第22卷第6期　　　　湖 南 工 业 大 学 学 报　　　　Vol.22 No.6
2008年11月　　　　Journal of Hunan University of Technology　　　　Nov. 2008

一类非多项式微分系统的定性分析

李国涛，刘兴国

（湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412008）

摘　要：利用常微分方程定性理论方法，借助函数的Taylor展开，对一类非多项式微分系统进行定性分析；利用基于H.Poincaré思想的形式级数法，对系统的细焦点进行分析，并根据对称原理对系统进行中心的判定；借助Dulac函数讨论了闭轨的不存在性；利用Hopf分支理论根据参数变化时焦点稳定性的变化，分析得到极限环存在的若干充分条件。

关键词：非多项式系统；极限环；Dulac函数；Hopf分支理论

中图分类号：O175.12　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2008)06-0010-03

Qualitative Analysis on a Class of Non-Polynomial Differential System

Li Guotao，Liu Xingguo

（School of science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412008，China）

Abstract：By applying the qualitative theory of ordinary differential equations and the Taylor series expansion methods，a class of non-polynomial differential system is analyzed. With the formal series method，the fine focus are analyzed and the center is judged by the principle of symmetry. After the Dulac function，the non-existence of closed orbit is discussed. With the Hopf bifurcation theory，some sufficient conditions for the existence and stability of limit cycles bifurcated from the equilibrium point are also analyzed.

Key words：non-polynomial system；limit cycle；dulac function；hopf bifurcation theory

1　研究背景

微分方程定性分析理论研究的主要问题之一就是极限环问题。关于极限环的研究大体上分两个方面：一是关于极限环的存在性、稳定性、个数及它们的相对位置等问题；二是关于极限环随系统中参数的变化产生或消失的问题。

在微分方程平面系统的定性理论和分支理论中，中心焦点判定问题同样是极为重要的研究课题。由于焦点量的阶数决定了通过微小扰动在奇点邻域内产生极限环的个数，而全面极限环的个数首先取决于各奇点邻域内的极限环的个数，因而Hilbert第16个问题的第一关就是焦点量阶数的确定，即中心焦点判定。

Amyxameyo B（1936）证明了平面多项式系统的中心焦点判别问题都可以在有限步内解决，但关键问题是没有给出解决的步数；Bautin（1952）在Kapteyn条件的基础上证明了二次系统的中心焦点判别问题；F.GoBber和K-D.Wilamowski（1979）用求形式级数的方法为基础，给出了一般平面多项式系统的前几个焦点量的具体公式；李承治（1982）直接应用一般二次系统的系数，给出了相应的判别量；T.R.Blow和N.G.Lioyd（1984）应用求形式级数的方式，给出了能在计算机上运行的焦点量算法，并且利用它讨论了缺二次项的三次系统，给出了前8个Liapunov量公式，从而得到了原点为5阶细焦点的结论；刘一戍（1987）对此类三次系统引入了Dulac坐标变换，将其转化为复系统，使用求形式级数的方法，得到了前5个焦点量公式，也得到了相应的结果[1-12]。

本文主要对如下一类非多项式微分系统进行定性分析：

收稿日期：2008-06-23
作者简介：李国涛（1984-），男，湖北广水人，湖南工业大学理学院学生.

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\left[1+\ln\left(1+x^2\right)\right]=P(x,y),\\ \dfrac{dy}{dt}=-x+\delta y+axy+bx^2+\lambda y\left(e^{x^2}-1\right)=Q(x,y),\end{cases}\tag{1}$$

其中δ，a，b，λ均为任意实常数。

2　平衡点的性态

因为

$$\begin{cases}\ln\left(1+x^2\right)=x^2-\dfrac{x^4}{2}+\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n}}{n},\ -1\le x\le 1,\\ e^{x^2}=1+x^2+\dfrac{x^4}{2}+\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{n!},\ -\infty<x<+\infty,\end{cases}$$

从而系统（1）可写成

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y+x^2y-\dfrac{1}{2}x^4y+y\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n}}{n};\\ \dfrac{dy}{dt}=-x+\delta y+axy-bx^2+\lambda x^2y+\dfrac{1}{2}\lambda x^4y+\lambda y\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{n!}.\end{cases}$$

