第22卷第5期
2008年9月

湖 南 工 业 大 学 学 报
Journal of Hunan University of Technology

Vol.22 No.5
Sep. 2008

一类五次多项式系统中心焦点的判定

唐　桥，刘兴国

（湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412008）

摘　要：采用常微分方程定性理论的经典方法，对一类平面五次多项式系统进行定性分析。运用基于H. Poincaré 思想的形式级数法，对系统进行细焦点的分析；利用对称原理对系统进行中心判定；利用Hopf分支理论根据参数变化时焦点稳定性的变化，分析得到极限环存在的若干充分条件。

关键词：五次系统；中心；焦点；极限环；存在性

中图分类号：O175.12　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1673–9833(2008)05–0007–03

Judging on Center–or–Focus for a Class of Quintic Polynomial System

Tang Qiao，Liu Xingguo

（School of Science，Hunan University of Technology，Zhuzhou Hunan 412008 ，China）

Abstract：By using qualitative classical theory of ordinary differential equation, a class of planar quintic polynomial differential system is qualitatively analyzed. The fine focus is analyzed by formal series method from the thoughts of H. Poincaré and the center is judged by using principle of symmetry. Then some sufficient conditions for the existence of limit cycles of such systems are also obtained after Hopf bifurcation theory.

Key words：quintic system；center；focus；limit cycle；existence

1　背景知识

随着科学技术的迅猛发展，有关极限环的理论已得到广泛应用，而工程技术的需要又反过来推动了极限环的研究。在平面定性理论中，极限环的存在与否、唯一性及个数等的研究对于非线性系统轨线的大范围性态的分析也是至关重要的。与此密切相关的著名的Hilbert第16问题，于1900年在巴黎国际数学会议上提出之后，引起了愈来愈多的数学家的关注，其困难程度也一直困扰着人们。为解决这一难题，已出现了大量的研究论文，在很大程度上促进了定性理论的发展[1-9]。围绕Hilbert第16问题的进展在20世纪50年代以前成绩有限，20世纪50年代以后，苏联的数学家和中国的数学家在极限环理论研究方面做出了许多贡献。对于n=2的Hilbert第16问题，即平面二次系统的定性研究，我国的数学工作者已经取得了丰硕的成果。对于$n\geq 3$的情况，1980年以前比较好的结果是苏联人K.C.CHБИPCK的工作，他证明了缺二次项的三次系统在原点充分小的领域内可以有5个极限环。1975年，史松龄给出了一个具体的例子，说明上述分布是能够实现的。20世纪80年代以后，具有代表性的工作是李继彬等发现了三次系统具有比二次系统复杂得多的极限环分布，并发现（E_3）存在具有n个极限环的复眼分支。1989年，李继彬、白敬新又给出了具体的例子，说明一类特定的三次多项式系统，在中心点的充分小邻域内，可由Unfolding分支产生7个小振幅极限环。但是，所有这些工作离完全解决Hilbert第16问题还非常遥远，即使是二次系统这种最简单的非线性情况，极限环的最多个数问题仍悬而未决。还有一些根本性的困难问题没有解决，这些难题又反过来激励人们去研究、去探索，从而推动定性理论的发展。

在微分方程平面系统的定性理论和分支理论中，中心焦点判定问题是极为重要的研究课题。由于焦点量的阶数决定了通过微小扰动在奇点邻域内产生极限

收稿日期：2008-06-24

作者简介：唐　桥（1985-），男，湖南郴州人，湖南工业大学理学院信息与计算科学专业学生.

