$Z_n[\omega]$的零因子图

徐承杰[1]，阳凌云[2]

（1. 广西师范大学 数学科学学院，广西 桂林 541004；2. 湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412000）

摘　要：从同余（mod 3）的角度对 n 的素分解式分类，利用数论及环论知识，离散地讨论了代数整数环的模 n 剩余类环 $Z_n[\omega]$零因子图，得到了这个图的直径、平面性与围长，从而使得 $Z_n[\omega]$抽象的零因子结构有了比较形象的几何直观。

关键词：$Z_n[\omega]$；零因子图；直径；平面性；围长

中图分类号：O153.3　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2009)02-0017-03

Analysis of Zero-Divisor Graph of $Z_n[\omega]$

Xu Chengjie[1]，Yang Lingyun[2]

（1. School of Mathematical Science，Guangxi Normal University，Guilin Guangxi 541004，China；
2. School of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412000，China）

Abstract: By classifying the prime factorization of n by congruence relation(mod 3), the zero divisor graph of $Z_n[\omega]$ is dispersely discussed at the base of arithematic knowledge and ring theory .Good results of diameter, planarity and the girth of $\Gamma(Z_n[\omega])$ are obtained, which is good for making a visual geometrical graphics of zero divisor structure of $Z_n[\omega]$.

Key words: $Z_n[\omega]$; zero divisor graph; diameter; planarity girth

环的零因子图的研究，建立了环论与图论两大数学分支之间的联系。环的零因子图的定义首先是由I.Beck在文献[1]中给出，但他的主要兴趣是研究环的零因子图的着色问题。D.F.Anderson和P.S.Livingston在文献[2]中修改了I.Beck在文献[1]中所给的定义，此后换的零因子图成为了热门话题。本文受文献[3-5]的影响，给出了代数整数环$Z[\omega]$的剩余类环$Z_n[\omega]$的零因子图$\Gamma(Z_n[\omega])$的直径、平面性与围长，其中$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$为$x^3=1$的1个根。

如不作特殊说明，本文所指环均为含幺交换环，用p表示1个素数，R_{specr}为环的素谱，$R_{\max}$为环的极大谱，R_{jacbson}是环的根，(a)表示由a生成的主理想；$D(R)$表示环R的零因子集合，$U(R)$则是环R的单位乘群；图G上2点x，y之间的距离是指x到y之间所有路径中最短路的长度，记为$d(x, y)$；图G的直径$G_{\mathrm{diam}}=\mathrm{up}\{d(x,y)|x,y\in V(G)\}$，图$G$中与$x$相连的点的集合称为$x$的邻域，记为$N(x)$，称$G$为平面图，如果它能画在平面上且它的所有边只在端点处相交。有关图论知识参见文献[6]。

1　预备知识

定义1　令环R的非零零因子集合$D(R)^*$为环R的零因子图$\Gamma(R)$的顶点集，并且2个不同的顶点x和y有1条边相连，当且仅当$xy=0$。

首先给出环$Z_n[\omega]$的零因子图的几个简单例子。

例1　$R=Z_2[\omega]=\{0,1,\omega,1+\omega\}$为域，故$\Gamma(Z_2[\omega])$为空图，易验证$Z_5[\omega]$是1个域，其零因子图也是1个空图。

例2　$R=Z_3[\omega]=\{0, 1, 2, \omega, 2\omega, 1+\omega, 2+\omega, 1+2\omega, 2+2\omega\}$，

收稿日期：2008-11-20
基金项目：广西壮族自治区自然科学基金资助项目（0832103）
作者简介：徐承杰（1982-），男，湖北汉川人，广西师范大学硕士研究生，主要研究方向为代数学及其应用，
E-mail：xu-chengjie@163.com

其零因子集$D(R)$={0, 1+2ω, 2+ω}，单位乘群$U(R)$={1, 2, ω, 2ω, 1+ω, 2+2ω}，此时$\Gamma(R)\cong\Gamma\left(\frac{Z_3[x]}{x^2}\right)$，$\Gamma(Z_3[\omega])$是直径为1，围长为∞的平面图。虽然如此，但$R\cong\frac{Z_3[x]}{x^2+x+1}$却并不同构于$\frac{Z_3[x]}{x^2}$。

例3 R=$Z_4[\omega]$={0, 1, 2, 3, ω, 2ω, 3ω, 1+ω, 1+2ω, 1+3ω, 2+ω, 2+2ω,2+3ω,3+ω, 3+2ω, 3+3ω}，

