第22卷 第6期
2008年11月

湖 南 工 业 大 学 学 报
Journal of Hunan University of Technology

Vol.22 No.6
Nov. 2008

二层多随从线性规划的几何性质和最优化条件

邓胜岳[1]，成央金[2]，马宗刚[3]

（1. 湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412008；
2. 湘潭大学 数学与计算科学学院，湖南 湘潭 411105；
3. 湖南大学 工商管理学院，湖南 长沙 410082）

摘　要：介绍了二层多随从线性规划中下层随从不合作的模型，在约束集为非空有界的前提下，讨论了可行集的几何性质，并利用线性规划对偶理论的基本性质，得到了两个最优化条件。

关键词：二层线性规划；对偶理论；最优化条件

中图分类号：O221.1　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2008)06-0006-04

Geometric Properties and Optimality Conditions for Linear Bilevel Programming Problem with Multiple Followers

Deng Shengyue[1]，Cheng Yangjin[2]，Ma Zonggang[3]

(1. School of Science Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412008, China；
2. School of Mathematics and Computational Science，Xiangtan University，Xiangtan Hunan 411105，China；
3. School of Management, Hunan University，Changsha 410082，China)

Abstract: A model of an uncooperative linear bilevel programming problem with multiple followers is presented. Under the assumption of the nonempty and bounded constrained set , we discussed some geometric properties of the feasible set, and obtained two optimality conditions by some basic properties of the linear programming's duality theory.

Key words: bilevel linear programming; duality theory; optimality condition

0　引言

Von Stackelberg在其不平衡市场经济一文中，首次提出了两层规划[1]。作为其拓展，Candler和Norton于1977年为解决分层决策问题提出了多层规划模型[2]。实践表明，它们能有效处理实际分层管理系统的决策问题。对具有明确层次性的系统，上层对下层子系统通过控制变量，以实现整个系统的最优化。因此，二层系统模型方法是简单有效的。

二层线性规划模型在实际管理中有着广泛的应用，一般对上下层均为一个决策者的情况讨论较多[3-5]，在实际的二层管理系统中，往往下层有多个随从，因此对它的研究就显得尤为必要，文献[6-9]根据各个问题的机理给出了一些有效的算法，文献[10，11]对二层多随从的模型在理论上作了些探讨，但总体来说，其最优化条件的成立是以满足Slater条件并运用Kuhn-Tucker条件为前提；本文利用线性规划对偶理论基本性质得到的最优化条件为前提，相比之下，条件放宽松了。文献[6]根据下层各随从的合作情况给出了9种模型，本文着重考虑了下层各随从彼此间相互独立的情况，其他模型通过类似证明，也有相应性质。

收稿日期：2008-08-28
作者简介：邓胜岳(1981-)，男，湖南岳阳人，湖南工业大学教师，主要研究方向为多层规划；
成央金(1965-)，男，湖南娄底人，湘潭大学教授，主要研究方向为多目标决策与模糊逻辑；
马宗刚(1978-)，男，山东临沂人，湖南大学博士生，主要研究方向为金融工程与风险管理.

1　模型及定义

本文讨论的二层多随从线性规划模型（MFBLP）如下：

$$
\begin{cases}
\min\limits_{x\in X} F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_N)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\sum\limits_{i=1}^{N}\boldsymbol{d}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_i,\\
\text{s.t.}\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\sum\limits_{i=1}^{N}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{y}_i\le \boldsymbol{b};\\
\text{其中当}\boldsymbol{x}\text{给定},\ \boldsymbol{y}_i(i=1,2,\cdots,N)\text{解}\\
\min\limits_{y_i\in Y_i} f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_i)=\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_i,\\
\quad\text{s.t.}\ \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{y}_i\le \boldsymbol{b}_i。
\end{cases}
$$

$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_N)$和$f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_i)$分别是上层和下层第$i$随从的目标函数，$\boldsymbol{x}\in R^n$，$\boldsymbol{y}_i\in R^{m_i}$，$\boldsymbol{c}\in R^n$，$\boldsymbol{c}_i\in R^n$，$\boldsymbol{d}_i\in R^{m_i}$，$\boldsymbol{e}_i\in R^{m_i}$，$\boldsymbol{b}\in R^p$，$\boldsymbol{b}_i\in R^{q_i}$，$\boldsymbol{A}\in R^{p\times n}$，$\boldsymbol{B}_i\in R^{p\times m_i}$，$\boldsymbol{A}_i\in R^{q_i\times n}$，$\boldsymbol{D}_i\in R^{q_i\times m_i}$，$(i=1,2,\cdots,N)$。

