

# 变截面柔性梁横向碰撞问题求解

罗旗帜<sup>1</sup>, 黄志斌<sup>1,2</sup>

(1. 佛山科学技术学院 土木工程与建筑系, 广东 佛山 528000; 2. 广东工业大学 建设学院, 广东 广州 510006)

**摘要:** 研究了质点对变截面柔性梁横向碰撞问题。根据截面特性和撞击作用的影响, 将柔性梁离散为若干个单元, 然后对撞击体系的控制微分方程、边界条件和连续条件进行 Laplace 变换, 在频域内求得波动解, 然后采用 Crump 逆变换方法进行数值反演, 最后得到时域内的各种动态响应。数值算例给出了撞击力、位移、切应力和正应力的响应图, 结果展示了截面的变化对其动力响应的影响, 且通过与有限元的比较验证了本方法的正确性。此方法还可以推广到求解柔性梁的多点横向碰撞问题。

**关键词:** 变截面; 碰撞; 柔性梁; Laplace 变换; Crump 法

**中图分类号:** O242

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1673-9833(2008)04-0009-05

## Transverse Impact Solutions for Variable Cross-Section Flexible Beam

Luo Qizhi<sup>1</sup>, Huang Zhibin<sup>1,2</sup>

(1. Department of Civil Engineering and Architecture, Foshan University, Foshan Guangdong 528000, China;

2. School of Construction, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China)

**Abstract:** The transverse impact of variable cross-section flexible beam has been investigated. According to the effect of the section property and the impact force, the flexible beam was divided into several elements. First of all, the differential equation of the collision system, the boundary conditions and the continuity conditions were transformed with laplace transformation. The solution of the stress wave in frequency domain was educed. And then, numerical inverse method was demonstrated by using the inversion of laplace transformation with Crump. Finally, the dynamic response in time domain was obtained. The diagrams of impact force, displacement, shear stress and normal stress were gained by applying a numerical example. The effect of variable cross-section for dynamics response was displayed and this proposed method was verified by comparing its results with those by using the finite element method. This method can be promoted to solve the multi-point transverse impacting problem of structures.

**Key words:** variable cross-section; impact; flexible beam; Laplace transformation; Crump method

## 0 引言

结构弹性撞击问题是一个经典课题, Timoshenko 曾建立了钢球中心冲击简支梁问题的非线性积分方程, 并用分段数值求积方法进行了求解, 后来许多研究者对这问题做了更深入的研究<sup>[1-4]</sup>。但是, 这些研究均是以 Hertz 接触理论为基础的, 它并不代表物体间所有真实接触过程, 也不能反映物体间相互撞击时波的

传播过程。

近年来, 学术界研究出了另一种求解弹性碰撞问题的直接模态叠加方法 (DMSM)<sup>[5-8]</sup>, 它把结构弹性撞击问题看成是撞击结构系统振动的初值问题, 从而使复杂的碰撞问题简单化。但这些研究都局限在等截面的柔性梁, 对变截面柔性梁的横向碰撞问题研究还很少。在工程实际中存在着大量变截面柔性结构的撞击问题, 此类柔性结构的形状和材料复杂, 撞击过程

收稿日期: 2008-06-20

作者简介: 罗旗帜 (1955-), 男, 浙江温州人, 佛山科学技术学院教授, 博士, 主要研究方向为桥梁结构理论与应用;

黄志斌 (1983-), 男, 广东佛山人, 广东工业大学硕士研究生, 主要研究方向为桥梁结构理论与应用。

以及撞击瞬态波的传播问题也更为复杂, 需要进行深入的研究。

由于梁受质点撞击作用的时间极短, 了解梁的瞬态变形和应力变化规律是很重要的。若采用振动解答, 由于频带较宽, 尽管级数取很多项, 但还是很难得到满意的结果。本文采用波动方法求解, 首先把柔性梁根据截面特性和撞击作用的影响离散为若干个单元, 通过对控制微分方程、边界条件和连续条件进行 Laplace 变换, 得到频域内波动解的解析表达式, 然后采用 Crump 逆变换方法<sup>[9-11]</sup>进行数值反演, 最后得到时域内的各种动态响应。本文方法并不局限于求解单点碰撞问题, 还可以推广到多点碰撞问题<sup>[12]</sup>。

