非均匀介质中弹性波的传播

陈海涛

（湖南工业大学，湖南 株洲 412008）

摘　要：对弹性波在非均匀介质传播时的波幅进行了研究，用解析方法探讨了非均匀区域性质变化时对弹性波波幅的影响，将非均匀区域离散成薄层，建立了波动方程和波幅传递矩阵，通过数值计算结果与解析解的比较，为弹性波在工程中的应用提供了计算分析的依据。

关键词：弹性波；非均匀介质；波幅

中图分类号：P631.5　　　　**文献标识码**：A　　　　**文章编号**：1673-9833(2008)04-0026-04

The Propagation of Elastic Wave in Inhomogeneous Media

Chen Haitao

（Hunan University of Technology， Zhuzhou Hunan 412008，China）

Abstract： Elastic wave transmission in a continuous inhomogeneous is studied. The wave transmission influence in inhomogeneous damaged zone is analyzed by dividing the inhomogeneous into layers and establishing the wave equation and transferring matrix of amplitude of waves. Then the study provides a basis for numerical analysis on engineering applying of wave by comparing the numerical results with the analytical results.

Key words： elastic wave; inhomogeneous media; amplitude of wave

弹性波的传播理论已得到了广泛的应用，如利用超声波可以进行材料的无损检测，对于均匀材料中波的传播问题，国内外已有广泛研究[1-3]。材料在制作、运输等过程中都可能产生损伤，从而引起材料局部的非均匀性。材料的损伤会严重影响其安全性，因此，研究非均匀性损伤中波的传播问题具有重要意义，可是由于计算上的复杂性，仅有较少的研究成果见诸报道[4]。本文利用积分变换，对损伤非均匀区域弹性模量 $E(x)$ 和密度函数 $\rho(x)$ 按指数形式连续渐变分布的情况，建立了数学计算模型，并得出了解析解。对一般的损伤非均匀区域，应用层状介质中波传播理论[5]，将非均匀区域离散成分层的均匀区域进行求解，得出了数值解[6]，所得结论可为无损检测和结构的动力反应问题分析提供参考依据。

1　介质的力学模型及其基本方程式

本研究中考虑的一个内部分界面的连续介质一维分析模型如图1所示，其中 a 为由于损伤造成的非均匀层厚度。$x>a$ 区域为均匀层，在 $x=a$ 处，弹性模量 $E(x)$ 和密度 $\rho(x)$ 连续，我们需要研究简谐波在 $x=a$ 处的反射和透射问题。

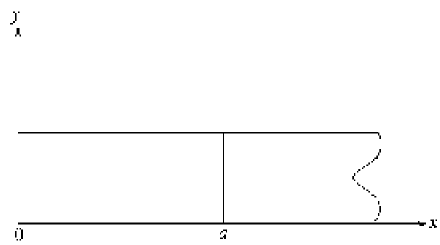

图1　计算模型

Fig. 1　Computed model

对于上面给定的问题，其运动方程为：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(E(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)=\rho(x)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial(u,t)}{\partial t}\right),\qquad(1)$$

设式（1）的位移解的一般形式为

$$u(x,t)=v(x,t)e^{i\omega t}。\qquad(2)$$

收稿日期：2008-05-13

作者简介：陈海涛（1968-），男，湖南株洲人，湖南工业大学高级工程师，湖南大学硕士生，主要研究方向为固体力学.

将式（2）代入式（1）得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(E(x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)-\rho(x)\omega^2 v(x)=0, \tag{3}$$

式（3）中，弹性模量 E 和密度 ρ 均为关于 x 的函数。

引入走时变换 $\zeta(x)=\int_0^x \frac{1}{E(x)}\mathrm{d}x$，（4）

则式（3）可化为自变量为 ζ 的方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\frac{\mathrm{d}v(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}+E(\zeta)\rho(\zeta)\omega^2 v(\zeta)=0, \tag{5}$$

式（5）的解的一般形式为

$$v(\zeta)=A\beta(\zeta)+B\gamma(\zeta)。$$

只有少数情况能解出 $\beta(\zeta)$ 和 $\gamma(\zeta)$ 的解析解，对于一般情况，我们只能借助于某些简化或数值计算手段进行求解，并由边界条件确定 A、B 值。

2　解析方法分析波的传播特性

考虑的分析模型同图1，在 x=0处给一简谐入射波，u=Asin ωt，其中，A=0.01 mm，ω=50 000 Hz，非均匀区材料弹性模量和密度按指数因子随坐标 x 渐变，具体变化参见图2、图3。

