第22卷第5期　湖南工业大学学报　Vol.22 No.5
2008年9月　Journal of Hunan University of Technology　Sep. 2008

广义逆$A^{(3)}$和$A^{(4)}$的通式

何楚宁

（湖南师范大学 数学与计算机科学学院，湖南 长沙 410081）

摘　要：对于给定的$m \times n$复矩阵A，令$A^{(3)}$、$A^{(4)}$和$A^{(3,4)}$分别表示$A\{3\}=\left\{X \middle| AX = X^{*}A^{*}\right\}$，$A\{4\}-\left\{X \middle| XA - A^{*}X^{*}\right\}$和$A\{3\}\cap A\{4\}$中的任意一个矩阵，给出了$A\{3\}$、$A\{4\}$和$A\{3,4\}$的通式。

关键词：penrose逆；广义逆$A^{(3)}$、$A^{(4)}$；通式；复矩阵

中图分类号：O151.21　**文献标识码**：A　**文章编号**：1673-9833(2008)05-0005-02

General Forms for Generalized-Inverses $A^{(3)}$and $A^{(4)}$

He Chuning

（School of Mathematics and Computer Science , Hunan Normal University，Changsha 410081，China）

Abstract：In view of the given $m \times n$ complex matrix of A, we provide the general forms of $A^{(3)}$，$A^{(4)}$ and $A^{(3,4)}$ by supposing $A^{(3)}$、$A^{(4)}$ and $A^{(3,4)}$ as one of the arbitrary complex matrix respectively among $A\{3\}=\left\{X \middle| AX = X^{*}A^{*}\right\}$, $A\{4\}=\left\{X \middle| XA = A^{*}X^{*}\right\}$, and $A\{3\}\cap A\{4\}$ $A^{(3)}$.

Key words: penrose-inverses; generalized-inverses $A^{(3)}$and $A^{(4)}$; general form; complex matrix

1　背景知识

对于给定的$m \times n$复矩阵A，下列矩阵方程：

1）$AGA = A$；

2）$GAG = G$；

3）$(AG)^{*} = AG$；

4）$(GA)^{*} = GA$

称为penrose方程。如果G满足上述方程(i),(j)，…，(k)，则称G为$(ij\cdots k)$型逆或penrose型广义逆，简称广义逆，并记为$A^{(ij\cdots k)}$，其全体记为$A(ij\cdots k)$。{1234}逆常记为A^{+}，叫Mooer-penrose逆。广义逆矩阵的理论，在微分方程、算子理论、数理统计、最优化、计算数学等若干应用科学中，发挥了广泛而重要的作用，甚至成为了不可缺少的工具。

penrose广义逆有15类，其中除A^{+}外，其余均不唯一。找出除A^{+}外的其余14类广义逆的通式，无论在理论上还是应用上都是很有意义的工作，也是广义逆研究的重要课题之一。$A\{1\}$, $A\{1,3\}$, $A\{1,4\}$的一般通式早已获得[1-3]。文献[3]中还介绍了$A\{1,2\}$, $A\{1,2,3\}$和$A\{1,2,4\}$的某种表征。

文献[4]给出$A\{1,2\}$,$A\{1,2,3\}$,$A\{1,2,4\}$ 和$A\{1,3,4\}$的一般通式。

文献[5]给出了矩阵在奇异值分解下的全套penrose型逆的通式。

文献[6]给出了实对称矩阵在相和分解下的全套penrose型逆的通式。

文献[7]利用矩阵的置换分块给出了除$A^{(3,4)}$外的其余penrose型广义逆的通式。

本文将讨论$A\{3\}$、$A\{4\}$、$A\{3,4\}$的一般通式，这些通式不需要借助矩阵的分解，因而在理论和计算上都很有价值。

收稿日期：2008-08-22

基金项目：湖南省自然科学基金资助项目（08JJ3006）

作者简介：何楚宁（1959-），女，湖南长沙人，湖南师范大学副教授，主要研究方向为矩阵方程及矩阵广义逆.

2　相关引理介绍

本文约定，$C^{m\times n}$ 和 $C_r^{m\times n}$ 分别表示 $m\times n$ 或秩为 r 的 $m\times n$ 复矩阵全体；$A\in H^n$ 表示 $A\in C^{n\times n}$，且 $A^*=A$；I_n 表示 n 阶单位矩阵。有时简记为 I。$A^{(1)}$ 常记为 A^-，$r(A)$ 表示矩阵 A 的秩。