### 1 碰撞动力学模型及方程频域内求解

图 1 为物体横向碰撞变截面柔性梁的动力学模型。

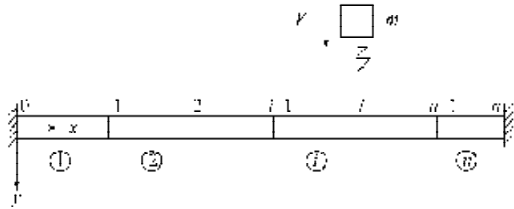


图 1 横向撞击变截面梁模型

Fig. 1 Model of variable cross-section flexible beam with transverse impact

根据截面特性的不同和碰撞力的影响, 沿梁长方向划分为  $n$  个单元和  $n+1$  个节点。对于一般的单元, 其控制微分方程为<sup>[13]</sup>

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\rho A}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

其中:  $x$  为梁的轴线坐标;

$y$  为挠度;

$t$  为时间;

$E$  为该单元的弹性模量;

$I$  为截面惯性矩;

$\rho$  为密度;

$A$  为截面积。

令  $\alpha = \frac{\rho A}{EI}$ , 考虑到单元初始位移和速度为零

$\left. \left\{ y, \frac{\partial y}{\partial t} \right\} \right|_{t=0} = 0$ , 所以对式 (1) 关于  $t$  进行 Laplace

变换为  $\frac{\partial^4 \tilde{y}}{\partial x^4} + \alpha p^2 \tilde{y} = 0$ 。  $(2)$

式 (2) 的特征方程为:  $\lambda^4 + \alpha p^2 = 0$ ,  $(3)$

其 4 个特征值分别为  $n_1, -n_1, n_2, -n_2$ , 则方程 (2) 的基本解形式为

$$\tilde{y}(x, p) = c_1 e^{n_1 x} + c_2 e^{-n_1 x} + c_3 e^{n_2 x} + c_4 e^{-n_2 x}, \tag{4}$$

其中  $c_1, c_2, c_3, c_4$  为待求系数。

单元上任一点的转角  $\theta$ , 弯矩  $M$ , 剪力  $Q$  与挠度  $y$  的关系分别为:

$$\theta = \frac{\partial y}{\partial x}, M = -EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, Q = -EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3},$$

对其进行 Laplace 变换, 代入式 (4) 则

$$\tilde{\theta}(x, p) = n_1 c_1 e^{n_1 x} - n_1 c_2 e^{-n_1 x} + n_2 c_3 e^{n_2 x} - n_2 c_4 e^{-n_2 x}, \tag{5}$$

$$\tilde{M}(x, p) = k_1 c_1 e^{n_1 x} - k_1 c_2 e^{-n_1 x} - k_2 c_3 e^{n_2 x} + k_2 c_4 e^{-n_2 x}, \tag{6}$$

$$\tilde{Q}(x, p) = k_3 c_1 e^{n_1 x} - k_3 c_2 e^{-n_1 x} + k_4 c_3 e^{n_2 x} - k_4 c_4 e^{-n_2 x}, \tag{7}$$

其中:  $k_1 = -EI n_1^2$ ;

$k_2 = -EI n_2^2$ ;

$k_3 = -EI n_1^3$ ;

$k_4 = -EI n_2^3$ 。

将式 (4) ~ (7) 写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} e^{n_1 x} & e^{-n_1 x} & e^{n_2 x} & e^{-n_2 x} \\ n_1 e^{n_1 x} & -n_1 e^{-n_1 x} & n_2 e^{n_2 x} & -n_2 e^{-n_2 x} \\ k_1 e^{n_1 x} & k_1 e^{-n_1 x} & k_3 e^{n_1 x} & k_3 e^{-n_1 x} \\ k_2 e^{n_1 x} & -k_2 e^{-n_1 x} & k_4 e^{n_2 x} & -k_4 e^{-n_2 x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{y}(x, p) \\ \tilde{\theta}(x, p) \\ \tilde{M}(x, p) \\ \tilde{Q}(x, p) \end{bmatrix}, \tag{8}$$

所以对于第  $i$  个单元, 代入相应的  $\rho_i, A_i, E_i, I_i$  即可写为一般式  $[K^{(i)}] \{C^{(i)}\} = \{Z^{(i)}\}$ ,  $(9)$