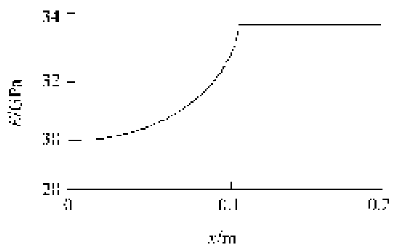

图 2　弹性模量变化曲线

Fig. 2　Elastil modulus change curve

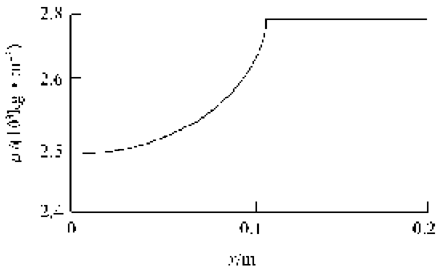

图 3　密度变化曲线

Fig. 3　Density canse curve

非均匀区材料弹性模量的计算式为：

$$\begin{cases} E(x)=E_0\exp(\beta x),\ (0\le x\le a); \\ E(x)=E_0\exp(\beta a),\ (x>a)。\end{cases} \tag{6}$$

式（6）中，

β 为非均匀区域内弹性模量按指数形式变化的指数因子；

E_0 为非均匀区表面弹性模量。

非均匀区材料密度的计算式为：

$$\begin{cases} \rho(x)=\rho_0\exp(\gamma x),\ (0\le x\le a); \\ \rho(x)=\rho_0\exp(\gamma a),\ (x>a)。\end{cases} \tag{7}$$

式（7）中，

γ 表示非均匀区域内密度按指数形式变化的指数因子；

ρ_0 为非均匀区表面密度。

由图2、3可看出，弹性模量和密度函数在非均匀区域随坐标 x 渐增。

将式（6）、（7）代入式（3）可得

$$E_0\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}-E_0\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+\rho_0\omega^2 v=0, \tag{8}$$

设损伤非均匀区域为混凝土，x=0处材质参数为 E_0=30 GPa，ρ_0=2 500 kg/m^3，若损伤非均匀区长度为0.1 m，当 β=1，γ=1时，式（8）的解为

$$v(x)=A\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{\rho_0\omega^2}{E_0}}\right)x}+B_1\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{\rho_0\omega^2}{E_0}}\right)x},$$

由式（2）得位移解为 $u(x,t)=v(x,t)\mathrm{e}^{i\omega t}$。

利用基本方程式和边界条件，在 x=0处位移和应力为已知，x=a 处位移和应力应连续，故可建立如下方程组

$$\begin{cases} A_0+B_0=A_1+B_1,\ (x=0); \\ A_1\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{\rho_0\omega^2}{E_0}}\right)a}+B_1\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{\rho_0\omega^2}{E_0}}\right)a}= \\ \qquad A_2\mathrm{e}^{\frac{a}{c_a}}-B_2\mathrm{e}^{-\frac{a}{c_a}},\ \ (x-a); \\ -\frac{i\omega}{c_a}\mathrm{e}^{\frac{a}{c_a}}A_2+\frac{i\omega}{c_a}\mathrm{e}^{\frac{a}{c_a}}B_2= \\ \qquad \left[-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{\rho_0\omega^2}{E_0}}\right]A\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{\rho_0\omega^2}{E_0}}\right)a}+ \\ \qquad \left[-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{\rho_0\omega^2}{E_0}}\right]B_1\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{\rho_0\omega^2}{E_0}}\right)a},\ (x=a)。\end{cases}$$

在上面的方程组中，A_0 为已知，A_1、B_1、A_2 为未知数。在终端接受处只考虑右行波，不考虑左行波，所以 B_2=B_0=0。

解上述方程组可得

$$\left[\frac{\frac{1}{2}+F}{1-\mathrm{e}^{-2Fa}}+\frac{\frac{1}{2}-F}{1-\mathrm{e}^{2Fa}}+\frac{i\omega}{c_a}\right]\mathrm{e}^{-\frac{a}{c_a}}A_2-$$

$$\left[\frac{-\frac{1}{2}+F}{1-\mathrm{e}^{-2Fa}}+\frac{-\frac{1}{2}-F}{1-\mathrm{e}^{2Fa}}-\left(-\frac{1}{2}-F\right)\right]\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}-F\right)a}A_0, \tag{9}$$

式（9）中，$F=\left(\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{\rho_0\omega^2}{E_0}}\right)a$。式（9）确定了入射端（$x$=0处）给定的入射波的波幅$A_0$与接收端（$x$=$a$处）接收到的波幅$A_2$之间的关系。

