程(8)、(9)的模型常量为:  $C_1=1.44, C_2=1.9, \sigma_k=1.0, \sigma_\varepsilon=1.2$ 。

#### 3.2 求解方法

模拟对象的结构如图3所示。

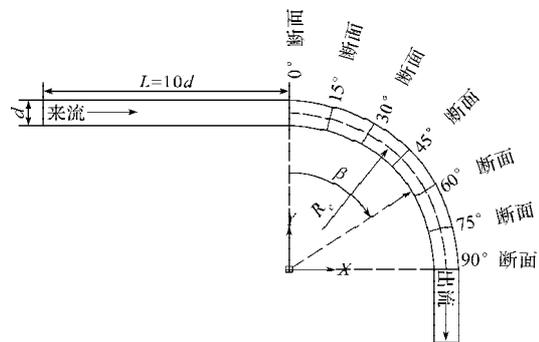


图3 物理模型

Fig. 3 Physical model

模型由3部分组成, 分别是进口段、弯管段、出口段。为了使管内流动充分发展, 进口段长度取10倍管径, 弯管段长度为500mm, 弯曲角度为90°, 因此曲率半径为  $R_c$  为318.5mm。在弯管段取7个观测断面, 分别是0°截面(进口截面)、15°截面、30°截面、45°截面、60°截面、75°截面和90°截面(出口截面), 分别观测各个断面的速度场的变化情况。

在模型的基础上借助有限体积法<sup>[10]</sup>对连续性方程和  $N-S$  方程组进行离散化, 在对动量方程的对流项进行离散化时采用一阶迎风格式; 在对模型进行网格化时采用非结构网格, 并设置3类边界类型: 进口采用速度入口边界, 出口采用自由出流边界, 管壁为壁面边界, 并且在靠近管壁面处设置边界层, 其中速度入口采用“边界法向”方式; 指定湍流描述方式为“湍

流强度”和“水力直径”;并设定壁面边界为“静止壁面”和“无滑移壁面”。

### 3.3 初始条件

数值模拟在不同的进口速度下进行,进口速度  $v_i$  分别取 0.02 m/s, 0.04 m/s, 0.1 m/s, 0.25 m/s, 0.3 m/s, 0.5 m/s, 分别对应层流区 ( $Re \leq 2\ 300$ )、过渡区 ( $2\ 300 \leq Re \leq 1.38 \times 10^4$ )、湍流区 ( $Re \geq 1.38 \times 10^4$ )。数值模拟初始条件如表 1 所示。

表 1 模拟初始条件

Table 1 Initial conditions of the numerical simulation

初始条件项目	初始条件数值				
雷诺数	$\leq 2\ 300$	$\geq 2300$ 且 $\leq 1.38 \times 10^4$		$\geq 1.38 \times 10^4$	
管径/mm	50	50	50	50	50
进口速度 $v_i/(m \cdot s^{-1})$	0.02 0.04	0.10	0.25	0.30	0.50
迪恩数	280 560	1 401	3 500	4 203	7 005

## 4 模拟结果及分析

数值模拟分别针对  $\phi 50$  弯管中迪恩涡旋的径向速度、轴向速度和速度环量随迪恩数的变化规律进行。通过 CFD 软件,计算各截面处各量的面平均值,得到如下结果。