定义1　约束集

$$S=\Big\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_N)\mid(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_N)\in X\times Y_1\times\cdots\times Y_N;\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{y}_i\le\boldsymbol{b};\ \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{y}_i\le\boldsymbol{b}_i;\ i=1,2,\cdots,N\Big\}。$$

上层决策集

$$s(\boldsymbol{x})=\Big\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\in X;\exists\boldsymbol{y}_i\in Y_i;\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{y}_i\le\boldsymbol{b};\ \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{y}_i\le\boldsymbol{b}_i;\ i=1,2,\cdots,N\Big\}。$$

下层决策集

$$s_i(\boldsymbol{x})=\big\{\boldsymbol{y}_i\mid\boldsymbol{y}_i\in Y_i;\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_N)\in S\big\},\quad i=1,2,\cdots,N。$$

下层最优决策集

$$p_i(\boldsymbol{x})=\Big\{\boldsymbol{y}_i\mid\boldsymbol{y}_i\in s_i(\boldsymbol{x});\ \boldsymbol{y}_i\in\arg\min_{y_i} f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_i)\Big\},\ i=1,2,\cdots,N。$$

定义2　可行集

$$K=\big\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_N)\mid(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_N)\in S;\ \boldsymbol{y}_i\in p_i(\boldsymbol{x});\quad i=1,2,\cdots,N\big\}。$$

易知：$K=s(\boldsymbol{x})\times p_1(\boldsymbol{x})\times\cdots\times p_N(\boldsymbol{x})$。

定义3　若$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}_1^*,\cdots,\boldsymbol{y}_N^*)\in K$，对任意给定的$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_N)\in K$，如果$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}_1^*,\cdots,\boldsymbol{y}_N^*)\le F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_N)$成立，则称$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}_1^*,\cdots,\boldsymbol{y}_N^*)$为MFBLP的最优解。

定义4　C的凸子集C^0称为C的面，若$\theta^1,\theta^2\in C$，存在$0<\lambda<1$使得$\theta=\lambda\theta^1+(1-\lambda)\theta^2\in C^0$，则必有$\theta^1,\theta^2\in C^0$。[12]

定义5　若C^1为凸集C的若干个面的并，则C^1为弱拟凸集。[4]

定义6　设$X\subseteq R^n$，如果存在非空集$X_1,X_2\subseteq R^n$，X_1和X_2都为开集或都为闭集，使得

$$X_1\cap X_2=\varnothing,\ X_1\cup X_2=X,$$

则称X是不连通集，否则X为连通集。[13]

2　几何性质及最优化条件

定理1　若约束集S是非空有界集，则可行集K是S的若干个面的并。

证明　令$(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{y}_1^1,\cdots,\boldsymbol{y}_N^1),(\boldsymbol{x}^2,\boldsymbol{y}^2,\cdots,\boldsymbol{y}_N^2)\in S$，存在$\lambda\in(0,1)$，满足$\lambda(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{y}_1^1,\cdots,\boldsymbol{y}_N^1)+(1-\lambda)(\boldsymbol{x}^2,\boldsymbol{y}_1^2,\cdots,\boldsymbol{y}_N^2)\in K$，由定义4易知；要证$(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{y}_1^1,\cdots,\boldsymbol{y}_N^1),(\boldsymbol{x}^2,\boldsymbol{y}_1^2,\cdots,\boldsymbol{y}_N^2)\in K$，用反证法证之。

不妨设$(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{y}_1^1,\cdots,\boldsymbol{y}_N^1)\notin K$。显然有：$(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{y}_1^1,\cdots,\boldsymbol{y}_N^1)\notin s(\boldsymbol{x}^1)\times p_1(\boldsymbol{x}^1)\times\cdots\times p_N(\boldsymbol{x}^1)$。因为$S$是非空有界集，所以$(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{y}_1^1,\cdots,\boldsymbol{y}_N^1)\in S$，由定义1知：$s(\boldsymbol{x}^1)\times p_1(\boldsymbol{x}^1)\times\cdots\times p_N(\boldsymbol{x}^1)$为非空有界，不失一般性，我们详细考虑第$i$随从的情况。令$\overline{\boldsymbol{y}}_i^1\in p_i(\boldsymbol{x}^1)$，使得$\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^1+\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{y}}_i^1<\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^1+\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_i^1$，易知$\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}^1+\boldsymbol{D}_i\overline{\boldsymbol{y}}_i^1\le\boldsymbol{b}_i$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^1+\sum\limits_{i=1}^{N}\boldsymbol{B}_i\overline{\boldsymbol{y}}_i^1\le\boldsymbol{b}$。则有：