设a在0.05~0.25之间取值，即损伤非均匀区长度在此范围内变化时，在终端接收到的波幅值随a的变化曲线如图4所示。

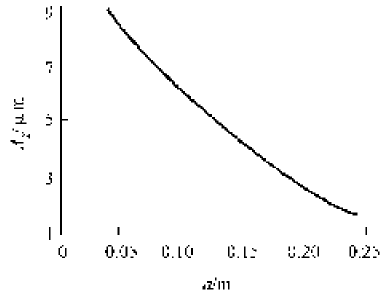

图4 非均匀区域长度对接收波幅的影响

Fig. 4 Infuence of lenth of inhomogeneous zone on wave amplitude

当β、γ为任意数时，利用走时变换式（4），将$E(x)$和$\rho(x)$表达式中的自变量x转变为自变量ζ，再进行相应计算。计算公式如下：

$$\begin{cases}E(\zeta)=\dfrac{E_0}{1-E_0\beta\zeta}, & (0<\zeta<a');\\ E(\zeta)=E_0\mathrm{e}^{\beta a}, & (\zeta>a')。\end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases}\rho(\zeta)=\dfrac{\rho_0^{\frac{\gamma}{\beta}}}{1-E_0\beta\zeta}, & (0\le\zeta\le a');\\ \rho(\zeta)=\rho_0\mathrm{e}^{\gamma a}, & (\zeta>a')。\end{cases} \quad (11)$$

式（10）、（11）中，$a'=\int_0^a\frac{1}{E(x)}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{\beta a}-1}{E_0\beta\mathrm{e}^{\beta a}}$。

位移在$0\leqslant x\leqslant a$及$x>a$二区域中的表达式为

$$\begin{cases}u(\zeta,t)=A_1\beta(\zeta)\mathrm{e}^{i\omega t}+B_1\gamma(\zeta)\mathrm{e}^{i\omega t}, \quad (0\le\zeta\le a');\\ u(\zeta,t)=A_2\exp\left[i\omega\left(t-\dfrac{\zeta-a'}{c_s}\right)\right]+\\ \qquad B_2\exp\left[i\omega\left(t+\dfrac{\zeta-a'}{c_s}\right)\right], \quad (\zeta>a')。\end{cases} \quad (12)$$

式（12）中，A_1、B_1、A_2、B_2为常数，同样可利用边界条件求解，即x=0处A_0、B_0为已知，x=a处位移和应力连续，根据基本方程式可解得A_1、B_1、A_2。

3 数值方法分析波的传播特性

在上述解析方法中，考虑了非均匀区域内的弹性模量E和密度ρ，为特殊的分布函数，而在一般情况下，非均匀区域内的方程（3）很难求出解析解，对于不容易用解析解求解的问题，下面采用层状介质中的波传播理论进行求解。

3.1 离散模型的建立及求解

将损伤非均匀区域离散成N层，每层厚度$\triangle x$ =（x_1-x_2）/N，则可假设在每一层的弹性模量E和密度ρ均为常量，即第k层的弹性模量E和密度ρ为E_k=$E(k\triangle x-\triangle x/2)$和$\rho_k$=$\rho(k\triangle x-\triangle x/2)$，并设$x$<0区域为第0层，$0<x<x_1$离散成$N$层，$x>x_2$为$N$+1层，一般情况下，第$N$层和第$N$+1层均有左行波和右行波，波动方程（3）对于每一层均可改写为

$$E_N\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}+\rho_N\omega^2v(x)=0。 \quad (13)$$

对于第N层，式（13）的通解为

$$v(x)=A_N\exp(i\kappa x)+B_N\exp(-i\kappa x)。 \quad (14)$$

位移解为

$$u(x,t)=A_N\exp\left[i\omega\left(t-\frac{x}{c_n}\right)\right]+B_N\exp\left[i\omega\left(t+\frac{x}{c_n}\right)\right]。 \quad (15)$$

同样，对于第N+1层，式（13）的通解为

$$v(x)=A_{N+1}\exp[i\kappa(x-h_n)]+B_{N+1}\exp[i\kappa(x-h_n)], \quad (16)$$

位移解为

$$u(x,t)=A_{N+1}\exp\left[i\omega\left(t-\frac{x-h_n}{c_{n+1}}\right)\right]+ B_{N+1}\exp\left[i\omega\left(t+\frac{x-h_n}{c_{n+1}}\right)\right]。 \quad (17)$$

