

TOPSIS 夹角度量排序法的有效性探究

罗加蓉, 张明善, 邓书玲

(西南民族大学 管理学院, 四川 成都 610041)

摘要: 对夹角度量排序法和 TOPSIS 法进行了对比研究, 通过实例说明了应用夹角度量排序法进行决策时可能出现错误的结果, 用直观图从理论上深入剖析了该法在特定条件下产生错误结果的原因。

关键词: TOPSIS 法; 夹角度量排序法; 对比研究; 有效性

中图分类号: N945.17

文献标识码: A

文章编号: 1673-9833(2009)01-0103-04

Study on the Validity of the TOPSIS Angle Measure Sorting Method

Luo Jiarong, Zhang Mingshan, Deng Shuling

(School of Management, Southwest University for Nationalities, Chendu 610041, China)

Abstract: By illustrating the results which may be invalid results when the angle measure sorting method is used in decision making, a comparative research is carried on between the method of angle measure sorting method and the TOPSIS. In addition, it further explores the causes of the invalidity theoretically with visual diagrams.

Key words: TOPSIS method; angle measure sorting method; comparative study; validity

0 引言

TOPSIS (Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution) 法由 Hwang, Yoon 在 1981 年提出^[1]。Hwang & Yoon 按照决策者所给定信息的不同类型, 把现有的多属性决策 (Multiple Attribute Decision Making, 简称 MADM) 方法分为 3 大类: 1) 不知任何偏好 (对方案或属性的偏好) 信息的方法; 2) 已知属性偏好信息的方法; 3) 已知方案偏好的方法。TOPSIS 法就是用于解决已知属性偏好信息的多属性决策问题的一种方法。

在确定属性偏好信息的多属性决策方法中, TOPSIS 法是一种有效的方法, 广泛应用于实际的决策中。该法的基本思想是: 所选择的方案应该与理想解有最短的距离、与负理想解有最长的距离, 通过定义一种与理想解的相对贴近度, 可简单地产生所有方案

的一个无可争辩的排序。TOPSIS 法是用欧式距离计算各方案与理想解和负理想解的距离, 当 $d_i^* = d_j^*$, $d_i^- = d_j^-$ 时, 相对贴近度 $C_i = C_j$, x_i 与 x_j 不可比, 此时不能得到所有方案的一个完全序。在对 TOPSIS 法改进的尝试过程中, 学者刘树林^[2]利用方案 x_i 与理想解 x^* 和负理想解 x^- 的夹角 θ_i^* 和 θ_i^- , 定义了一种新的与理想解的贴近度, 所得方法称为夹角度量排序法。虽然文献^[3]发现了该方法的理论错误, 并进行了改进, 但笔者发现, 改进后的夹角度量排序法仍然没能解决该法存在的缺陷。本文将通过一个经典实例对夹角度量排序法的有效性进行验证, 并从理论上解释产生这种无效结果的原因。

1 TOPSIS 法概要^[4]

TOPSIS 法是逼近理想解的排序方法, 它借助多属

收稿日期: 2008-11-27

作者简介: 罗加蓉 (1980-), 女, 四川德阳人, 西南民族大学硕士研究生, 主要研究方向为决策理论与方法, 系统科学,

E-mail: cuteyaomei@163.com;

张明善 (1963-), 男, 四川西充人, 西南民族大学教授, 博士后, 硕士生导师, 主要研究方向为决策理论, 系统科学, 组合优化理论和数量经济分析。

性决策 (MADM) 的理想解和负理想解给方案集 X 中各方案排序。记 $M=\{1,2,\dots,m\}$, $N=\{1,2,\dots,n\}$, 设MADM问题的决策矩阵为 $D=(x_{ij})_{m \times n}$, 方案集为 $X=(x_1, x_2, \dots, x_m)$, 方案 x_i 可记为 $x_i=(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im})$, ($i \in M$); T_1 和 T_2 分别是收益型、成本型属性 (指标) 的下标的集合, $T_1 \cup T_2=N$. 设 f_j 表示第 j 个属性, 属性集 (或评价指标集) 为 $G=\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, 而 $X_{ij}=f_j(x_i)$ ($i \in M, j \in N$) 是方案 x_i 在属性 f_j 下的属性值, 规定 $x_{ij} \geq 0$; 属性的权重向量为 $W=(w_1, w_2, \dots, w_n)$, 满足 $\sum_{i=1}^n \omega_j = 1$.

