一种线性三层规划的改进的 Frank-Wolf 解法

张美芳[1]，成央金[1]，邓胜岳[2]，徐林西[1]

（1. 湘潭大学 数学与计算科学学院，湖南 湘潭 411105；2. 湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412008）

摘　要：利用KT条件、罚函数法，将三层线性规划降为约束条件为线性的二层规划，再利用Frank-Wolf线性逼近的理论，从而仅需求解一层线性规划就得到了三层线性规划的最优解。其中线性规划的求解应用了主元标单纯形法，其优点是可以得到更靠近最优点的可行解，从而减少计算量。

关键词：三层线性规划；线性逼近；主元标；单纯形法；罚函数法

中图分类号：O221.1　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2009)01-0036-04

Improved Method of Frank-Wolf for Three-Levels Linear Programming Problem

Zhang Meifang[1]，Cheng Yangjin[1]，Deng Shengyue[2]，Xu Linxi[1]

(1. School of Mathematics and Computional Science，Xiangtan University，Xiangtan Hunan 411105，China；
2. School of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412008，China)

Abstract：KT Condition and the penalty function are used to turn linear three level programming problem into bilevel programming problem whose constraint conditions are linear. Then by using Frank-Wolf linear approximation theory, we obtain the optimal solution of the linear three level programming problem by solving linear programming. The principal pivot simplex method is used to solve linear programming. Its merit is to obtain the feasible solution which is to approach the optimal point, thus reduces the amount of computation.

Key words：three level linear programming; linear approximation; principal pivot; simplex method; penalty function

三层线性规划问题中，第一层的目标函数不仅与自己的决策变量有关，还依赖第二层规划问题的最优解，而第二层规划问题更为复杂，它不仅要考虑自身的决策变量，还要考虑上一层决策参数的影响，及下一层规划问题最优解对它的制约。因此，直接求解三层线性规划是比较复杂而又困难的问题，且国内外关于求解三层线性规划问题算法的文献较少[1,2]。文献[3，4]中的算法的思想是从可行域几何性质或利用割平面法等方面考虑。利用KT条件或罚函数法等将二层规划转化为一层规划是解决二层规划的有效思路，但较少用来解决三层规划问题。本文利用Frank-Wolf方法，将转化后的二层非线性规划进一步转化为等价的线性规划，再通过求解有限个线性规划并验证Frank- Wolf条件方程而得到系统的最优解，其特点在于实现了仅通过求解一层线性规划便得到三层线性规划问题最优解。且在计算线性规划时采用了主元标单纯形法[5,6]，其算法的优点，是对一般模型无需添加人工变量即可产生比原始单纯形法更接近于最优点的初始可行基，因而大大减少了计算量。

1　基本概念

本文考虑如下形式的线性三层规划问题：

收稿日期：2008-10-08

作者简介：张美芳（1984-），女，山东临沂人，湘潭大学硕士研究生，主要研究方向为多级规划和多目标决策，金融工程，E-mail：iamfeng1025@126.com；
成央金（1965-），男，湖南娄底人，湘潭大学教授，硕士生导师，主要从事多目标决策和金融工程等方面的研究.

$$
(TLP)_1\begin{cases}(P_1)\quad \max\limits_{x^1} f_1=a^{11}x^1+a^{12}x^2-a^{13}x^3,\\ \qquad\qquad \text{其中，当}x^1\text{给定时，}x^2\text{为}(P_2)\text{的解；}\\ (P_2)\quad \max\limits_{x^2} f_2=a^{22}x^2\quad a^{23}x^3,\\ \qquad\qquad \text{其中，当}x^1,x^2\text{给定时，}x^3\text{为}(P_3)\text{的解；}\\ (P_3)\quad \max\limits_{x^3} f_3=a^{33}x^3,\end{cases}
$$

满足约束 $A^1x^1+A^2x^2-A^3x^3>r$，其中 $a^{ij}\in R^{n_j}$，A^j 为 $m\times n_j$ 的矩阵，j=1,2,3，i=1,2,3。$r\in R^m$。$x^i\geq 0$，$i=1,2,3$。