环的个数，而全平面极限环的个数首先取决于各奇点邻域内的极限环的个数，因而Hilbert第16个问题的第一关就是焦点量阶数的确定，即中心焦点判定。本文对如下一类平面五次微分系统进行定性分析：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\left(x^2-x+1\right)\equiv P(x,y);\\ \dfrac{dy}{dt}=-x+\delta y+a_1x^2y+a_2xy^3+x^4+a_3x^4y\equiv Q(x,y)。\end{cases} \tag{1}$$

其中δ，a_i（i=1,2,3）均为任意实数。

2 平衡点的性态

引理1 对于系统（1），当$\delta\neq 0$时，则有限处实奇点有$O(0,0)$，且$-2<\delta<0$时为稳定的粗焦点，$0<\delta<2$时为不稳定的粗焦点；以及有限处的实奇点N（1,0），且N是系统（1）的鞍点。

当δ=0时，故$O(0,0)$是系统（1）所对应线性系统的中心，需要对奇点$O(0,0)$进行中心焦点的判定。下面采用基于Poincaré思想的形式级数法来研究当δ=0时奇点$O(0,0)$的性质。

定理1 对于系统（1），当δ=0时，有：

i)当$a_1>0$时，$O(0,0)$为一阶不稳定细焦点；

ii)当$a_1<0$时，$O(0,0)$为一阶稳定细焦点；

iii)当$a_1=0$，$a_3>0$时，$O(0,0)$为二阶不稳定细焦点；

iv)当$a_1=0$，$a_3<0$时，$O(0,0)$为二阶稳定细焦点；

v)当$a_1=a_3=0$，$a_2>0$时，$O(0,0)$为三阶不稳定细焦点；

vi)当$a_1=a_3=0$，$a_2<0$时，$O(0,0)$为三阶稳定细焦点；

vii)当$a_1=a_2=a_3=0$时，$O(0,0)$为中心。

证明 当δ=0时，令

$$F(x,y)=x^2+y^2+F_3+F_4+\cdots。$$

其中F_k（x,y）是x与y的k次齐次多项式（k=3,4,…），则有：

$$\left.\frac{dF}{dt}\right|_{(1)}=\left(2x+\frac{\partial F_3}{\partial x}+\frac{\partial F_4}{\partial x}+\cdots\right)\left(x^2y+xy+y\right)+\left(2y+\frac{\partial F_3}{\partial y}+\frac{\partial F_4}{\partial y}+\cdots\right)\left(-x+a_1x^2y+a_2xy^3+x^4-a_3x^4y\right)。 \tag{2}$$

令式（2）右端的3次幂项为0，有

$$y\frac{\partial F_3}{\partial x}+2yx^2-x\frac{\partial F_3}{\partial y}=0。$$

将上式取极坐标$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，并消去r^3后可得：$\dfrac{dF_3(\cos\theta,\sin\theta)}{d\theta}=2\cos^2\theta\sin\theta$，

取$F_3(\cos\theta,\sin\theta)=-\dfrac{2}{3}\cos^3\theta$，即$F_3(x,y)=-\dfrac{2}{3}x^3$。

令式（2）右端的4次幂项为0，有

$$2x^3y-y\frac{\partial F_3}{\partial x}+\frac{\partial F_4}{\partial x}xy+2a_1x^2y^2-x\frac{\partial F_4}{\partial y}=0,$$

将上式取极坐标$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$并消去r^4化简得：

$\dfrac{dF_4(\cos\theta,\sin\theta)}{d\theta}=2a_1\cos^2\theta\sin^2\theta$。

下面分4种情形进行讨论。

1）当$a_1\neq 0$时，因为$\int_0^{2\pi}2a_1\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta\neq 0$，改取$F_4$满足方程$\dfrac{dF_4(\cos\theta,\sin\theta)}{d\theta}=D_4-C_4$。其中$C_4=\dfrac{a_1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta$，且$C_4$与$a_1$同号。

设$\Phi(x,y)=x^2+y^2+F_3+F_4$，则有：

$$\left.\frac{d\Phi}{dt}\right|_{(1)}=C_4r^4+O(r^4)。$$

从而当$a_1>0$时，O（0,0）为一阶不稳定细焦点；当$a_1<0$时，O（0,0）为一阶稳定细焦点。

2）当a_1=0，$a_3\neq 0$时，有$\dfrac{dF_4(\cos\theta,\sin\theta)}{d\theta}=0$，即$F_4(x,y)=0$。