### 4.1 径向速度随迪恩数的变化

径向速度随迪恩数的变化结果如图 4 所示。

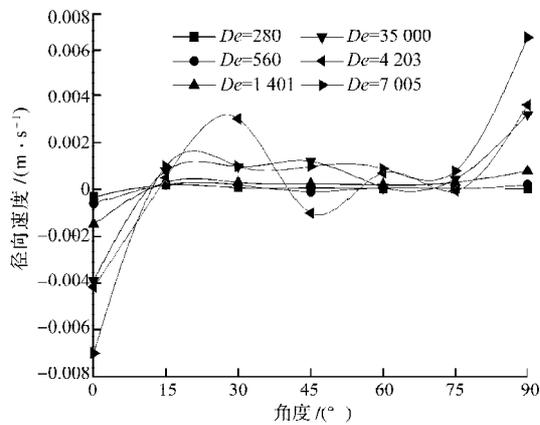


图 4 径向速度随迪恩数的变化

Fig. 4 Variation of the radial velocities with Dean number

从图 4 中可以看出,各个迪恩数下的径向速度在  $15^\circ \sim 75^\circ$  截面上变化较小(除了当迪恩数为 4 203 时),而在弯管入口段和出口段处径向速度却出现陡增现象,其中变化最为显著的为完全湍流区入口速度  $v_i=0.5$  m/s 时的情况。

弯管曲率效应为进口、出口处径向速度增大的原因,管内流体在进入弯管时受到离心力的作用,流体运动轨迹向管外侧偏移,因此,径向速度出现陡增现象,而在  $15^\circ \sim 75^\circ$  管段范围内,流体或形成迪恩涡(层流区、过渡区),管内流体一致从管内侧运动到管外

侧;或为湍流运动(完全湍流区),杂乱无章的运动引起流体横向对流,径向速度发生变化。

### 4.2 轴向速度随迪恩数的变化

轴向速度随迪恩数的变化结果如图 5 所示。

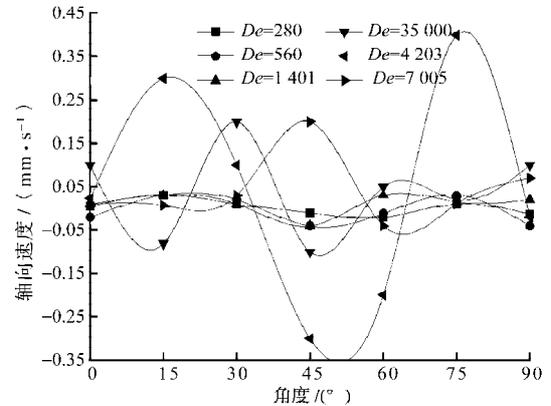


图 5 轴向速度随迪恩数的变化

Fig. 5 Variation of the axial velocities with Dean number

从图 5 可见,轴向速度在不同的截面之间呈波状变化,当迪恩数分别为 280(对应  $v_i=0.02$  m/s)、560(对应  $v_i=0.04$  m/s)和 1 401(对应  $v_i=0.1$  m/s)时,轴向速度变化较平缓,而处于完全湍流区的流体变化相对较剧烈。

在流体流动达到完全湍流区前,管内存在迪恩涡。迪恩涡使流体在截面上从管内侧运动到管外侧,则迪恩涡与主流的合运动呈螺旋状。在弯管效应的作用下,流体进入弯管段后压降会突然增大,导致回流以及流体分离。图 5 中轴向速度的降低便源于回流或流体分离作用。而在完全湍流区,阻力仅与速度的平方有关,因此压降会更高,引起回流运动和流体分离的加剧,从而当迪恩数  $De$  为 4 203 和 7 005 时,轴向速度的变化更显著。

### 4.3 速度环量随迪恩数的变化

速度环量随迪恩数的变化如图 6 所示。

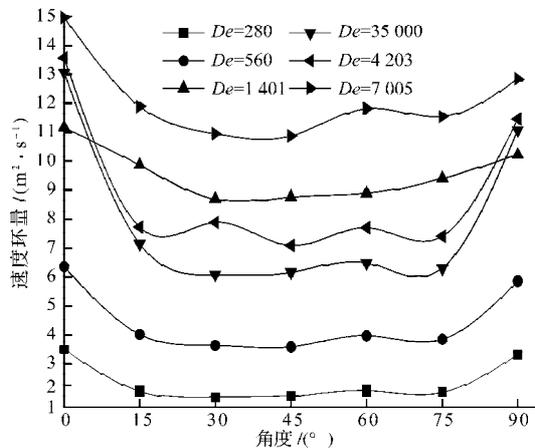


图 6 速度环量随迪恩数的变化

Fig. 6 Variation of the velocity circulation with Dean number

由图 6 可知,在 3 种流态下,弯管内流体运动的

速度环量都呈现相同的变化趋势：即在入口 $\sim 15^\circ$ 截面段速度环量降低，在 $15^\circ\sim 75^\circ$ 截面段环量变化较平缓，而从 $75^\circ$ 截面 $\sim$ 出口速度环量又呈增大趋势。