$D(R)$={0, 2, 2ω, 2+2ω}，$U(R)$=R−$D(R)$，

此时$\Gamma(R)\cong\Gamma\frac{F_4[x]}{x^2}$，其零因子图是1个三角形。

引理1[2] 设R为交换环，则$\Gamma(R)$是连通的，且$\Gamma(R)_{\mathrm{diam}}\leq 3$。

引理2[3] 设R是有限环，且$R\cong R_1\oplus\cdots\oplus R_n$，其中$R_i$（$i$=1, …, n）是局部环，则

1）$n\geq 4$时，$\Gamma(R)$不是平面图；

2）n=3时，如果R_i（i=1, 2, 3）中有1个至少有4个元素，则$\Gamma(R)$不是平面图；

3）n=2时，$|R_i|\geq 4$（i=1, 2），则$\Gamma(R)$不是平面图。

注：事实上，注意到一个图若含$K_{3,3}$，则这个图必定不是平面图，容易证明即使引理2中的R_i不是局部环，结论也是成立的。

引理3[3] 设（R, m）是有限局部环，$m\neq 0$，$\left|\frac{R}{m}\right|=3$，如果$|R|\geq 28$，则$\Gamma(R)$不是平面图。

引理4[3] 设（R, m）是有限局部环，$m\neq 0$，$\left|\frac{R}{m}\right|\geq 4$，如果$|R|\geq 26$，或$|m|\geq 7$则$\Gamma(R)$不是平面图。

引理5[2] 设R是Artin环，如果$\Gamma(R)$中包含圈，则$2<\Gamma(R)_{\mathrm{gr}}\leq 4$。

2 主要结果及证明

定理1 设R=$Z_n[\omega]$，则

1）当n的素因子个数为1时，即n=p^k，分3种情况讨论：

Ⅰ）p=3，若k=1，则$\Gamma(R)_{\mathrm{diam}}$=1；若$k\geq 2$，则$\Gamma(R)_{\mathrm{diam}}$=2。

Ⅱ）$p\equiv 1(\mathrm{mod}3)$，若k=1，则$\Gamma(R)$为完全二部图，从而$\Gamma(R)_{\mathrm{diam}}$=2；若$k\geq 2$，$\Gamma(R)_{\mathrm{diam}}$=3。

Ⅲ）$p\equiv 2(\mathrm{mod}3)$，若k=1，则R为域，从而$\Gamma(R)$为空图；若k=2，则$\Gamma(R)_{\mathrm{diam}}$=1；若$k\geq 3$，$\Gamma(R)_{\mathrm{diam}}$=2。

2）当n的素因子个数≥2时，仅当n=p_1p_2，$p_i\equiv 2(\mathrm{mod}3)$为素数时($i$=1, 2)，$\Gamma(R)_{\mathrm{diam}}$=2，其它情况下$\Gamma(R)_{\mathrm{diam}}$=3。

证明 1）当n的素因子个数为1时，n=p^k（p是素数，k是正整数）。

Ⅰ）p=3。当k=1时，由例2可知$\Gamma(R)_{\mathrm{diam}}$=1。

当$k\geq 2$时，由文献[5]可知：$Z_n[\omega]$为局部环，其唯一极大理想为（1−ω），故$D(R)=\{(1-\omega)r\,|\,r\in R\}$，因为$k\geq 2$，故$(1-\omega)(2+\omega)\neq 0$，所以$\Gamma(R)_{\mathrm{diam}}\geq 2$；另一方面，因为$3^{k-1}(2+\omega)\in D(R)^*$，且$\forall(1-\omega)\alpha\in D(R)^*$，都有$3^{k-1}(2+\omega)(1-\omega)\alpha=3^k\omega=0$，所以$\Gamma(R)_{\mathrm{diam}}$=2。

Ⅱ）$p\equiv 1(\mathrm{mod}3)$，由文献[5]可知：当k=1时，$p=\alpha\cdot\bar{\alpha}$，且$\alpha$与$\bar{\alpha}$都是$p$的互素的素因子$D(R)=m_1\cup m_2$，易知$R$为2个域的直和，$\Gamma(R)$为完全二部图，故$\Gamma(R)_{\mathrm{diam}}$=2；当$k\geq 2$时，$\alpha,\bar{\alpha}\in D(R)^*$，显然$\alpha\cdot\bar{\alpha}=p\neq 0$，并且$N(\alpha)=\{rp^{k-1}\bar{\alpha}\,|\,r\in R$，且$r$不整除$\alpha\}$，