$$\lambda(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}^1+\boldsymbol{D}_i\overline{\boldsymbol{y}}_i^1)+(1-\lambda)(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{y}_i^2)\le\lambda\boldsymbol{b}_i+(1-\lambda)\boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{b}_i$$

和

$$\lambda\Big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^1+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{B}_i\overline{\boldsymbol{y}}_i^1\Big)+(1-\lambda)\Big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^2+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{y}_i^2\Big)\le\lambda\boldsymbol{b}+(1-\lambda)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$$

成立。因为S是凸集，则有：

$$\big(\lambda\boldsymbol{x}^1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^2,\lambda\overline{\boldsymbol{y}}_1^1+(1-\lambda)\boldsymbol{y}_1^2,\cdots,\lambda\overline{\boldsymbol{y}}_N^1+(1-\lambda)\boldsymbol{y}_N^2\big)\in S。$$

由于$\lambda(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{y}_1^1,\cdots,\boldsymbol{y}_N^1)+(1-\lambda)(\boldsymbol{x}^2,\boldsymbol{y}_1^2,\cdots,\boldsymbol{y}_N^2)\in K$，

因此有$\big(\lambda\boldsymbol{x}^1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^2,\lambda\boldsymbol{y}_1^1+(1-\lambda)\boldsymbol{y}_1^2,\cdots,\lambda\boldsymbol{y}_N^1+(1-\lambda)\boldsymbol{y}_N^2\big)\in K$。

则对第i随从有：

$$\lambda\boldsymbol{y}_i^1+(1-\lambda)\boldsymbol{y}_i^2\in p_i\big(\lambda\boldsymbol{x}^1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^2\big),$$

显然有$\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}\big(\lambda\boldsymbol{x}^1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^2\big)+\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\big(\lambda\boldsymbol{y}_i^1+(1-\lambda)\boldsymbol{y}_i^2\big)<\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}\big(\lambda\boldsymbol{x}^1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^2\big)+\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\big(\lambda\overline{\boldsymbol{y}}_i^1+(1-\lambda)\boldsymbol{y}_i^2\big)$。

易得$\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_i^1<\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{y}}_i^1$，

这与$\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^1+\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{y}}_i^1<\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^1+\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_i^1$矛盾。

所以$(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{y}_1^1,\cdots,\boldsymbol{y}_N^1)\notin K$不成立，即$(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{y}_1^1,\cdots,\boldsymbol{y}_N^1)\in K$。同理可证$(\boldsymbol{x}^2,\boldsymbol{y}_1^2,\cdots,\boldsymbol{y}_N^2)\in K$，定理1得证。

推论1　若S有界，则可行集K为弱拟凸集。

由定义5和定理1易证。

推论2　若S有界，则可行集K为非空有界闭集。

推论3　若S有界，如果MFBLP存在最优解，则最优解$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}_1^*,\cdots,\boldsymbol{y}_N^*)\in K$。

推论4　若$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_N)$为$K$的极点，则$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_N)$为$S$的极点。