定义 理想解是由所有属性的最好值组成, 而负理想解是由所有属性的最坏值组成的。

TOPSIS法的具体算法如下:

第一步: 用向量规范化的方法构造标准化决策矩阵 $Y=(y_{ij})_{m \times n}$, 其中

$$y_{ij} = x_{ij} / \sqrt{\sum_{i=1}^m x_{ij}^2}, i \in M, j \in N. \quad (1)$$

第二步: 构造加权的标准化决策矩阵 $Z=(z_{ij})_{m \times n}$, 其中, $z_{ij}=\omega_j y_{ij}$, $i \in M, j \in N$.

第三步: 确定理想解 x^* 和负理想解 x^- . 定义 2 个虚拟方案 (理想方案和负理想方案)

$$x^*=(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*), \quad x^-=(x_1^-, x_2^-, \dots, x_n^-), \quad (3)$$

其中, $x_j^* = \max_i z_{ij}$, $j \in T_1$; $x_j^- = \min_i z_{ij}$, $j \in T_2$;

$$x_j^- = \min_i z_{ij}, j \in T_1; \quad x_j^* = \max_i z_{ij}, j \in T_2.$$

第四步: 计算各方案到理想解和负理想解的欧氏距离 d_i^* 和 d_i^- ,

$$d_i^* = \|z_i - x^*\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n (z_{ij} - x_j^*)^2}, i \in M, \quad (4)$$

$$d_i^- = \|z_i - x^-\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n (z_{ij} - x_j^-)^2}, i \in M; \quad (5)$$

这里 $z_i = (z_{i1}, z_{i2}, \dots, z_{in})$ 是与方案 x_i 相应的加权标准化决策矩阵 $Z=(z_{ij})_{m \times n}$ 的第 i 行。

第五步: 计算各方案与理想解的相对贴度 C_i , $C_i = d_i^- / (d_i^* + d_i^-)$, $i \in M$.

第六步: 排列方案的优先序, 按照 C_i 由大到小排列, 前面的优于后面的。

2 夹角度量排序法

在文献[2]中, 利用方案 x_i 相应的加权标准化决策矩阵 $Z=(z_{ij})_{m \times n}$ 的第 i 行分别与理想解 x^* 和负理想解 x^- 的夹角 θ_i^* 和 θ_i^- , 定义了一种新的与理想解的贴度, 然后据此贴度把所有方案进行排序。所得到的方法称作夹角度量排序法。

首先, 有 $\theta_i^* = \arccos(x^* z_i^t / \|z_i\| \|x^*\|)$, $i \in M$; (7)

$$\theta_i^- = \arccos(x^- z_i^t / \|z_i\| \|x^-\|), i \in M. \quad (8)$$

式 (7)、(8) 中, $z_i = (z_{i1}, z_{i2}, \dots, z_{in})$, 它是与方案 x_i 相应的加权标准化决策矩阵 $Z=(z_{ij})_{m \times n}$ 的第 i 行。再利用 θ_i^* 和 θ_i^- 定义:

$$C_i = \theta_i / (\theta_i^* - \theta_i^-), i \in M. \quad (9)$$

排序原理为 C_i 越大, 则相应的方案 x_i 越好。

若 $C_i=C_j$ 则可用 θ_i^* 和 θ_j^* 区别方案 x_i 和 x_j 的优劣, 且夹角小者为好。

夹角度量排序法的基本步骤:

前 3 步与 TOPSIS 法完全相同。

第四步: 由式 (7) 和 (8) 计算各方案与理想解和负理想解的夹角 θ_i^* 和 θ_i^- 。

第五步: 由式 (9) 计算各方案与理想解的相对贴度 C_i 。

第六步: 排列方案的优先序, 按照 C_i 由大到小排列相应的方案, 前面的优于后面的。

3 夹角度量排序法的有效性验证

3.1 实例验证

为便于比较, 采用文献[5]中研究生院试评估。

例 1 为了客观地评价我国研究生教育的实际状况和各研究生院的教育质量, 国务院学位委员会办公室组织过一次研究生院的评估。为了取得经验, 先选 5 所研究生院, 收集有关数据资料进行试评估。表 1 中所给出的是为了介绍各种数据处理方法的需要而选的几种典型属性和经过调整了的数据。表 2 为表 1 中各数据经过一系列预处理的结果。