引理1　对于系统（1），当$\delta\neq 0$时，有

1）如果$b=0$，则有限处实奇点只有$O(0,0)$，并且$-2<\delta<0$时为稳定的粗焦点；$0<\delta<2$时为不稳定的粗焦点。

2）如果$b\neq 0$，则有限处的实奇点有$O(0,0)$和$N\left(\dfrac{1}{b},0\right)$2个，并且$O(0,0)$点的性态同上，$N$是系统的鞍点。

当$\delta=0$时，对应于（1）的系数矩阵为$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$，故$O(0,0)$是系统（1）所对应线性系统的中心，需要对奇点$O(0,0)$进行中心焦点的判定。

下面采用基于Poincaré思想的形式级数法和对称原理来研究当$\delta=0$时奇点$O(0,0)$的性态。

定理1　对于系统（1），$\delta=0$时有：

1）当$ab+\lambda>0$时，$O(0,0)$为一阶不稳定细焦点；

2）当$ab+\lambda<0$时，$O(0,0)$为一阶稳定细焦点；

3）当$ab+\lambda=0,\lambda>0$时，$O(0,0)$为二阶不稳定细焦点；

4）当$ab+\lambda=0,\lambda<0$时，O(0,0)则为二阶稳定细焦点；

5）当$ab=0,\lambda=0$时，$O(0,0)$为中心。

证明　当$\delta=0$时，令形式级数

$$F(x,y)=x^2+y^2+F_3+F_4+\cdots+F_K+\cdots,$$

其中$F_K(x,y)=\sum_{i+j=k}a_{ij}x^iy^j$是$x$与$y$的$k$次齐次式（$k=3$，$4\cdots$），当$|x|\le 1$时则有

$$\left.\frac{dF}{dt}\right|_{(1.1)}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}=$$

$$\left(2x+\frac{\partial F_3}{\partial x}+\frac{\partial F_4}{\partial x}+\cdots\right)\frac{dx}{dt}+\left(2y+\frac{\partial F_3}{\partial y}+\frac{\partial F_4}{\partial y}+\cdots\right)\frac{dy}{dt}=$$

$$\left(2x+\frac{\partial F_3}{\partial x}+\frac{\partial F_4}{\partial x}+\cdots\right)\left(y+x^2y-\frac{1}{2}x^4y+y\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}\right)+\left(2y+\frac{\partial F_3}{\partial y}+\frac{\partial F_4}{\partial y}+\cdots\right)\left(-x-axy+bx^2+\lambda x^2y+\frac{1}{2}\lambda x^4y+\lambda y\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}\right),\tag{2}$$

分别令（2）式右端的3次项、4次项之和为0，并取极坐标$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，消去r^3、r^4则有：

$$F_3(x,y)=\frac{2}{3}ay^3-\frac{2}{3}bx^3,$$

$$\frac{dF_4(\cos\theta,\sin\theta)}{d\theta}=2\cos^3\theta\sin\theta+2(ab+\lambda)\cos^2\theta\sin^2\theta+2a^2\cos\theta\sin^3\theta.$$

下面分3种情况讨论：1）当$ab+\lambda\neq 0$时，因为

$$\int_0^{2\pi}\left[2\cos^3\theta\sin\theta-2(ab+\lambda)\cos^2\theta\sin^2\theta-2a^2\cos\theta\sin^3\theta\right]d\theta=2(ab+\lambda)\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta\neq 0,$$

改取F_4满足方程$\dfrac{dF_4(\cos\theta,\sin\theta)}{d\theta}=2\cos^3\theta\sin\theta+2(ab+\lambda)\cos^2\theta\sin^2\theta+2a^2\cos\theta\sin^3\theta-d_4$，

其中$d_4=\dfrac{ab+\lambda}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta$，且$d_4$与$ab+\lambda$同号。