由 Caratheodory 表示定理易证。

定理 2 若约束集 S 非空有界，则可行集 K 是连通的。

证明 由文献 [14]中的定理 8 易证 K 是闭集，下面证 K 为连通集。反证法证之，设 K 为不连通集，由定义6 知，存在闭集 K_1,K_2 使得

$$K_1\cap K_2=\varnothing, K_1\cup K_2=K。$$

令 $s^1(x)=\{x\mid \exists y_i\in Y_i;\text{使得}(x,y_1,\cdots,y_N)\in K_1\}$ 和 $s^2(x)=\{x\mid \exists y_i\in Y_i;\text{使得}(x,y_1,\cdots,y_N)\in K_2\}$。易证 $s^1(x)$, $s^2(x)$ 为闭集，且 $s^1(x)\cup s^2(x)\subseteq s(x)$，因 S 是有界的，且 $x\in s(x),(y_1,\cdots,y_N)\in p_1(x)\times\cdots\times p_N(x)$，显然 $(x,y_1,\cdots,y_N)\in K$，则有 $(x,y_1,\cdots,y_N)\in K_1$ 或 $(x,y_1,\cdots,y_N)\in K_2$。显然 $x\in s^1(x)\cup s^2(x)$，因此 $s(x)=s^1(x)\cup s^2(x)$。由定义 1 知，$s(x)$ 是凸集，易得 $s(x)$ 是连通的，则有 $s^1(x)\cap s^2(x)\neq\varnothing$。假定 $x^0\in s^1(x)\cap s^2(x)$，有 $y_i^0,y_i^1(i=1,2,\cdots,N)$ 使得 $(x^0,y_1^0,\cdots,y_N^0)\in K_1$ 和 $(x^0,y_1^1,\cdots,y_N^1)\in K_2$ 成立。对第 i 随从有 $y_i^0\in p_i(x^0), y_i^1\in p_i(x^0)$，由定义 1 知 $p_i(x^0)$ 为凸集，则存在 $\lambda\in[0,1]$，满足

$$\lambda y_i^0+(1-\lambda)y_i^1\in p_i(x^0)。$$

显然有 $(x^0,\lambda y_1^0+(1-\lambda)y_1^1,\cdots,\lambda y_N^0+(1-\lambda)y_N^1)\in K$，

则
$$\{(x^0,\lambda y_1^0+(1-\lambda)y_1^1,\cdots,\lambda y_N^0+(1-\lambda)y_N^1)\mid 0\le\lambda\le1\}\subseteq K_1 \quad \text{或}$$
$$\{(x^0,\lambda y_1^0+(1-\lambda)y_1^1,\cdots,\lambda y_N^0+(1-\lambda)y_N^1)\mid 0\le\lambda\le1\}\subseteq K_2。$$

因此 $(x^0,y_1^1,\cdots,y_N^1)\in K_1$ 或 $(x^0,y_1^0,\cdots,y_N^0)\in K_2$。这与 $K_1\cap K_2=\varnothing$ 矛盾，所以 K 是连通的，证毕。

上面讨论了 K 的弱拟凸和连通性，下面我们利用线性规划对偶理论的性质讨论 MFBLP 的最优化条件。

定理 3 若 S 非空有界，并且 $(x,y_1,\cdots,y_N)\in S$，则 $(x,y_1,\cdots,y_N)\in K$，当且仅当存在 $u_i,v_i\ge0\ (u_i\in R^{p},v_i\in R^{q_i})$，使得：

$$(v_i^{\mathrm T}D_i+u_i^{\mathrm T}B_i+e_i^{\mathrm T})y_i=0, v_i^{\mathrm T}(A_ix+D_iy_i-b_i)=0,$$

$$u_i^{\mathrm T}\left(Ax+\sum_{i=1}^N B_iy_i-b\right)=0$$（其中 i=1, 2,⋯, N）成立。

证明 “$\Rightarrow$” 因为 $(x,y_1,\cdots,y_N)\in S$，并且 $(x,y_1,\cdots,y_N)\in K$，所以有 $(x,y_1,\cdots,y_N)\in s(x)\times p_1(x)\times\cdots\times p_N(x)$，不失一般性，现详细讨论第 i 随从。当上层给定 x 后，下层第 i 随从可化为如下形式：

$$\begin{cases}\min\limits_{y_i\in Y_i} e_i^{\mathrm T}y_i\\ \text{s.t.}\quad A_ix+D_iy_i\le b_i,\\ \qquad Ax+\sum\limits_{i=1}^N B_iy_i\le b,\end{cases}$$

由对偶定理知，存在

$$u_i,v_i\ge0(u_i\in R^{p},v_i\in R^{q_i}),$$

使得：
$$\begin{cases}\max\limits_{u_i,v_i} v_i^{\mathrm T}(A_ix_i-b_i)+u_i^{\mathrm T}\left(Ax+\sum\limits_{i=1,i\neq i}^N B_iy_i-b\right),\\ \text{s.t.}\qquad -B_i^{\mathrm T}u_i-D_iv_i\le e_i.\end{cases}$$