表 1 研究生院试评估的部分数据

Tab. 1 Some data of testing evaluation for postgraduate school

i	j			
	人均专著 y_1 /(本·人 ⁻¹)	师生比 y_2	科研经费 y_3 /(万元·年 ⁻¹)	逾毕业率 y_4 /(%)
1	0.1	5	5 000	4.7
2	0.2	7	4 000	2.2
3	0.6	10	1 260	3.0
4	0.3	4	3 000	3.9
5	2.8	2	284	1.2

表 2 表 1 经过数据预处理的结果

Tab. 2 Results of preprocessing after table 1

i	j			
	$z_1(y_1)$	$z_2(y_2')$	$z_3(y_3)$	$z_4(y_4)$
1	0.595 0	1.000 0	1.000 0	0.000 0
2	0.610 0	0.833 3	0.800 0	0.531 9
3	0.670 0	0.333 3	0.252 0	0.361 7
4	0.625 0	0.666 6	0.600 0	0.170 2
5	1.000 0	0.000 0	0.056 8	0.744 7

1) 用普通的加权和法求解例 1。

设 $\omega=(0.2, 0.3, 0.4, 0.1)$, 则结果是: $C_1=0.819 0$, $C_2=0.745 2$, $C_3=0.378 2$, $C_4=0.582 0$, $C_5=0.297 2$ 。

由 C_i 的值可确定各方案的排序为:

$$x_1 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_3 \succ x_5$$

2) 用 TOPSIS 法求解例 1。

第一步: 对表 1 所示属性向量规范化, 所得属性矩阵见表 3。

表 3 表 1 向量规范化的结果

Tab. 3 Results of table one's vector standardization

i	j			
	$z_1(y_1)$	$z_3(y_3)$	$z_4(y_4)$	$z_2(y_2')$
1	0.034 6	0.695 6	0.648 2	0.666 6
2	0.069 3	0.556 5	0.303 4	0.555 5
3	0.207 8	0.175 3	0.413 7	0.222 2
4	0.103 9	0.417 4	0.537 8	0.444 4
5	0.969 5	0.039 8	0.165 5	0.000 0

第二步: 设权向量仍为 $\omega=(0.2, 0.3, 0.4, 0.1)$, 得加权的向量规范化属性矩阵见表 4。

表 4 表 3 加权后的结果

Tab. 4 Result after table three's weighted processing

i	j			
	z_1'	z_3'	z_4'	z_2'
1	0.006 92	0.200 00	0.278 24	0.064 82
2	0.013 86	0.166 67	0.222 60	0.030 34
3	0.041 56	0.066 67	0.070 12	0.041 37
4	0.020 79	0.133 33	0.166 96	0.053 78
5	0.193 90	0.000 00	0.015 92	0.016 55

第三步: 由表 4 可得:

理想解 $x^*=(0.193 90, 0.200 00, 0.278 24, 0.016 55)$;

负理想解 $x^-=(0.006 92, 0.000 00, 0.015 92, 0.064 82)$ 。

第四步: 分别用式 (4) 和 (5) 求各方案到理想解的距离和负理想解的距离, 见表 5。

表 5 各方案到理想解和负理想解的距离及相应的贴近度

Tab. 5 Distance between each scheme of ideal solution and negative ideal solution and their closeness degree

i	1	2	3	4	5
d_i^*	0.193 1	0.191 8	0.219 4	0.219 7	0.654 3
d_i^-	0.654 3	0.435 4	0.252 8	0.202 2	0.193 1
C_i	0.772 1	0.657 7	0.529 7	0.479 3	0.225 4