设$\Phi(x,y)=x^2+y^2+F_3+F_4$，则有$\dfrac{d\Phi}{dt}=d_4r^4+O(r^5)$，从而当$ab+\lambda>0$时，$O(0,0)$为一阶不稳定的细焦点；当$ab+\lambda<0$时，$O(0,0)$为一阶稳定的细焦点。

2）当$ab+\lambda=0,\lambda\neq 0$时，则有

$$\frac{dF_4(\cos\theta,\sin\theta)}{d\theta}=2\cos^3\theta\sin\theta+2a^2\cos\theta\sin^3\theta,$$

由此可得$F_4(x,y)=-\dfrac{1}{2}x^4+\dfrac{1}{2}a^2y^4$。

分别令式（2）右端的5次项、6次项为0，并取极坐标$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，消去r^5、r^6则有：

$$F_5(x,y)=\frac{2}{5}bx^5+\frac{2}{5}a^3y^5,$$

$$\frac{dF_6(\cos\theta,\sin\theta)}{d\theta}=-3\cos^5\theta\sin\theta+\lambda\cos^4\theta\sin^2\theta+2a^4\cos\theta\sin^5\theta,$$

因为当$\lambda\neq 0$时

$$\int_0^{2\pi}\left[-3\cos^5\theta\sin\theta+\lambda\cos^4\theta\sin^2\theta+2a^4\cos\theta\sin^5\theta\right]d\theta=\lambda\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\sin^2\theta d\theta\neq 0,$$

改取F_6满足方程

$$\frac{dF_6(\cos\theta,\sin\theta)}{d\theta}=-3\cos^2\theta\sin\theta+\lambda\cos^4\theta\sin^2\theta+2a^4\cos\theta\sin^2\theta-d_6\ ,$$

其中$d_6=\frac{\lambda}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\sin^2\theta d\theta$，且$d_6$与$\lambda$同号。

设$\psi(x,y)=x^2+y^2+F_3+F_4+F_5+F_6$，则有$\frac{d\psi}{dt}=d_6r^6+O(r^6)$，所以当$ab+\lambda=0,\lambda>0$时，$O(0，0)$为二阶不稳定的细焦点；当$ab+\lambda=0,\lambda<0$时，$O(0，0)$为二阶稳定的细焦点。

3）当$\delta=0,ab+\lambda=0,\lambda=0$，即$\delta=0,\lambda=ab=0$时，系统满足

$$\begin{cases}P(x,-y)=-P(x,y),\\Q(x,-y)=Q(x,y),\end{cases}\text{或}\begin{cases}P(-x,y)=P(x,y),\\Q(-x,y)=-Q(x,y)。\end{cases}$$

根据对称原理可知，$O(0，0)$必是系统的中心。

3 极限环的存在性与稳定性

定理2 下列条件之一成立时，系统在全平面上不存在闭轨：1）$\delta>0$，$ab\geqslant0$，$\lambda\geqslant0$；2）$\delta<0$，$ab\leqslant0$，$\lambda\leqslant0$；3）$\delta\geqslant0$，$ab>0$，$\lambda\geqslant0$；4）$\delta\leqslant0$，$ab<0$，$\lambda\leqslant0$；5）$\delta\geqslant0$，$ab\geqslant0$，$\lambda>0$；6）$\delta\leqslant0$，$ab\leqslant0$，$\lambda<0$。

证明 当$a\neq0$时，令$L(y)=ay-1=0$，则有

$$\left.\frac{dL(y)}{dt}\right|_{(1)}=a\frac{dy}{dt}=a\left[x+\delta y-axy+bx^2+\lambda y\left(e^{x^2}-1\right)\right]=\delta+abx^2+\lambda\left(e^{x^2}-1\right),$$

则可知$y=1/a$是系统于定理相应条件下的无切直线。

取Dulac函数$B(x,y)=(ay-1)^{-1}\left[1+\ln\left(1+x^2\right)\right]^{-1}$，则有

$$\operatorname{div}(BP,BQ)\big|_{(1)}=\frac{\partial BP}{\partial x}+\frac{\partial BQ}{\partial y}=-(ay-1)^{-2}\left[1+\ln\left(1+x^2\right)\right]^{-1}\left[\delta+abx^2+\lambda\left(e^{x^2}-1\right)\right]。$$