针对 $(TLP)_1$ 给出一些基本概念：

i) $(TLP)_1$ 的容许集 S

$$S=\left\{(x^1,x^2,x^3)\,\middle|\,A^1x^1+A^2x^2+A^3x^3\geq r\right\},$$

其中：（x^1, x^2）叫做容许的，如果存在 $(x^1,x^2,x^3)\in S$；

x^1 叫做容许的，如果存在 $(x^1,x^2,x^3)\in S$。

本文假定 S 是非空有界的，且为闭的凸集。

ii) $(TLP)_1$ 的可行域

$\bar{x}=(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\bar{x}^3)\in S$ 叫做一级可行解，若对给定的 x^1，(x^1,x^2,x^3) 恰好为 (P_2) 的解；$\bar{x}=(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\bar{x}^3)\in S$ 叫做二级可行解，若对给定的 $\bar{x}^1,\bar{x}^2$，$(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\bar{x}^3)$ 恰好为 (P_3) 的解；所有 j 级可行解构成的集合 F_j 叫做 j 级可行域（j=1, 2,3），显然有 F_3=S。

为讨论问题方便，我们假定对每一个 j（j=1,2,3），给定容许的 (x^1,x^2,x^3) 后，(P_j) 有唯一解与之对应（j=1,2,3)。

iii) 对于 j=0,1,2,3，依次定义集合

$W_3=\left\{\omega^3\in R^m\,\middle|\,\omega^3A^3=a^{33},\omega^3\geq 0\right\}$，给定 $\omega^3\in W_3$；

$W_2=\left\{\omega^2\in R^m\,\middle|\,\exists\lambda_3\geq 0,\ \text{使}\left(\omega^2-\lambda_3\omega^3\right)A^k=a^{2k},\right.$

$\left.k=2,3,\ \omega^2\geq 0\right\}$，给定 $\omega^2\in W_2$，$\omega^3\in W_3$；

$W_1=\left\{\omega^1\in R^m\,\middle|\,\exists\lambda_3\geq 0,\lambda_2\geq 0,\ \text{使}\left(\omega^1\quad\lambda_2\omega^2\right.\right.$ $\left.\left.\lambda_3\omega^3\right)A^k=a^{1k},k=1,2,3,\ \omega^1\geq 0\right\}$。显然 W_j 为凸集（j=0,1, 2,3）。

iv) 对于 j=0,1,2,3，定义 S_3=F_3=S。

$S_j=\left\{x\in S\,\middle|\,\omega^i(Ax-r)=0,\omega^i\in W_i,i=j+1,\cdots,3\right\}$，$j$=0,1,2。

显然 $S_j(0\leq j\leq 3)$ 为 S 的一个面。

2　降层过程

以定理1为理论依据将线性三层规划转化为线性二层规划。

定理1　给定 x^1,x^2，$(x^1,x^2,x^3)\in F_2$ 当且仅当存在 $\omega^1\in W_3$，使得 $\omega^1(Ax-r)=0$，其中 $\omega^1\in W_3=\left\{\omega^1\in R^m\,\middle|\,\omega^1A^3=a^{33},\omega^1\geq 0\right\}$。具体证明参见文献[1]。

由上述定理可将 $(TLP)_1$ 转化为 $(BP)_1$ 式为：

$$
(BP)_1\begin{cases}(P_1)\quad \max\limits_{x^1} f_1=a^{11}x^1+a^{12}x^2+a^{13}x^3,\\ \qquad\qquad \text{其中当}x^1\text{给定时},x^2,x^3\text{为}(P_2)\text{的解；}\\ (P_2)\quad \max\limits_{x^2} f_2=a^{22}x^2+a^{23}x^3;\end{cases}
$$