第五步: 由式 (6) 计算贴近度 C_i , 由 C_i 的大小可确定各方案的排序为:

$$x_3 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_1 \succ x_5$$

3) 用夹角度量排序法求解例 1。

前三步与 TOPSIS 法完全相同。

第四步: 分别用式 (7) 和 (8) 求各方案与理想解的夹角 θ_i^* 和负理想解的夹角 θ_i^- , 见表 6。

第五步: 用式 (9) 计算贴近度 C_i' , 由 C_i' 的大小可确定各方案的排序为:

$$x_3 \succ x_2 \succ x_4 \succ x_5 \succ x_1$$

表 6 各方案与理想解和负理想解的夹角及相应的贴近度

Tab. 6 Angle value of each scheme of ideal solution and negative ideal solution and their closeness degree

i	1	2	3	4	5
θ_i^*	1.190 927	1.267 884	1.002 573	1.133 592	1.411 996
θ_i^-	0.511 970	0.468 859	0.368 731	0.462 669	0.592 941
θ_i	0.699 354	0.730 035	0.731 109	0.710 155	0.704 259

这里用加权和法、TOPSIS 法、夹角度量排序法 3 种方法求解例 1。比较结果可知: 由加权和法与 TOPSIS 法所得各方案的排序相似, 只有方案 x_3 和 x_4 的顺序交换了一下, 但不影响决策人找到最佳方案 x_1 。而由夹角度量排序法得到的方案排序与前两种所得结果没有一处相同, 不仅顺序相差很大, 而前两种方法被认为是最佳方案的 x_1 在这里却成了最差的方案。所以夹角度量排序法并不是在任何条件下都是合理的。

3.2 理论剖析

TOPSIS 法的思路可以用图 1 来直观说明, 该图表示两个属性的决策问题, f_1 和 f_2 为加权的规范化属性, 均为效益型。方案集中有 5 个方案 $x_1 \sim x_5$, 根据它们的加权规范化属性值标出了在图中的位置, 并确定了理想解 x^* 和负理想解 x^- 。用各方案到理想解和负理想解的欧氏距离决定方案排序。

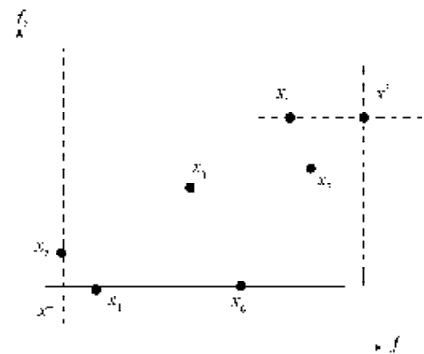


图 1 TOPSIS 法的思路图

Fig. 1 The thought diagram of TOPSIS method

由图 1 可知:

1) $d_4^*=d_5^*$; $d_4^- > d_5^-$, 则 $C_4 > C_5$, 所以 x_4 优于 x_5 。由图可知 d_4^* 也是最小的, d_4^- 是最大的, 则 x_4 应为最佳方案。

2) $d_1^* > d_5^*$; $d_1^- < d_5^-$, 则 $C_1 \ll C_5$, 明显 x_5 优于 x_1 , 但不是最佳方案。

3) $d_1^*=d_2^*$; $d_1^-=d_2^-$, 则 $C_1=C_2$, 所以 x_1 与 x_2 不可比。由图也可知 d_1^* 是最大的, d_1^- 是最小的, 那么 x_1 应是最差的方案。

通过图 2 可直观地理解夹角度量排序法的思路, 制图方法和前面一样, 在此根据各方案与理想解和负理想解的夹角进行排序。

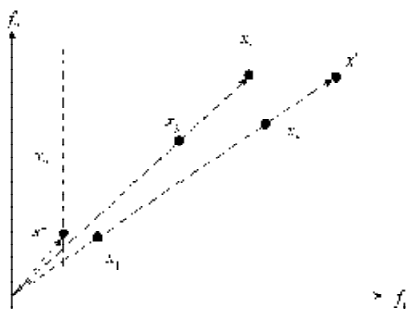


图2 夹角度量排序法的思路图

Fig. 2 The thought diagram of angle measure sorting method

由图2可知:

1) $\theta_1^* = \theta_5^* = 0$, 则 $C_1' = C_5' = 1$, 所以 x_1 和 x_5 不可比, 且都应该是最佳方案。