令式（2）右端的5次幂项为0，有

$$x^2y\frac{\partial F_3}{\partial x}-\frac{\partial F_4}{\partial x}xy+y\frac{\partial F_5}{\partial x}+2x^4y+2a_2xy^4-x\frac{\partial F_5}{\partial y}=0,$$

将上式取极坐标$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$并消去r^5化简得：

$\dfrac{dF_5(\cos\theta,\sin\theta)}{d\theta}=2a_2\cos\theta\sin^4\theta$，

取$F_5(\cos\theta,\sin\theta)=\dfrac{2}{5}a_2\sin^5\theta$，即$F_5(x,y)=\dfrac{2a_2}{5}y^5$。

令式（2）右端的6次幂项为0，有

$$y\frac{\partial F_6}{\partial x}+x^2y\frac{\partial F_4}{\partial x}+\frac{\partial F_5}{\partial x}xy+2a_3x^4y^2-a_2\frac{\partial F_3}{\partial y}xy^3-x\frac{\partial F_6}{\partial y}=0,$$

将上式取极坐标$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，并消去r^6化简得：$D_6=\dfrac{dF_6(\cos\theta,\sin\theta)}{d\theta}=2a_3\cos^4\theta\sin^2\theta$。

因当$a_3\neq 0$时，$\int_0^{2\pi}D_6d\theta=2a_3\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\sin^2\theta d\theta\neq 0$。

改取F_6满足方程$\dfrac{dF_6(\cos\theta,\sin\theta)}{d\theta}=D_6-C_6$，其中$C_6=\dfrac{a_3}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\sin^2\theta d\theta$，且$C_6$与$a_3$同号。

设$\varphi(x,y)=x^2+y^2+F_3+F_4+F_5+F_6$。则有：

$$\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{(1)}=C_6r^6+O(r^6)。$$

从而当$a_1=a_3$=0时，$O(0,0)$为二阶不稳定细焦点；

当a_1=0，$a_3<0$时，$O(0,0)$为二阶稳定细焦点。

3）当$a_1=a_3$=0，$a_2\neq 0$时，则有：

$\frac{dF_6(\cos\theta,\sin\theta)}{d\theta}=0$，即 $F_6(x,y)=0$。

令式（2）右端的7次幂项为0，有

$$\frac{\partial F_5}{\partial x}x^2y-\frac{\partial F_6}{\partial x}xy+a_2\frac{\partial F_4}{\partial y}xy^3+\frac{\partial F_7}{\partial x}y-\frac{\partial F_7}{\partial y}x=0,$$

将上式取极坐标 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，并消去 r^7 化简得：$\frac{dF_7(\cos\theta,\sin\theta)}{d\theta}=0$，即 $F_7(x,y)=0$。

令式（2）右端的8次幂项为0，有

$$\frac{\partial F_6}{\partial x}x^2y+\frac{\partial F_7}{\partial x}xy-\frac{\partial F_8}{\partial x}y+\frac{\partial F_5}{\partial y}\left(x^4+a_2xy^3\right)-\frac{\partial F_8}{\partial y}x=0,$$

将上式取极坐标 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，并消去 r^8 化简得：$D_8=\frac{dF_8(\cos\theta,\sin\theta)}{d\theta}=$

$$2a_2\cos^4\theta\sin^4\theta-2a_2^2\cos\theta\sin^7\theta,$$

因当 $a_2\neq 0$ 时，$\int_0^{2\pi}D_8d\theta=2a_2\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\sin^4\theta d\theta\neq 0$，

改取 F_8 满足方程 $\frac{dF_8(\cos\theta,\sin\theta)}{d\theta}=D_8-C_8$，其中

$C_8=\frac{a_2}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\sin^4\theta d\theta$，且 C_8 与 a_2 同号。