由线性规划对偶理论的互补松弛性知，存在 y_s,μ_s，可将上面的原问题和对偶问题化为如下形式：

$$\begin{cases}\min\limits_{y_i\in Y_i} e_i^{\mathrm T}y_i\\ \text{s.t.}\quad -D_iy-y_s=A_ix-b_i,\\ -B_iy_i-y_s=Ax+\sum\limits_{i=1,i\neq i}^N B_iy_i-b,\end{cases}$$

并且：

$$\begin{cases}\max\limits_{v_i,u_i} v_i^{\mathrm T}(A_ix_i-b_i)+u_i^{\mathrm T}\left(Ax+\sum\limits_{i=1,i\neq i}^N B_iy_i-b\right),\\ \text{s.t.}\qquad -B_i^{\mathrm T}u_i-D_i^{\mathrm T}v_i+\mu_s=e_i.\end{cases}$$

由对偶定理知，若原问题和对偶问题有最优解，则其目标函数值相等：

$$e_i^{\mathrm T}y_i=v_i^{\mathrm T}(A_ix_i-b_i)+u_i^{\mathrm T}\left(Ax+\sum_{i=1,i\neq i}^N B_iy_i-b\right),$$

因而有

$$(-u_i^{\mathrm T}B_i-v_i^{\mathrm T}D_i+\mu_s^{\mathrm T})y_i=$$
$$v_i^{\mathrm T}(-D_iy_i-y_s)-u_i^{\mathrm T}(-B_iy_i-y_s),$$

所以有 $\mu_s^{\mathrm T}y_i=0, u_i^{\mathrm T}y_s=0, v_i^{\mathrm T}y_s=0$。

即 $(e_i^{\mathrm T}+u_i^{\mathrm T}B_i+v_i^{\mathrm T}D_i)y_i=0$，

$$u_i^{\mathrm T}\left(Ax+\sum_{i=1}^N B_iy_i-b\right)=0,$$

$$v_i^{\mathrm T}(A_ix-D_iy_i-b_i)=0。$$

其他情况同理证明，所以 i=1,2,⋯,N 上式均成立。

“$\Leftarrow$” 若 $(x,y_1,\cdots,y_N)\in S$，由定义 1 有 $x\in s(x)$ 和 $y_i\in s_i(x)$,i=1,2,⋯,N。下面详细讨论第 i 随从的情况。当上层给定 x 后，存在 $u_i,v_i\ge0(u_i\in R^{p},v_i\in R^{q_i})$，使得

$$(e_i^{\mathrm T}+u_i^{\mathrm T}B_i+v_i^{\mathrm T}D_i)y_i=0,$$

$$u_i^{\mathrm T}\left(Ax+\sum_{i=1}^N B_iy_i-b\right)=0,$$

$$v_i^{\mathrm T}(A_ix+D_iy_i-b_i)=0。$$

由对偶定理知，y_i 是下层第 i 随从的最优解，所以有 $y_i\in p_i(x)$。

同理有 $y_1\in p_1(x)$, $y_2\in p_2(x)$,⋯, $y_N\in p_N(x)$。

因此 $(x,y_1,\cdots,y_N)\in s(x)\times p_1(x)\times\cdots\times p_N(x)$，

即 $(x,y_1,\cdots,y_N)\in K$，证毕。

定理 4 若 S 是非空有界集，并且 $(x^*,y^*_1,\cdots,y^*_N)\in S$，则 $(x^*,y^*_1,\cdots,y^*_N)$ 是 MFBLP 的最优解，当且仅当存在 $u_i,v_i\ge0(u_i\in R^{p},v_i\in R^{q_i})$，使得 $(x^*,y^*_1,\cdots,y^*_N)$ 是如下问题的解：

$$\begin{cases} \min\limits_{x,y_1,\cdots,y_N} F(x,y_1,\cdots,y_N)=c^{\mathrm T}x+\sum\limits_{i=1}^{N}d_i^{\mathrm T}y_i, \\ \text{s.t.}\quad Ax+\sum\limits_{i=1}^{N}B_iy_i\le b, \\ \left(e_i^{\mathrm T}+u_i^{\mathrm T}B_i-v_i^{\mathrm T}D_i\right)y_i=0, \\ v_i^{\mathrm T}\left(A_ix+D_iy_i-b_i\right)=0, \\ u_i^{\mathrm T}\left(Ax+\sum\limits_{i=1}^{N}B_iy_i-b\right)=0,\ \text{其中}\ i=1,2,\cdots,N。\end{cases}$$