满足约束：$A^1x^1+A^2x^2+A^3x^3\geq r$，　　（1）

$$\omega\left(A^1x^1+A^2x^2+A^3x^3-r\right)=0,\tag{2}$$

$$\omega A^3=a^{33}。\tag{3}$$

在上述 $(BP)_1$ 中，只有约束条件式（2）为非线性的，考虑以互不松弛条件（2）为罚函数项，则 $(BP)_1$ 可转化为 $(BP)_2$ 的形式：

$$
(BP)_2\begin{cases}(P_1)\quad \max\limits_{x^1} f_1=a^{11}x^1+a^{12}x^2+a^{13}x^3,\\ \qquad\qquad \text{其中当}x^1\text{给定时},x^2,x^3\text{为}(P_2)'\text{的解；}\\ (P_2)'\quad \max\limits_{x^2} f_2=a^{22}x^2+a^{23}x^3+\\ \qquad\qquad M\omega\left(A^1x^1+A^2x^2+A^3x^3-r\right)。\end{cases}
$$

满足约束：$A^1x^1+A^2x^2+A^3x^3>r$，　　（4）

$$\omega A^3=a^{33}。\tag{5}$$

对于 $(BP)_2$ 问题，先考虑下层规划 $(P_2)'$ 的形式，令 $z=\left(x^1,x^2,x^3,\omega\right)$，则

$$F(z)=a^{22}x^2+a^{23}x^3+M\omega\left(A^1x^1+A^2x^2+A^3x^3-r\right)。$$

假设 z_1 为 $(P_2)'$ 的任意可行点，将 $F(z)$ 在 z_1 处一阶 Taylor 展开，当 z_1 给定时，$F(z_1)$ 及 $\nabla F(z_1)z$ 均为定值。故可考虑：

$$
\mathrm{I}\begin{cases}\max F(z),\\ \text{s.t.}\,A^1x^1+A^2x^2+A^3x^3\geq r,\\ \omega A^3=a^{33},\end{cases}\quad
\mathrm{II}\begin{cases}\max \nabla F(z_1)z,\\ \text{s.t.}\,A^1x^1+A^2x^2+A^3x^3\geq r,\\ \omega A^3=a^{33},\end{cases}
$$

其中 $z_1=\left(\rho_0,\omega_0\right)$，$\rho_0=\left(x_0^1,x_0^2,x_0^3\right)$ 为求解

$$
\mathrm{III}\begin{cases}\max f_1,\\ \text{s.t.}\quad A^1x^1+A^2x^2+A^3x^3\geq r\end{cases}
$$

所得的一次最好解，

ω_0 由 $\mathrm{IV}\begin{cases}\max\left\{F(z_0)-\nabla F(z_0)z_0\right\},\\ \omega A^3=a^{33},\end{cases}$ 的最优解确定，其中 $z_0=\left(\rho_0,\omega\right)$。

注　I）和II）解的关系为：设II）的最优解为 z_1'，则有

1）若 $\nabla F\left(z_1\right)\left(z_1'-z_1\right)=0$，则 z_1 为I）的KT点；

2）若 $\nabla F\left(z_1\right)\left(z_1'-z_1\right)\neq 0$，则 $z_1'-z$ 为I）的可行下降方向。

此时 z_1 为满足约束条件I）和II）的基本可行点。

3　解的性质

下面的 $z_1=\left(\rho_0,\omega_0\right)$ 由上述讨论确定，不再注明。

定理 2 $z_1=(p_0,\omega_0)$为Ⅰ）的基本可行域P的一个极点。

证明 由条件Ⅲ）和Ⅳ）的形式可知，二者均为极大化线性规划形式，由线性规划知识可知，二者对应的可行域均为凸集，且二者对应的最优解均在各自可行域极点上达到，即p_0,ω_0分别为对应区域的极点。问题Ⅰ）的约束条件为Ⅲ）和Ⅳ）组合，故$z_1=(p_0,\omega_0)$为Ⅰ）的基本可行域P的一个极点。证毕。