设 $\varphi(x,y)=x^2+y^2+F_3+F_4+F_5+F_6+F_7+F_8$。

则有：$\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{(1)}=C_8r^8-O(r^8)$。

从而当 $a_1=a_3=0$，$a_2>0$ 时，$O(0,0)$ 为三阶不稳定细焦点；当 $a_1=a_3=0$，$a_2<0$ 时，$O(0,0)$ 为三阶稳定细焦点。

4)当 $a_1=a_2=a_3=0$ 时，有 $P(x,y)=-P(x,y)$，$Q(x,y)=Q(x,-y)$，由对称原理易知 $O(0,0)$ 为中心。

3 极限环的存在性

定理2 下列条件之一成立时，系统（1）在 $O(0,0)$ 外围至少存在一个极限环，且 $\delta<0$ 时所产生的环不稳定，$\delta>0$ 时产生的环稳定。

i) $a_1>0$，$-1<<\delta<0$；

ii) $a_1<0$，$0<\delta<<0$；

iii) $a_1=0$，$a_3>0$，$-1<<\delta<0$；

iv) $a_1=0$，$a_3<0$，$0<\delta<<1$；

v) $a_1=a_3=0$，$a_2>0$，$-1<<\delta<0$；

vi) $a_1=a_3=0$，$a_2<0$，$0<\delta<<1$。

证明 在定理的条件i)、iii)或v)下，系统$(1)|_{\delta=0}$以 $O(0,0)$ 为不稳定细焦点。而当 $-1<<\delta<0$ 时，系统（1）以 $O(0,0)$ 为稳定粗焦点。而当 δ 从零开始减小时，系统（1）的奇点 $O(0,0)$ 由不稳定的细焦点变为稳定的粗焦点。从物理学角度来看，奇点由吸收能量到释放能量，此过程中必产生等幅振荡，再依据Hopf分支理论知，在此3种参数条件下系统（1）在点 $O(0,0)$ 外围至少产生一个不稳定的极限环。

在定理的条件ii)、iv)或vi)下，系统$(1)|_{\delta=0}$以 $O(0,0)$ 为稳定细焦点。而当 $0<\delta<<1$ 时，系统（1）以 $O(0,0)$ 为不稳定的粗焦点，从物理学角度来看，奇点由吸收能量到释放能量，此过程中必产生等幅振荡，再依据Hopf分支理论知，在此3种参数条件下系统（1）在点 $O(0,0)$ 外围至少产生一个稳定的极限环。

参考文献：

[1] 李继彬. 关于弱化的Hilbert第16问题的研究[J]. 昆明工学院学报，1988，13(1)：94-109.

[2] 张芷芬，丁同仁，黄文灶，等. 微分方程定性理论[M]. 北京：科学出版社，1985：49-118，196-233.

[3] 张锦炎，冯贝叶. 常微分方程几何理论与分支问题[M]. 北京：北京大学出版社，1981：20-93.

[4] 钱祥征，戴斌祥，刘开宇. 非线性常微分方程理论–方法–应用[M]. 长沙：湖南大学出版社，2006：129-130.

[5] Liu Xing-guo，Huang Li-Hong. The existence and uniqueness of limit cycles for a class of planar differential systems[J]. DYNAMICS OF CONTINUOUS, DISCRETE AND IMPULSIVE SYSTEMS A: Mathematical Analysis，2007，14(4)：509-524.

[6] 刘兴国，黄立宏. 一类平面多项式系统极限环的存在唯一性[J]. 高校应用数学学报(A辑)，2007，22(4)：455-461.

[7] 刘兴国，黄立宏. 一类平面五次系统极限环的存在唯一性[J]. 湖南工业大学学报，2007，21(3)：21-26.

[8] 刘兴国，黄立宏. 一类平面微分系统极限环的存在唯一性[J]. 经济数学，2007，24(2)：199-207.

[9] 朱思铭. 稳定性理论中的Arnold问题和中心焦点判别[C]//常微分方程理论及其应用. 北京：科学出版社，1992：15-18.

（责任编辑：廖友媛）