证明　“$\Rightarrow$”　由定理3易证。

“$\Leftarrow$”　令$(x^*,y_1^*,\cdots,y_N^*)\in S$，并存在

$u_i,v_i\ge 0(u_i\in R^p,v_i\in R^{q_i})$，

使得$\left(e_i^{\mathrm T}+u_i^{\mathrm T}B_i+v_i^{\mathrm T}D_i\right)y_i=0$，

$$u_i^{\mathrm T}\left(Ax+\sum_{i=1}^{N}B_iy_i-b\right)=0,$$

$$v_i^{\mathrm T}\left(A_ix+D_iy_i-b_i\right)=0。$$

不失一般性，对下层第i随从，由定理3易知，$y_i^*\in p_i\left(x^*\right)$。同理可得$\left(x^*,y_1^*,\cdots,y_N^*\right)\in s\left(x^*\right)\times p_1\left(x^*\right)\times\cdots\times p_N\left(x^*\right)$。显然有$\left(x^*,y_1^*,\cdots,y_N^*\right)\in K$，因此$\left(x^*,y_1^*,\cdots,y_N^*\right)$是如下问题的解：

$$\begin{cases} \min\limits_{x,y_1,\cdots,y_N} F\left(x,y_1,\cdots,y_N\right)=c^{\mathrm T}x+\sum\limits_{i=1}^{N}d_i^{\mathrm T}y_i, \\ \text{s.t.}\quad Ax+\sum\limits_{i=1}^{N}B_iy_i\le b, \\ \left(e_i^{\mathrm T}-u_i^{\mathrm T}B_i+v_i^{\mathrm T}D_i\right)y_i=0, \\ v_i^{\mathrm T}\left(A_ix-D_iy_i-b_i\right)=0, \\ u_i^{\mathrm T}\left(Ax+\sum\limits_{i=1}^{N}B_iy_i-b\right)=0,\quad \text{其中}\ i=1,2,\cdots,N。\end{cases}$$

由定义3知，$\left(x^*,y_1^*,\cdots,y_N^*\right)$是MFBLP的最优解。证毕。

3　结语

本文讨论了一类在实际中具有广泛代表性的二层多随从线性规划模型，并侧重讨论了这类模型可行集的几何性质和最优化条件等理论问题。这些结果，特别是最优化条件，为进一步寻找求解二层多随从线性规划的有效算法提供了理论基础。

参考文献：

[1] H Von Stackelberg. The Theory of the Market Economy[M]. York, Oxford：Oxford University Press,1952.

[2] Candler W, Norton R D. Multilevel programming and development policy[R]. Washington D C：World Bank staff Working Paper, 1977：258.

[3] Bialas M，Karwan M H . Two-level Programming[J]. Management Science，1984，30：1004-1020.

[4] 阮国桢. 线性二级规划的基本性质[J]. 湘潭大学自然科学学报，1993，15(4)：5-9.

[5] Anandalingam G，Apprey V. Multi-level programming and conflict resolution[J]. European Journal of Operational Research，1991，51：233-247.

[6] Lu Jie，Shi Chenggen，Zhang Guangquan. On Bilevel Multi-follower Decision Making : General Framework and Solutions [J]. Information Sciences，2006，176：1607-1627.

[7] Shi Chenggen，Zhang Guangquan，Lu Jie. The kth-best Approach for Linear Bilevel Multi-follower Programming[J]. Journal of Global Optimization，2005，33：563-578 .

[8] Wang Q，Yang F M，Wang S Y，et al. Bilevel Programs with Multiple Followers[J]. Systems Science and Mathematical Sciences，2000，13：265-276 .

[9] 邓胜岳，成央金，龙少华，等. 求解目标控制型线性三级规划的罚函数法[J]. 湘潭大学自然科学学报，2007，29(1)：28-32.

[10] 王先甲,陈　廷. 二层线性规划的几何特性及最优化条件[J]. 系统工程理论与实践，1995，11：16-24.

[11] 王先甲，冯尚友. 二层系统最优化理论[M]. 北京：科学出版社，1995.

[12] Rockafellar R T . Convex Analysis[M]. Princeton： Princeton University Press，1970 .

[13] 熊金成. 点集拓扑讲义[M]. 3版. 北京：高等教育出版社，2003.

[14] Hogan W W. Point-to-Set Maps In Mathematical Programming [J]. SIAM Review，1973，15(3)：591-603 .

（责任编辑：廖友媛）