定理 3 z_1也为问题Ⅱ）的一个基本可行解。

证明 由定理1知，z_1为Ⅰ）的可行域的一个极点，而Ⅰ）与Ⅱ）的约束条件相同，故其基本可行域也相同，又线性规划的基本可行解对应于可行域的极点，故z_1也为问题Ⅱ）的一个基本可行解。定理得证。

定理 4 若z_i为由Ⅲ）和Ⅳ）所确定的可行域上的一个极点，则z_i亦为Ⅱ）的一个基本可行解。

证明 由定理3的结论以及线性规划的知识可知，可行域的任一个极点可作为线性规划的一个基本可行解。得证。

定理 5 若z_i、z_{i+1}均为Ⅱ）的基本可行解，若满足$\nabla F(z_{i+1})(z_i-z_{i+1})=0$，则$z_{i+1}$为Ⅰ）的一个KT点。

证明 由Frank-Wolf方法原理及以上定理的结论可知，上述定理成立。

定理 6 对于问题$(BP)_2$，若$z_{i+1}=(p_i,\omega_i)$满足以下条件：1）P_i为Ⅲ）的基本可行解，2）z_{i+1}为Ⅰ）的一个KT点；则z_{i+1}为$(BP)_2$最优解，其中$p_i=(x_i^1,x_i^2,x_i^3)$，$\omega_i=(\omega_i^1,\omega_i^2,\cdots,\omega_i^m)$。

证明 由可行域的定义知，满足条件（1）的p_i必为问题$(BP)_2$的可行域的一个极点，且为对应一层目标函数的基本可行解。若z_{i+1}为Ⅰ）的一个KT点，即为问题$(BP)_2$的二层目标函数的最优点。即当二层规划问题$(BP)_2$的一层目标函数给定p_i中参数x_i^1时，二层目标函数在此参数下得到的最优解z_{i+1}，其对应于x的坐标与p_i相同，即二层目标函数在p_i点均取得最优值，故$(BP)_2$在该点取得最优解。

4 算法步骤

本算法在计算线性规划时采用主元标单纯形法[5-6]，其优点是可产生比原始单纯形法更接近于最优点的初始可行基，因此可相应减少计算量。针对$(TLP)_1$问题模型，依据上面的讨论可得计算步骤为：1）利用KT条件将$(TLP)_1$问题模型转化为$(BP)_1$问题模型；2）利用罚函数法将$(BP)_1$问题模型转化为$(BP)_2$问题模型；3）考虑下层规划$(P_2)'$的形式，令$z=(x^1,x^2,x^3,\omega)$，则$F(z)=a^{22}x^2+a^{23}x^3+M\omega(A^1x^1+A^2x^2+A^3x^3-r)$；4）计算问题模型Ⅲ），用主元标单纯形法求一次最好解，得$p_0=(x_0^1,x_0^2,x_0^3)$，令$z_0=(p_0,\omega)$，计算Ⅳ）确定ω_0，则可得$z_1=(p_0,\omega_0)$；5）计算问题模型Ⅱ），得$z_{i+1}=(p_i,\omega_i)$。若满足$\nabla F(z_i)(z_{i+1}-z_i)=0$，则$z_i$为Ⅰ）的KT点，否则转step6；6）考虑与$z_i$相邻的极点，验证$\nabla F(z_i)(z_i-z_j)=0$，其中$j\in G$，$G$为与$z_i$相邻极点的下标集，取满足上式的$z_i$组成集合$H$；7）将$H$中元素代入目标函数，比较目标函数值，即可得$(TLP)_1$的最优解。

5 数值例子

用本算法求解参考文献[1，3]中的例子。

例 1 求解三层规划的问题：

$$\begin{cases}(p_1)\ \max\limits_{x} f_1=-4x+2y-5z，当x给定，y,z为(p_2)的解；\\(p_2)\ \max\limits_{y} f_2=-y+4z，当x,y给定，z为(p_3)的解；\\(p_3)\ \max\limits_{z} f_3=2z。\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\quad -2y+z&\le -2,\\3x-y+z&\le 12,\\3y-z&\le 24,\\-x\qquad&\le -2,\\z&\le 6,\\x\ge 0,y\ge 0,z&\ge 0。\end{aligned}$$