对于第  $i$  个单元节点 (非碰撞位置), 位移、转角、弯矩、剪力连续, 即

$$\{Z_i^{(i)}\} - \{Z_i^{(i+1)}\}, \tag{10}$$

$$[K_i^{(i)}] \{C^{(i)}\} - [K_i^{(i+1)}] \{C^{(i+1)}\} = 0. \tag{11}$$

现引入碰撞力的影响。用质量为  $m$  的物体, 以速度  $V$  横向撞击第  $i$  节点, 撞击时物体和节点之间的接触用一刚度为  $f$  的弹簧模拟, 其接触平衡条件如下:

$$\begin{cases} m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{f} (u - y_i) = 0, \\ \frac{1}{f} (u - y_i) = Q_i^{(i)} - Q_i^{(i+1)}; \end{cases} \tag{12}$$

其中  $u(t)$  为撞击物的位移。

对式 (12) 进行 Laplace 变换, 且由于撞击物初始位移为零, 初始速度为  $V$  (即  $u=0, \frac{du}{dt} = V$ ), 则式 (12) 可简化为:

$$\frac{1}{2} m p^2 (\tilde{y}_i^{(i)} + \tilde{y}_i^{(i+1)}) + (\tilde{Q}_i^{(i)} - \tilde{Q}_i^{(i+1)}) (m p^2 f + 1) - m p V, \tag{13}$$

撞击节点两侧的位移、转角、弯矩为连续, 联立式 (13), 可得撞击点处的平衡方程为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}mp^2 & 0 & 0 & mp^2 f + 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{Y}_i^{(i)} \\ \tilde{\theta}_i^{(i)} \\ \tilde{M}_i^{(i)} \\ \tilde{Q}_i^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}mp^2 & 0 & 0 & mp^2 f + 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{Y}_i^{(i-1)} \\ \tilde{\theta}_i^{(i-1)} \\ \tilde{M}_i^{(i-1)} \\ \tilde{Q}_i^{(i+1)} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ mV \end{Bmatrix}, \quad (14)$$

其中设:  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}mp^2 & 0 & 0 & mp^2 f + 1 \end{bmatrix} = [B_i^{(i)}];$   $\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ mV \end{Bmatrix} = \{Z_i\}。$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}mp^2 & 0 & 0 & mp^2 f + 1 \end{bmatrix} = [B_i^{(i-1)}];$$

所以式(14)可写为

$$[B_i^{(i)}][K_i^{(i)}]\{C^{(i)}\} - [B_i^{(i+1)}][K_i^{(i+1)}]\{C^{(i+1)}\} = \{Z_i\}。 \quad (15)$$

把  $n$  个单元装拼起来, 写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} [K_0^{(1)}] \\ [K_1^{(1)}] - [K_1^{(2)}] \\ \vdots \\ [B_i^{(i)}][K_i^{(i)}] - [B_i^{(i+1)}][K_i^{(i+1)}] \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{C^{(1)}\} \\ \{C^{(2)}\} \\ \vdots \\ \{C^{(i+1)}\} \\ \vdots \\ \{C^{(n)}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{Z_0^{(1)}\} \\ 0 \\ \vdots \\ \{Z_i\} \\ \vdots \\ \{Z_n^{(n)}\} \end{Bmatrix}, \quad (16)$$

把式(16)简写为

$$[K]_{4(n-1) \times 4n} \{C\}_{4n \times 1} = \{Z\}_{4(n+1) \times 1}, \quad (17)$$

代入相应的边界条件, 可把矩阵  $[K]_{4(n+1) \times 4n}$  简化为  $[K]_{1n \times 1n}$ , 从而可以求得  $\{C\}_{4n \times 1}$ 。

## 2 数值反演

应用 Laplace 变换求时域响应的主要困难之一就是迅速地获得其反演, 这个问题对于简单的有理函数也不能轻易解决。研究表明: Laplace 逆变换是一个病态问题, 得到解析的 Laplace 逆变换结果一般很困难, 常采用数值逆变换的方法。比较常见的 Laplace 数值反演方法有 Duber 法、Abate 法、Durbin 法、Stefest 法、Crump 法、Schapery 法、Legendre 多项式法和 Laguerre 多项式法等。针对本问题的具体特点以及各种方法的优缺点, 本文采用 Crump 法。