根据Bendixson-Dulac定理可知，条件之一成立时定号且其零值仅在x=0处取得，系统在全平面上不存在闭轨。

定理3 当$\delta=0$，$ab=0$，$\lambda=0$时，系统在全平面上不存在极限环。

证明 由定理2的证明可知，当$\delta=0$，$ab=0$，$\lambda=0$时，$\operatorname{div}(\boldsymbol{BP},\boldsymbol{BQ})=0$，系统存在连续可微的积分因子$B(x,y)$，因而在全平面上不存在极限环。

定理4 下列条件之一成立时，系统在$O(0，0)$外围至少存在一个极限环，且$\delta<0$时所产生的环不稳定，$\delta>0$时所产生的环稳定：1）$ab+\lambda>0$，$-1\ll\delta<0$；2）$ab+\lambda<0$，$0<\delta\ll1$；3）$ab+\lambda=0,\lambda>0$，$-1\ll\delta<0$；4）$ab+\lambda=0$，$\lambda<0$，$0<\delta\ll1$。

证明 在定理4的条件1）或3）下，当$\delta=0$时，系统以$O(0，0)$为不稳定细焦点；而当$-1\ll\delta<0$时，系统（1）以$O(0，0)$为稳定的粗焦点。当δ从零开始减小时，系统的奇点$O(0，0)$由不稳定的细焦点变为稳定的粗焦点。从物理学角度来看，奇点由吸收能量到释放能量过程中必产生等幅振荡，故可知在此两种参数条件下系统在点$O(0，0)$外围至少产生1个不稳定的极限环。

在定理4的条件2）或4）下，当$\delta=0$时，系统以$O(0，0)$为稳定的细焦点；而当$0<\delta\ll1$时，系统（1）以$O(0，0)$为不稳定的粗焦点。当δ从零开始增加时，系统的奇点$O(0，0)$由稳定的细焦点变为不稳定的粗焦点。从物理学角度来看，奇点由释放能量到吸收能量过程中必产生等幅振荡，故可知在此两种参数条件下系统在点$O(0，0)$外围至少产生1个稳定的极限环。

参考文献：

[1] 张芷芬，丁同仁，黄文灶，等. 微分方程定性理论[M]. 北京：科学出版社，1985：41-118，196-233.
[2] 张锦炎，冯贝叶. 常微分方程几何理论与分支问题[M]. 北京：北京大学出版社，1981：20-93，188-206.
[3] Liu Xing-guo， Huang Li-Hong. The existence and uniqueness of limit cycles for a class of planar differential systems[J]. Mathematical Analysis，2007，14(4)：509-524.
[4] 刘兴国，黄立宏. 一类平面多项式系统极限环的存在唯一性[J]. 高校应用数学学报A辑，2007，22(4)：455-461.
[5] 陈明晖，邓明立. 常微分方程定性理论与稳定性理论的哲学思考[J]. 自然科学史研究，2005，24(1)：45-52.
[6] 刘兴国，黄立宏. 一类平面微分系统极限环的存在唯一性[J]. 经济数学，2007，24(2)：199-207.
[7] 宋 涛，黄卫东，张伯骏. 一类多项式系统中心焦点判定问题的研究[J]. 天津工业大学学报，2006，25(6)：75-77.
[8] 刘兴国，黄立宏. 一类平面五次系统极限环的存在唯一性[J]. 湖南工业大学学报，2007，21(3)：21-26.
[9] 陈均平，周 进. 一类平面四次系统的中心焦点判定及极限环的存在性[J]. 重庆大学学报，1996，19(5)：111-115.
[10] 骆 桦. Dulac函数在定性研究中的应用[J]. 浙江丝绸工学院学报，1996，13(4)：39-43.
[11] 杨英钟，吴承强. 一类三次系统含单奇点的极限环[J]. 福州大学学报，2007，35(5)：667-670.
[12] 肖 箭，盛立人. Dulac函数的构造及其应用[J]. 数学学报，1999，42(4)：665-670.

（责任编辑：张亦静）