式（14）~（17）中，

c_n为N层中的波速，且$c_n=\sqrt{E_n/\rho_n}$；

A_N为第N层向右传播的右行波的振幅；

B_N为第N层向左传播的左行波的振幅；

c_n为N+1层中的波速，且$c_n=\sqrt{E_{n+1}/\rho_n}$；

A_{N+1}为第N+1层向右传播的右行波的振幅；

B_N+1为第N+1层向左传播的左行波的振幅。

右分界面x=h_n上位移u和应力$\sigma=E\frac{\partial u}{\partial x}$连续，可得

$$A_N\exp\left(-i\omega\frac{h_n}{c_n}\right)+B_N\left(i\omega\frac{h_n}{c_n}\right)=A_N+B_{N+1}, \quad (18)$$

$$\frac{i\omega}{c_n}E_nA_N\exp\left(-i\omega\frac{h_n}{c_n}\right)+\frac{i\omega}{c_n}E_nB_n\exp\left(i\omega\frac{h_n}{c_n}\right)= -\frac{i\omega}{c_{n+1}}E_{n+1}A_{n+1}+\frac{i\omega}{c_{n+1}}E_{n+1}B_{n+1}。 \quad (19)$$

式（19）中，E_n、E_{n+1}分别为第n层和第n+1层的弹性模量，由式（18）、（19）可解得A_N、A_{N+1}，B_N、B_{N+1}的关系为

$$\begin{bmatrix} A_{N+1} \\ B_{N+1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}_N \begin{bmatrix} A_N \\ B_N \end{bmatrix}, \tag{20}$$

式（20）中，

$$\boldsymbol{T}_N = \begin{bmatrix} \dfrac{1+\alpha_n}{2}\exp(-i\kappa_n h_n), & \dfrac{1-\alpha_n}{2}\exp(i\kappa_n h_n) \\ \dfrac{1-\alpha_n}{2}\exp(-i\kappa_n h_n), & \dfrac{1+\alpha_n}{2}\exp(i\kappa_n h_n) \end{bmatrix}, \tag{21}$$

$$\alpha_n = \frac{\rho_n c_n}{\rho_{n+1} c_{n+1}}, \tag{22}$$

$$\kappa_n = \frac{\omega_n}{c_n}。 \tag{23}$$

$\boldsymbol{T}_N$ 为第 n 层与第 $n+1$ 层的波幅系数转换系数矩阵。

由式（20）~（23），可以递推得到第 0 层与第 $n+1$ 层的波幅转换关系为

$$\begin{bmatrix} A_{N+1} \\ B_{N+1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}'_{N+1} \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix}, \tag{24}$$

式（24）中，

$$\boldsymbol{T}'_{N+1} = \boldsymbol{T}_N \cdot \boldsymbol{T}_{N-1} \cdot \boldsymbol{T}_{N-2} \cdots \boldsymbol{T}_2 \cdot \boldsymbol{T}_1 \cdot \boldsymbol{T}_0 = \begin{bmatrix} t_{11}, & t_{12} \\ t_{21}, & t_{22} \end{bmatrix} \quad ;$$

A_{N+1} 是接收端的波幅。

3.2　实例计算

取与解析法中相同的实例，以便于数值计算结果与解析结果的比较。将当 a=0.1 m，n 取不同的数值时的实际结果与解析解的结果进行比较，所得结果如图 5 所示。

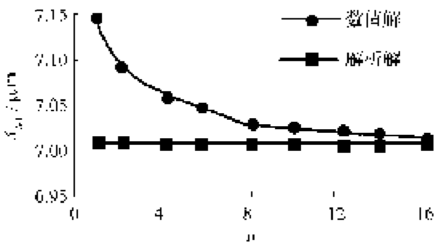

图 5　解析与数据结果比较

Fig. 5　Comprison of analytical and numerical results

从图 5 可以看出，随着分层数目的增加，数值解向解析解的逼近速度很快，当 n=16 时，数值解就已经逼近解析解了，其误差为 0.66 %。

4　结语

由解析方法和数值计算的结果可以看出，当损伤非均匀区域的弹性模量渐变递增时，末端接收到的波幅将减小，随着损伤非均匀区域长度的增大，末端接收的波幅会减小，反之亦成立；将非均匀区域离散成分层区域进行数值求解是可行的，对于解析方法不能求解的一些情况，运用分层法可以获得近似解及变化情况，这为无损检测提供了分析的依据。

参考文献：

[1] 熊祝华，郭　平. 弹性动力学[M]. 长沙：湖南大学出版社，1989.

[2] 杨桂通，张善元. 弹性动力学[M]. 北京：中国铁道出版社，1988.

[3] Wesolowski Z. Wave refelction on a continuous transition zone between two homogeneous materials[J]. Acta mechanica，1994，105：119-131.

[4] 罗松南，周正平，熊慧尔. 带状渐变非均匀损伤介质中波的传播[J]. 湖南大学学报：自然科学版，2004，31(2)：97-100.

[5] 布列霍夫斯基赫. 分层介质中的波[M]. 2 版. 北京：科学出版社，1985.

[6] 童　桦，周正平，罗松南. 非均匀损伤介质中波传播的数值解[J]. 力学季刊，2005，26(1)：53-59.

（责任编辑：廖友媛）