定义函数  $f(t)$  的 Laplace 变换式为:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (18)$$

Laplace 逆变换求  $f(t)$  的公式为:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(s)e^{st} ds, \quad (19)$$

式中:  $s = \beta + iw$ ,  $\beta$  和  $w$  分别为  $s$  的实部和虚部,  $i$  为虚

数单位。

采用 Crump 逆变换方法进行数值反演, 其反演公式为

$$f(t) \approx \frac{e^{\alpha t}}{T} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{Re} [F(\alpha)] + \sum_{k=1}^N \operatorname{Re} \left[ F \left( \alpha + i \frac{k\pi}{T} \right) \right] \cos \left( \frac{k\pi}{T} t \right) + \sum_{k=1}^N \operatorname{Im} \left[ F \left( \alpha - i \frac{k\pi}{T} \right) \right] \sin \left( \frac{k\pi}{T} t \right) \right\}, \quad (20)$$

式中:  $i$  为虚数单位;

$\operatorname{Re}(s)$  为求实部函数;

$\operatorname{Im}(s)$  为求虚部函数;

$\alpha = \alpha - \frac{\ln(E')}{2T}$ ,  $\alpha$  的取值要满足  $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ ,  $M$  为任意常数,  $E'$  为容许误差, 可根据需要取为  $10^{-5} \sim 10^{-8}$ ,  $T = 0.8t_{\max}$ ,  $t_{\max}$  为欲求的最大时间, 但因为  $t$  越接近  $t_{\max}$ , 收敛越慢, 故  $t_{\max}$  也可取为欲求的最大时间的 2 倍, 以保证在所需要的时间段内计算结果的准确性。当然, 计算点数须相应扩大。

需要补充说明: 当  $t=0$  时, 由式(20)算得的值应乘以 2。式(20)中无穷级数求和可用欧拉变换方法, 或 FFT 法等加速算法, 以提高收敛速度。无穷级数的求和项数可通过收敛计算确定。若不采用加速算法, 求和项一般需 500 项以上才收敛。

### 3 算例分析

算例的有关计算参数为：物体撞击两端简支的变截面梁（如图2），梁的密度为  $7.83 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ，弹性模量  $207 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ，梁长为  $l_1 + l_2 = 2.5 \text{ m} + 2.5 \text{ m}$ ，截面  $A_1$  为  $200 \times 200 \text{ mm}^2$ ，截面  $A_2$  为  $200 \times 300 \text{ mm}^2$ ，撞击体的质量为  $500 \text{ kg}$ ，撞击速度为  $3 \text{ m/s}$ ，柔度系数  $0.2 \text{ MN/m}$ 。