引理 1 [1]　设 $A\in C^{m\times n}, X\in C^{n\times p}, B\in C^{p\times r}$，则 $AXB=0$ 的通解为：

$$X=(I-A^-A)Y+Z(I-BB^-),\ Y,Z\in C^{n\times p}。$$

引理 2　1）设 $G\subset A\{3\}$，则 $AGAA^+=AG$；

2）设 $G\subset A\{4\}$，则 $A^+AGA=AG$。

证明　设 $G\subset A\{3\}$，则

$$AGAA^+=(AG)^*(AA^+)^*=(AA^+AG)^*=(AG)^{**}=AG。$$

可类似证明得 2）。

引理 3 [2]　1）设 $A\in C^{m\times n}, B\in C^{p\times n}$，则分块矩阵 $M=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$ 有一个｛1｝逆为

$$M^-=\Big[A^- -(I-A^-A)\big(B(I-A^-A)\big)^-BA^-\ \vdots\ (I-A^-A)\big(B(I-A^-A)\big)^-\Big];\qquad (1)$$

2）设 $A\in C^{m\times n}, D\in C^{m\times r}$，则分块矩阵 $N=[A\vdots D]$ 有一个｛1｝逆为

$$N^-=\begin{bmatrix}A^- -A^-D\big((I-AA^-)D\big)^-(I-AA^-)\\ \big((I-AA^-)D\big)^-(I-AA^-)\end{bmatrix}。\qquad (2)$$

3　主要结论及其证明

定理 1　$A\{3\}$ 的通式为

$$G=(I-A^-A)y+A^-Ay(AA^-)^*-A^-AA^-g(AA^-)^*+A^-AA^-y^*A^*,\qquad (3)$$

其中 $y\in C^{n\times m}$，$g\in H^m$。

$A\{4\}$ 的通式为

$$G=z(I-A^-A)+(A^-A)^*zAA^- -(A^-A)^*gA^-AA^- +A^-z^*A^-AA^-,\qquad (4)$$

其中 $z\in C^{n\times m}$，$g\in H^n$。

证明　设 $G\subset A\{3\}$，则由 $AG=G^*A^*$ 得

$$[A,I]\begin{bmatrix}G&0\\0&G^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I\\-A^*\end{bmatrix}=0,\qquad (5)$$

令 $N=[A, I_m]$，

$M=[I_m, A]^{\mathrm{T}}$，

由引理 1 及式（5）可得

$$\begin{bmatrix}G&0\\0&G^H\end{bmatrix}=(I-N^-N)Y-Z(I-MM^-)。\qquad (6)$$

式（6）中，$Y,Z\in C^{(n+m)\times(n+m)}$。

由引理 3 的 1）、2）知，N、M 分别有一个｛1｝逆为

$$N^-=[A,I_m]^-=\begin{bmatrix}A^-AA^-\\I-AA^-\end{bmatrix},\ M^-=\begin{bmatrix}I\\-A^*\end{bmatrix}^-=[I,0]。\qquad (7)$$

Y、Z 适当分块为

$$Y=\begin{pmatrix}Y_1&Y_2\\Y_3&Y_4\end{pmatrix},\ Z=\begin{pmatrix}Z_1&Z_2\\Z_3&Z_4\end{pmatrix}。\qquad (8)$$

将式（7）、（8）代入式（6）得：

$$\begin{bmatrix}G&0\\0&G^H\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}I-A^-A&-A^-AA^-\\0&AA^-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Y&Y_2\\Y_3&Y_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}Z_1&Z_2\\Z_3&Z_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\A^*&I\end{pmatrix}。\qquad (9)$$

比较式（9）两端得：

$$G=(I-A^-A)Y_1-A^-AA^-Y_3+Z_2A^*。\qquad (10)$$

在式（10）中，令

$y=Y_1$,

$Y_3=-Ay(AA^-)^*+g(AA^-)^*$,

$Z_2=A^-AA^-y^*$,

其中 $g\in H^m$，整理可得式（3）。下面说明式（3）为 $A\{3\}$ 的通式。

假设 G 由式（3）给出，

$$AG=Ay(AA^-)^*-AA^-g(AA^-)^*+AA^-y^*A^*,$$

易见 $(AG)^*=AG$，即 $G\subset A\{3\}$。

反之，对于任意 $G_0\subset A\{3\}$，不难验证 G_0 可表示为式（3）右端中取 $y=G_0$，$g=AG_0$ 的形式。因此，式（3）为 $A\{3\}$ 的通式。

$A\{4\}$ 的通式可类似证明。

推论 1　$A\{3\}$，的通式为

$$G=(I-A^+A)y+A^+AyAA^+-A^+gAA^++A^+y^*A^*,\qquad (11)$$

其中 $y\in C^{n\times m}$，$g\in H^m$。

$A\{4\}$，的通式为

$$G=z(I-AA^+)+A^+AzAA^+-A^+AgA^+-A^*z^*A^+,\qquad (12)$$

其中 $z\in C^{n\times m}$，$g\in H^n$。

定理 2　$A\{3,4\}$ 的通式为

$$G=(I-A^+A)z(I-AA^+)+A^+gAA^+,\qquad (13)$$

其中 $z\in C^{n\times m}$，$g\in H^m$，满足 $A^+gA\in H^n$。

证明　在式（11）中，令 $Y=z(I-AA^+)$，g 为 $-g$ 得

（下转第 27 页）