2) $\theta_3^* = \theta_4^*$; $\theta_3^- = \theta_4^-$, 则 $C_3' = C_4' \neq 1$, 所以 x_3 和 x_4 也不可比, 但不是最佳方案。

3) $\theta_1^* = 0$, $\theta_2^* \neq 0$, 则 $C_1' = 1$, $C_3' < 1$, 所以 x_1 优于 x_2 , 且 x_1 是最佳方案。

通过纵向比较可知, 这两种方法所得结果差异非常大。夹角度量排序法得出的结果为 x_1 和 x_5 不可比, 且都是最佳方案, 而 TOPSIS 法得出的结果却是 x_1 为最差的方案。这论证了为何例1运用夹角度量排序法得出的排序, 与应用 TOPSIS 法和加权平均法所得结果大相径庭。

文献[3]对夹角度量排序法的改进中, 提出了利用投影法的原理, 将方案 x_i 投影到正负理想解连线上得到该点的投影点 x'_i , 然后再按公式(7)~(9)计算出各方案的夹角贴适度。这种改进侧重于怎样去求夹角, 却还是不能避免出现笔者在前文所提出的现象。

4 结语

本文在研究夹角度量排序法的有效性时, 利用了实例和理论分析, 最后证实应用夹角度量法排序在某些特殊情况下会出现错误的结果。若决策者选择该法, 那么一定要注意避免出现本文所讨论的情况, 不然就会做出错误的判断。TOPSIS 法存在的局限并不会误导决策者, 且如果应用 TOPSIS 法不能对两方案排序时, 可以选择应用其他距离(比如城市街区距离)来代替欧式距离, 再进行重排序, 这样就可避免出现不可比的方案。总的说来, 还是选择 TOPSIS 法更有效。

参考文献:

- [1] Wang C L, Yoon K. Multiple Attribute Decision Making [M]. New York: Springer-Verlag, 1981.
- [2] 刘树林, 邱菀华. 多属性决策的 TOPSIS 夹角度量评价法 [J]. 系统工程理论与实践, 1996(7): 12-17.
Liu Shulin, Qiu Wanhua. The TOPSIS Angle Measure Evaluation Method of Multiple Attribute Decision Making [J]. Systems Engineering - Theory & Practice, 1996(7): 12-17.
- [3] 孔峰, 乞建勋, 刘鸿雁. 多属性决策问题中改进夹角度量法 [C]// 第二十四届中国控制会议论文集(下册). 广州: 华南理工大学出版社, 2005: 1702-1705.
Kong Feng, Qi Jianxun, Liu Hongyan. The Improved Angle Measure Method of the Multiple Attribute Decision Making [C]// The 24th Control Conference of China Symposium. Guangzhou: South China University of Technology Press, 2005: 1702-1705.
- [4] 刘树林. 多属性决策理论方法与应用研究 [D]. 北京: 北京航空航天大学, 1997: 62-63.
Liu Shulin. The Methods of the Multiple Attribute Decision Making Theory and Its Application [D]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 1997: 62-63.
- [5] 岳超源. 决策理论与方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2003: 193-205.
Yue Chaoyuan. Theory and Method of Decision Making [M]. Beijing: Science Press, 2003: 193-205.
- [6] 刘树林, 邱菀华. 多属性决策基础理论研究 [J]. 系统工程理论与实践, 1998(1): 38-43.
Liu Shulin, Qiu Wanhua. Study on the Basic Theory of Multiple Attribute Decision Making [J]. Systems Engineering - Theory & Practice, 1998(1): 38-43.
- [7] 乔永辉. 一种基于 TOPSIS 的多属性决策方法研究 [J]. 企业技术开发, 2006, 25(9): 89-91.
Qiao Yonghui. A Study for the Multi-Attribute Decision-Making Method Based on TOPSIS [J]. Technological Development of Enterprise, 2006, 25(9): 89-91.
- [8] 陈孝新. 对属性有偏好的多属性决策方法 [J]. 决策参考, 2007(4): 36-37.
Chen Xiaoxin. Method of Multiple Attribute Decision Making with Preference to Attributes [J]. Decision Reference, 2007(4): 36-37.

(责任编辑: 廖友媛)