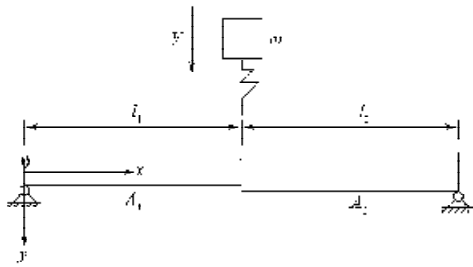


图2 算例示意图

Fig. 2 Sketch of example

采用本文方法计算求得的撞击力响应与用 ANSYS 有限元（100个单元）求得的撞击力响应的对比如图3所示。

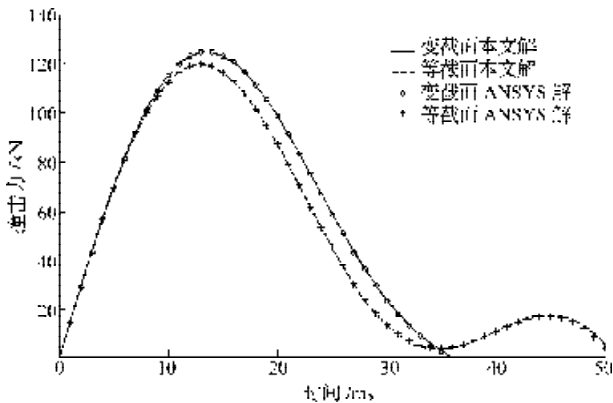


图3 撞击力响应图

Fig. 3 Response sketch of impact force

从图3中可以看出，无论是等截面梁（ $200 \times 200 \text{ mm}^2$ ）还是变截面梁（ $200 \times 200 \text{ mm}^2$ ， $200 \times 300 \text{ mm}^2$ ），其本文解与有限元解吻合得非常好，说明本方法的正确性且有较好的精度。从图3还可以看出，物体撞击等截面梁的最大撞击力为  $117.10 \text{ kN}$ ，撞击时间为  $51 \text{ ms}$ ；而物体撞击变截面梁的最大撞击力为  $124.57 \text{ kN}$ （比撞击等截面的大），撞击时间为  $37 \text{ ms}$ （比撞击等截面的小）。无论是撞击等截面还是变截面梁，由于考虑了梁的柔性作用，其撞击力比物体撞击刚性墙的撞击力  $150 \text{ kN}$  小，其撞击时间比撞击刚性墙的撞击时间  $31.4 \text{ ms}$  长。