$N(\bar{\alpha})=\{rp^{k-1}\alpha\,|\,r\in R$，且$r$不整除$\bar{\alpha}\}$，易知$N(\alpha)\cap N(\bar{\alpha})=\phi$，所以$d(\alpha,\bar{\alpha})\geq 3$，但由引理1可知$\Gamma(R)_{\mathrm{diam}}\leq 3$，故$k\geq 2$，$\Gamma(R)_{\mathrm{diam}}$=3。

Ⅲ）$p\equiv 2(\mathrm{mod}3)$，当k=1时，R为域，$\Gamma(R)$为空图；由文献[5]可知：当k=2时，$D(R)=\{p\alpha\,|\,\alpha\in R\}$，因$\forall\alpha,\beta\in R$，都有$p\alpha\cdot p\beta=p^2\alpha\beta=0$，故$\Gamma(R)_{\mathrm{diam}}$=1；当$k\geq 2$时，$p\cdot p\omega\neq 0$，但$\forall\alpha$，$p^{k-1}\cdot p\alpha=p^k\alpha=0$，所以$\Gamma(R)_{\mathrm{diam}}$=2。

2）当n的素因子个数≥2时，设$n=p_1^{k_1}\cdots p_s^{k_s}$，$k_i\geq 1$，$i$=1, …, s，则可分为以下2种情况：

Ⅰ）$s\geq 3$时，$p_1,p_2\in D(R)^*$，

$N(p_1)=\{p_1^{k_1-1}p_2^{k_2}\cdots p_s^{k_s}\alpha\,|\,p_1$不能整除$\alpha\}$，

$N(p_2)=\{p_1^{k_1}p_2^{k_2-1}\cdots p_s^{k_s}\alpha\,|\,p_2$不能整除$\alpha\}$，

由于$p_1p_2\neq 0$，且$N(p_1)\cap N(p_1)=\Phi$，所以$d(p_1, p_2)\geq 3$，由引理1再可知$\Gamma(R)_{\mathrm{diam}}$=3。

Ⅱ）s=3时，$n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}$，有p_1，$p_2\in D(R)^*$，又可分为2种情形：

情形1 k_1，k_2至少有1个大于1，不妨设$k_1\geq 2$，

$N(p_1)=\{p_1^{k_1-1}p_2\alpha\,|\,p_1$不能整除$\alpha\}$，

$N(p_2)=\{p^{k_1}\alpha\,|\,p_2$不能整除$\alpha\}$，

由于$p_1,p_2\neq 0$，$N(p_1)\cap N(p_2)=\Phi$，所以$d(p_1, p_2)\geq 3$，再由引理1可知$\Gamma(R)_{\mathrm{diam}}$=3。

情形2 k_1=k_2=1，n=p_1p_2，若p_1=3，则(1−ω), $p_2\in D(R)^*$, $N(1-\omega)$=$\{p_2(2+\omega)\alpha\,|$，1−ω不整除α, α∈$R\}$，$N(p_2)=\{3\alpha/\alpha\in R\}$，而$(1-\omega)p_2\neq 0$，$N(1-\omega)\cap N(p_2)=\Phi$，故$\Gamma(R)_{\mathrm{diam}}$=3。

若p_1，p_2中有1个不妨设$p_1\equiv 1(\mathrm{mod}3)$，则$p_1$有不可约分解为$p_1=\alpha\cdot\bar{\alpha}$，则$\alpha$，$p_2\in D(R)^*$，与上类似可得$\Gamma(R)_{\mathrm{diam}}$=3。

若$p_i\equiv 2(\mathrm{mod}3)$，$i$=1, 2, $Z_n[\omega]$= $Z_{p_1p_2}[\omega]\cong Z_{p_1}[\omega]\oplus Z_{p_2}[\omega]$，而$Z_{p_2}[\omega]$，$Z_{p_2}[\omega]$都是域，所以$\Gamma(R)$为完全二部图，$\Gamma(R)_{\mathrm{diam}}$=2。