出现上述现象的原因在于：当流体进入到弯管时，对于层流区和过渡区来说，流体受到离心力的作用，开始形成迪恩涡，涡旋运动增强了管内流体的横向对流；对于过渡区流体来说，弯管效应加剧了流体的对流混合以及流体分离。由于对流或者流分离的作用，经过弯管的流体存在着显著的涡量耗散，直接导致了速度环量在弯管段的降低现象。

## 5 结论

采用数值方法，分别在极坐标系和笛卡尔坐标系下对迪恩涡进行了数学描述，并以 $90^\circ$ 的 $\phi 50$ 弯管为例，借助 CFD 技术对迪恩涡的运动规律进行了研究。结果表明：

1) 不同的迪恩数时，弯管内流体的径向速度在 $15^\circ\sim 75^\circ$ 截面上变化较小，而在弯管入口段和出口段处径向速度却出现剧增现象，且进口速度越大，增大程度也越大；

2) 迪恩涡的轴向速度在弯管段呈近似波状变化，进口速度越大，波动越剧烈；

3) 迪恩涡运动中由于流体的横向对流作用，存在着涡量耗散现象，导致了弯管段速度环量的降低。

### 参考文献：

- [1] Felipe Gallego, Subhash N Shah. Friction Pressure Correlations for Turbulent Flow of Drag Reducing Polymer Solutions in Straight and Coiled Tubing[J]. Journal of Petroleum Science and Engineering, 2009 (65): 147-161.
- [2] 湛含辉, 朱 辉, 付峥嵘. 迪恩涡强化传热技术的初步实

验研究[J]. 节能, 2009(3): 21-24.

- Zhan Hanhui, Zhu Hui, Fu Zhengrong. Primary Experimental Study on Heat Transfer Enhancement by Dean Vortices[J]. Energy Conservation, 2009(3): 21-24.
- [3] Dean W R. Note on the Motion of Fluid in a Curved Pipe [J]. Philosophical Magazine, 1927 (20): 208-223.
- [4] Dean W R. Fluid Motion in a Curved Channel[J]. Proceedings of the Royal Society of London: Series A, 1928, 121(787): 402-420.
- [5] John Eustice. Flow of Water in Curved Pipes[J]. Proceedings of Royal Society of London: Series A, 1910(84): 107-118.
- [6] John Eustice. Experiments on Stream-Line Motion in Curved Pipes[J]. Proceedings of Royal Society of London: Series A, 1911(85): 119-131.
- [7] Moll R, Moulin Ph, Veyret D, et al. Numerical Simulation of Dean Vortices: Fluid Trajectories[J]. Journal of Membrane Science, 2002(197): 157-172.
- [8] Jonas Bolinder C, Bengt Sunden. Flow Visualization and LDV Measurements of Laminar Flow in a Helical Square Duct with Finite Pitch[J]. Experimental Thermal and Fluid Science, 1995 (11): 348-363.
- [9] 湛含辉, 成 浩, 刘建文, 等. 二次流原理[M]. 长沙: 中南大学出版社, 2006: 8-9.
- Zhan Hanhui, Cheng Hao, Liu Jianwen, et al. Secondary Flow Theory[M]. Changsha: Central South University Press, 2006: 8-9.
- [10] Patankar S V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow[M]. New York: Hemisphere Publishing Co, 1980: 11-15.
- [11] 文海刚. 管道扩张室的数值模拟与形状优化[J]. 湖南工业大学学报, 2008, 22(4): 72-74.
- Wen Haigang. Numerical Simulation and Optimization for Expansion-Chamber of Pipeline[J]. Journal of Hunan University of Technology, 2008, 22(4): 72-74.

(责任编辑: 张亦静)