图4为变截面梁在不同时刻下的位移分布图，由于截面的变化，其位移曲线并不是呈对称分布，位移最大值出现在梁截面刚度较小的一侧。

图5为不同时刻下梁的切应力分布图。

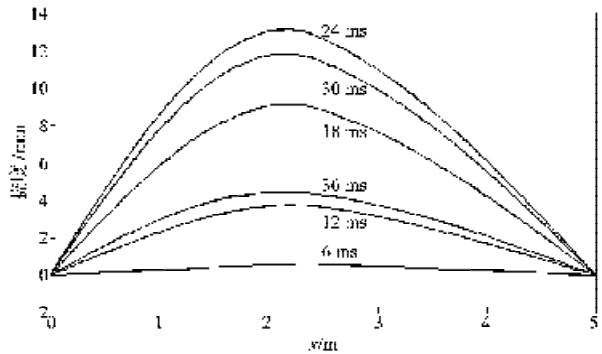


图4 位移响应图

Fig. 4 Response sketch of displacement

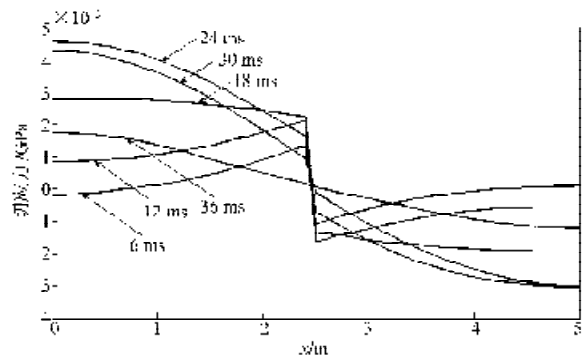


图5 切应力响应图

Fig. 5 Response sketch of shear stress

从图5中可以看出，其最大切应力出现在两端边界上，但由于梁两侧刚度的不同，左侧的切应力响应大于右侧的切应力响应。

图6为不同时刻下梁的正应力分布图。

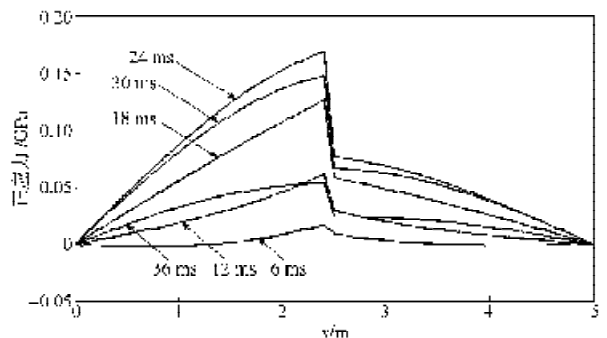


图6 正应力响应图

Fig. 6 Response sketch of normal stress

从图6中可以看出，其最大正应力出现在撞击点处，左侧的正应力明显大于右侧的正应力。

图7、8分别是梁撞击点处的切应力和正应力响应图，它进一步显示了梁的危险截面发生在梁刚度较小的一侧。

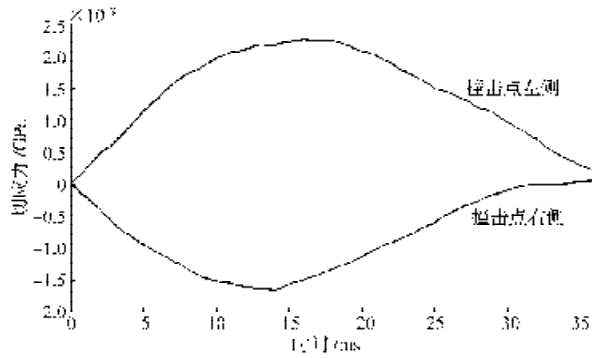


图7 撞击点处切应力响应图

Fig. 7 Response sketch of shear stress in impact point

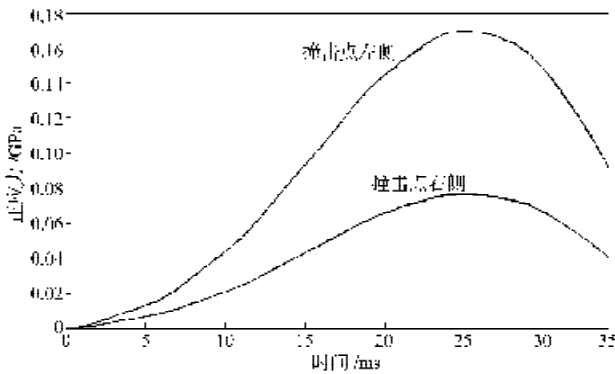


图8 撞击点处正应力响应图

Fig. 8 Response sketch of normal stress in impact point

## 4 结论

1) 本文运用 Laplace 变换求解变截面柔性梁横向撞击问题, 为解决工程中的复杂柔性体碰撞问题提供了新的途径; 研究了梁截面特性的变化对其撞击力、位移、切应力和正应力的动力响应的影响。数值算例中运用本文方法的求解结果与有限元解吻合得非常好, 说明了本方法的正确性且有较高的精度。

2) 本文方法并不局限于求解单点碰撞问题, 还可以通过修改矩阵 $[K]$ , 把单点碰撞问题推广到多点碰撞问题。

3) 利用本文的方法, 还可以简便的对其边界条件

进行修改, 从而得到不同边界条件下各种动力响应的解答。

### 参考文献:

- [1] Timoshenko S, Young D H. Vibration Problems in Engineering [M]. 2nd ed. New York: Van Nostrand, 1937: 348-358.
- [2] Lee Y, Hamilton J F, Sullivan J W. The lumped parameter method for impact problems[J]. J. Appl Mech, 1983, 50: 823-827.
- [3] Banerjee B B. Dynamic Response of a Multispan Beam to Transverse Impact[J]. Nuclear Engineering and Design, 1975, 34(3): 335.
- [4] Sankar B V, Sun C T. An efficient numerical algorithm for transverse impact problems[J]. Computers and Structures, 1985, 20 (6): 1009-1012.
- [5] 诸德超, 邢誉峰. 点弹性碰撞问题之解析解[J]. 力学学报, 1996, 28(1): 99-103.
- [6] 邢誉峰. 梁结构线弹性碰撞的解析解[J]. 北京航空航天大学学报, 1998, 24 (6): 633-637.
- [7] 鲍四元, 邓子辰, 范存新. 质点与 Euler-Bernoulli 梁任意点撞击问题的解析解[J]. 振动与冲击, 2008, 27(1): 163-166.
- [8] 鲍四元, 邓子辰. 利用 DMSM 方法求解弹性撞击恢复系数[J]. 动力学与控制学报, 2005, 3(4): 44-49.
- [9] 盖秉政, 黄剑敏. 论半无限长杆对有限长梁的横向弹性冲击问题[J]. 应用力学学报, 1996, 13(4): 28-34.
- [10] Crump K S. Numerical Inversion of Laplace Transforms Using a Fourier Series Approximation [J]. J. ACM, 1976, 23 (1): 89-96.
- [11] 冯志刚, 周建平. 基于直接数值积分的 Laplace 逆变换方法的比较研究[J]. 应用数学与计算数学学报, 1997, 11 (1): 33-40.
- [12] 邢誉峰, 曹雪利. 结构多点弹性正撞问题的解法[J]. 力学学报, 1997, 29(5): 612-616.
- [13] 宋一凡. 公路桥梁动力学[M]. 北京: 人民交通出版社, 2000: 4-6.

(责任编辑: 张亦静)