解 1）将上述模型化为$(TLP)_1$的标准形式，然后依据step1和step2化为如下形式：

$$\begin{aligned}&p_1)\ \max_{x} f_1=-4x+2y-5z，当x给定，y,z为(p_2)的解；\\&p_2)\ \max_{y} f_2'=-y+4z+M[\omega_1(2y-z-2)+\\&\quad\omega_2(12-3x+y-z)+\omega_3(-3y-z+24)+\\&\quad\omega_4(x-2)+\omega_5(6-z)],\\&\quad\text{s.t.}\quad 2y-z\ge 2,\\&\qquad -3x+y-z\ge -12,\\&\qquad -3y-z\ge -24,\\&\qquad x\ge 2,\\&\qquad -z\ge -6,\\&\qquad x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0。\end{aligned}\tag{6}$$

$\omega\in W_0\{\omega\mid\omega A_3=a^{33}\}=\{\omega\ \ \omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4=2\}$。

2）令$F(Z)=f_2',Z=(x,y,z,\omega)$，取$M$=50；

3）计算一次最好解：$\max\limits_{z} f_1=-4x+2y-5z$，此处$x$、$y$、$z$的限定条件如式（6）所示。

对上述问题计算主元，得：$\alpha_1=-4,\alpha_2=2,\alpha_3=-5$，$\alpha_4=\dfrac{9\sqrt{5}}{5},\alpha_5=\dfrac{19\sqrt{11}}{11},\alpha_6=-\dfrac{\sqrt{10}}{10},\alpha_7=-4,\alpha_8=5$。按主元大小排列顺序，有$\alpha_5>\alpha_8>\alpha_4>\alpha_2>\alpha_6>\alpha_7=\alpha_1>\alpha_3$。

列单纯形表，由最钝角法则和无比检验原则确定进出基变量，由于计算过程中b_i列出现负数，故用无比检验规则确定主元继续进行旋转迭代，可得表1。

表1　最优表

Table l　The optimal table

基变量	非基变量								b_i
	x_4	*	z	*	*	x_3	*	*	
x_1	0	0	5/3	1	0	2/3	0	0	14
x_2	3	0	4/3	0	1	1/3	0	0	20
y	0	1	1/3	0	0	1/3	0	0	8
x	1	0	0	0	0	0	−1	0	2
x_5	0	0	−1	0	0	0	0	1	6

经检验可行性，得P_0=(2,8,0)为可行解，且最优。令$Z_0=(P_0,\omega)$，取M=50，计算

$$\max\{F(Z_0)-\nabla F(Z_0)Z_0\}=$$

$$\max\{-800\omega_1-100\omega_2+1\,200\omega_3\},$$

$$\text{s.t.}\quad \omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_5=0。$$

可得ω_0=(0,0,2,0)，得$z_1=(p_0,\omega_0)$=(2,8,0,0,0,2,0)，

$$\nabla F(Z_1)=(0,-301,96,700,0,0,300)。$$

4）计算

$$\max\nabla F(Z_1)Z=\max-301y-96z+700\omega_1-700\omega_2+300\omega_3,$$

s.t.　$\omega\in\omega_0$，x、y、z限定条件同式（6）。

易知ω=(2,0,0,0)或ω=(0,2,0,0)为最优基。因此可仅考虑$\max\nabla F(Z_1)Z=\max\{-301y+96z\}$，s.t. $\omega\in\omega_0$。x、y、z的限定条件同式（6）。

仍用主元标单纯形法求解，类似step4，可得：$Z_2=\left(\frac{13}{3},1,0,2,0,0,0\right)$。经检验知$\nabla F(Z_1)(Z_2-Z_1)\neq0$，故$Z_1$不是I）的KT点，即不为$F_2$中的点。