定理2 设R=$Z_n[\omega]$，则

1）$\Gamma(R)$为空图⇔n=$p\equiv 2(\mathrm{mod}3)$是素数。

2）$\Gamma(R)$不是空图，则$\Gamma(R)$为平面图⇔n=3或4，其

它情况下 $\Gamma(R)$不是平面图。

证明　1）$\Gamma(R)$为空图$\Leftrightarrow R$为整环，一方面由于当 $n=p\equiv 2(\mathrm{mod}3)$时，$R$ 为域从而是整环，故 $\Gamma(R)$为空图；另一方面，$\Gamma(R)$是空图，则 $R=Z_n[\omega]$为整环，而有限整环必为域，故此时 R 为域，由文献[5]可证明 R 为域 $\Leftrightarrow n=p\equiv 2(\mathrm{mod}3)$是素数，从而 1）成立。

2）$n=3^{k_0}p_1^{k_1}\cdots p_s^{k_s}q_1^{l_1}\cdots q_t^{l_t}$，其中 $p_i\equiv 1(\mathrm{mod}3)$，$q_i\equiv 2(\mathrm{mod}3)$，$k_i,l_j\geq 1$ 是 n 的素分解标准式，则有以下 3 种情况：

I）$s\geq 2$，此时 R 分解为局部环的直和时，直和项多于 4 项，由引理 2 中的 1）知，$\Gamma(R)$不是平面图。

II）$s=1$，若 $t\geq 2$，R 分解为局部环的直和时直和项也多于 4 项，由引理 2 中的 1）知，$\Gamma(R)$也不是平面图；

若 $t=1$，$k_0\geq 1$，R 分解为局部环的直和时直和项数为 4，依然有 $\Gamma(R)$不是平面；

若 $t=1$，$k_0=0$ 或 $t=0$，$k_0\geq 1$，R 分解为局部环的直和时直和项数为 3，由引理 2 中的 2）知 $\Gamma(R)$不是平面图。

III）当 $s=0$ 时，若 $t\geq 4$ 或 $t=3$ 且 $k_0\geq 1$，则由引理 2 中的 1）知 $\Gamma(R)$不是平面图。

若 $t=3$ 且 $k_0=0$ 或者 $t=2$ 且 $k_0\geq 1$，则 R 分解为局部环的直和时直和项数为 3，由引理 2 中的 2）知 $\Gamma(R)$不是平面图。

若 $t=1$ 且 $k_0=0$，则 $n=q_1^{l_1}$，R 为局部环，当 $l_1=1$ 时，R 为域，$\Gamma(R)$为空图；当 $l_1\geq 2$ 时，由引理 3 知 $\Gamma(R)$不是平面图。

若 $t=0$ 且 $k_0\geq 1$，则 $n=3^{k_0}$，当 $k_0=1$，$\Gamma(R)$是平面图；当 $k_0\geq 2$ 时，$\frac{R}{m}=3,|R|=n^2\geq 28$，由引理 3 知 $\Gamma(R)$不是平面图。

定理 3　设 $R=Z_n[\omega]$，R 为有限环，因而是 Artin，则

1）$n=3$ 或 $n=p\equiv 2(\mathrm{mod}3)$时，$\Gamma(R)_{\mathrm{gr}}=\infty$。

2）$n=p_1p_2$，$p_i\equiv 2(\mathrm{mod}3)$或者，$n=p\equiv 1(\mathrm{mod}3)$时，$\Gamma(R)_{\mathrm{gr}}=4$。

3）其它情况下，$\Gamma(R)_{\mathrm{gr}}=3$。

证明　设 $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_s^{k_s}$是 n 的标准素分解式，令 $v_i=\frac{n}{p_i}$，$i=1,\cdots,s$，则可分为如下 3 种情形：

情形 1　当 $s\geq 3$ 时，$v_1-v_2-v_3-v_1$ 是 $\Gamma(R)$中长为 3 的圈，所以 $\Gamma(R)_{\mathrm{gr}}=3$。

情形 2　当 $s=2$ 时，若 k_1，k_2 中有 1 个大于 1，不妨设 $k_1\geq 2$，由于 $v_1\cdot v_1=\frac{n}{p_1}\cdot\frac{n}{p_1}=\frac{n}{p_1^2}\cdot n=p_1^{k_1-2}p_2^{k_2}\cdots p_s^{k_s}\cdot n$，因而 $v_1-v_1\omega-v_1(1+\omega)-v_1$ 是 $\Gamma(R)$中长为 3 的圈，所以 $\Gamma(R)_{\mathrm{gr}}=3$。