5）计算Z_1的相邻极点，考虑z_3=(2,6,6,2,0,0,0)，z_4=(2,1,0,2,0,0,0)，$z_5=\left(\frac{20}{3},8,0,2,0,0,0\right)$。分别验证$\nabla F(Z_i)(Z_1-Z_i)=0$是否成立，其中$Z_i=(P_i,\omega)$，$i$=3,4,5。

可知z_5满足上式，即z_5为I）的KT点，由定理6可知$p_5=\left(\frac{20}{3},8,0\right)$为$(TLP)_1$的最优点，而$p_1$=(2,8,0)为局部最优点，与文献[1，2]中的结果相同。

6　结语

本文考虑三层线性规划的改进的Frank-Wolf解法，将线性三层规划的递阶系统利用KT等价条件等将其降层，从而使已有一层线性规划相对完善的知识经推广或改进后，可得进一步应用。为从一层线性规划的角度考虑多层线性规划求解问题提供一点思路。

参考文献：

[1] Band J F. An Investigation of the Linear Three Level Programming Problem[J]. IEEE Transactions on Systems. Man and Cybernetics，1984 (14)：711-717.

[2] Band J F，Falk J E. An Explicit Solution to the Multi-Level Programming Problem[J]. Computers and Research，1982，9(1)：77-100.

[3] 阮国桢，左晓波. 线性多级规划的最优性条件和基本性质[J]. 系统科学与数学，1998，18(2)：150-166.
Ruan Guozhen，Zuo Xiaobo. The Optimality Condition and Properties of Linear Multilevel Programming Problem[J]. Systems Science and Mathematics，1998，18(2)：150-166.

[4] 邓胜岳，成央金，龙少华，等. 求解目标控制型线性三级规划的罚函数法[J]. 湘潭大学自然科学学报，2007，29(1)：28-32.
Deng Shengyue，Cheng Yangjin，Long Shaohua，et al. Penalty Function Algorithm of Solving Objection Function Controlled Trilevel Linear Programming[J]. Natural Science Journal of Xiangtan University，2007，29(1)：28-32.

[5] 潘平奇，李　炜，王　涌. 基于最钝角法则的亏基对偶单纯形Ⅰ阶段算法[J]. 运筹学学报，2004，8(5)：87-96.
Pan Pingqi，Li Wei，Wang Yong. A Phase-Ⅰ Algorithm Using the Most-Obtuse-Angle Rule for the Basis-Deficiency-Allowing Dual Simplex Method[J]. Or Transactions，2004，8(5)：87-96.

[6] 严文利. 一类线性规划问题初始可行基产生的新算法[J]. 运筹与管理，2001，10(2)：79-85.
Yan Wenli. New Way of Producing an Initial Feasible Basis to a Kind of Linear Programming[J]. Operations Research and Management Science，2001，10(2)：79-85.

[7] Wayne F Blalas，Mark H Karwan. Two-Level Linear Programming[J]. Management Science，1984(17)：1004-1020.

[8] Zhao Maoxian，Gao Ziyou. A Globally Convergent Algorithm for Solving the Bilevel Linear Programming Problem[J]. Or Transactions，2005，9(2)：57-62.

[9] Shi Chenggen，Zhang Guangquan，Lu Jie. On the Definition of Linear Bilevel Programming Solution[J]. Applied Mathematics and Computation，2005 (160)：169-176.

[10] 阮国桢，杨丰梅，汪寿阳. 多级线性规划问题可行解的充要条件和单纯形算法[J]. 系统工程理论与实践，1996，16(11)：1-8.
Ruan Guozhen，Yang Fengmei，Wang Shouyang. A Necessary and Sufficient Condition for Feasible Solutions of Multilevel Linear Programming Problems and a Simplex Algorithm[J]. Systems Engineering Theory & Practice，1996，16(11)：1-8.

（责任编辑：廖友媛）