若 $k_1=k_2=1$，即 $n=p_1p_2$，当 p_1，p_2 中至少有 1 个，不妨设为 $p_1\equiv 1(\mathrm{mod}3)$时，再设 $p_1=\alpha\bar{\alpha}$为 p_1 在 $Z[\omega]$中的不可约分解，则 $\alpha p_2-\bar{\alpha}p_2-p_1-\alpha p_2$为 $\Gamma(R)$中长为 3 的圈，所以 $\Gamma(R)_{\mathrm{gr}}=3$；当 $p_i\equiv 2(\mathrm{mod}3)$ 时（$i=1,2$），$\Gamma(R)$为完全二部图，所以 $\Gamma(R)_{\mathrm{gr}}=4$；当 $n=3p$, $p\equiv 2(\mathrm{mod}3)$时，$Z_n[\omega]\cong Z_3[\omega]\oplus Z_p[\omega]$，$\Gamma(R)$中有圈$(1+2\omega,0)-(0,\alpha)-(2+\omega,0)-(1+2\alpha,0)$，其中 $\alpha\in Z_p[\omega]$，所以 $\Gamma(R)_{\mathrm{gr}}=3$。

情形 3　当 $s=1$ 时，若 $n=3^k$，当 $k=1$ 时，$\Gamma(R)$中无圈，所以 $\Gamma(R)_{\mathrm{gr}}=\infty$；当 $k\geq 2$ 时，$3^{k-1}-3^{k-1}\omega-3^{k-1}(1+\omega)-3^{k-1}$ 就是 $\Gamma(R)$中的 1 个圈，所以 $\Gamma(R)_{\mathrm{gr}}=3$。

若 $n=p^k$, $p\equiv 1(\mathrm{mod}3)$，当 $k=1$ 时，$\Gamma(R)$为完全二部图，所以 $\Gamma(R)_{\mathrm{gr}}=4$；当 $k\geq 2$ 时，$p^{k-1}-p^{k-1}\alpha-p^{k-1}\bar{\alpha}-p^{k-1}$ 是 $\Gamma(R)$中的 1 个圈，所以 $\Gamma(R)_{\mathrm{gr}}=3$。

若 $n=p^k$, $p\equiv 2(\mathrm{mod}3)$，当 $k=1$ 时，R 为域，$\Gamma(R)$是空图，所以 $\Gamma(R)_{\mathrm{gr}}=\infty$；当 $k\geq 2$ 时，$p^{k-1}-p^{k-1}\omega-p^{k-1}(1+\omega)-p^{k-1}$ 为 $\Gamma(R)$中的 1 个圈，这是因为 $p^{2k-2}=p^k\cdot p^{k-2}$，所以 $\Gamma(R)_{\mathrm{gr}}=3$。

综上，定理 3 成立。

参考文献：

[1] Beck I. Coloring of Commutative Rings[J]. J.Algebra，1988，116：208-226.

[2] Anderson D F，Livingston P S. The Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring[J]. J.Algebra，1999，217：434-447.

[3] Akbari S，Maimani H R，Yassemi S. When a Zero-Divisor Graph is Planar or a Complete R-Partite Graph[J]. J.Algebra，2003，270：169-180.

[4] 唐高华，苏华东，赵寿祥. $Z_n[i]$的零因子图性质[J]. 广西师范大学学报：自然科学版，2007，25(3)：32-35.
Tang Gaohua，Su Huadong，Zhao Shouxiang. Properties of Zero-Divisor Graph of $Z_n[i]$[J]. Journal of Guangxi Normal University：Natural Science Edition，2007，25(3)：32-35.

[5] 于　萍，欧晓斌. 代数整数环$Z[\omega]$的素元及剩余类环[J]. 西安文理学院学报：自然科学版，2007，10(3)：111-113.
Yu Ping，Ou Xiaobin. Simple Element and Residue Class Ring of Algebraic Integer Ring Z[ω][J]. Journal of Xi′an University of Arts & Science：Natural Science Edition，2007，10(3)：111-113.

[6] 王树禾. 图论[M]. 北京：科学出版社，2004.
Wang Shuhe. Graph Theory[M]. Beijing：Science Press，2004.

[7] 杨子胥. 近世代数[M]. 北京：高等教育出版社，2003.
Yang Zixu. Abstract Algebra[M]. Beijing：Higher Educaion Press，2003.

[8] Jacobson N. Basic Algebra[M]. New York：[s.n.]，1980.

[9] 宋光天. 交换代数导引[M]. 合肥：中国科学技术大学出版社，2002.
Song Guangtian. Introduction to Communicative Alge-Bra[M]. Hefei：University of Science and Technology of China Press，2002.

（责任编辑：张亦静）