五对角逆 $M-$ 矩阵的充分条件

朱辉华[1]，朱　砾[2]

（1. 广东工业大学 华立学院 公共基础部，广东 增城 511325；
2. 湘潭大学 数学与计算科学学院，湖南 湘潭 410005）

摘　要：通过矩阵分块的方法，探讨了五对角逆 $M-$ 矩阵的结构，给出了五对角逆 $M-$ 矩阵的充分条件，进一步证明了这类五对角矩阵在Hadamard积下的封闭性。

关键词：逆 $M-$ 矩阵；五对角逆 $M-$ 矩阵；Hadamard积
中图分类号：O175.14　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2008)03-0032-03

Sufficient Condition for Five-Diagonal Inverse $M-$ Matrices

Zhu Huihua[1], Zhu Li[2]

(1.Department of Public Basis, Huali College, Guangdong University of Technology, Zengcheng Guangdong 511325, China;
2. School of Mathematics and Computer Science, Xiangtan University, Xiangtan Hunan 410005, China)

Abstract: By the partitioning of block matrices, the structure of Five-diagonal inverse $M-$ Matrices is discussed and a sufficient condition of five-diagonal inverse $M-$ matrices is also put forward. It further proves its sealing properties under Hadamard product.

Key words: $M-$matrices; five-diagonal inverse $M-$ matrices; Hadamard product

0　引言

逆 $M-$ 矩阵在生物学、经济学、智能科学、计算方法等许多学科中都有重要应用，受到国内外学者的极大关注。由于判断一般非负矩阵是否为逆 $M-$ 矩阵比较困难，人们转而研究一些特殊形状的非负矩阵，其中杨传胜等讨论了逆 $M-$ 矩阵在Hadamard积下的封闭性[1]；杨尚骏等用图论的方法讨论了三对角逆 $M-$ 矩阵的结构[2-4]；王伟贤等用分块的方法讨论了三对角逆 $M-$ 矩阵的充要条件[5,6]。近年来，随着计算机的普及，微分方程数值解法得到了较大的发展，在数值分析中占有极重要的地位，在解决具体的方程模型中，五对角逆 $M-$ 矩阵起到越来越直接的作用。

例如：方程 $\begin{cases} u'' = f, \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \end{cases}$

其中给定函数 f，我们要寻求 u 的最好估计值，运用有限元法解以上方程。而在某些具体的方程模型中，要求所取的基函数具有光滑性，那么须取支集占3个单元的二次样条函数为基函数，这时，产生的刚度矩阵为五对角逆 $M-$ 矩阵，以离散形式表示为：

$$A_{ij} = \int f\psi_j' \mathrm{d}x,$$

其中，刚度矩阵 A 是五对角 $M-$矩阵，ψ_j 是基函数，从而可得到 $u = A^{-1}\int f\psi_j' \mathrm{d}x$，其中 A^{-1} 为五对角逆 $M-$ 矩阵[7]。

为了探索五对角逆 $M-$ 矩阵的结构性质及判定方法，给出了五对角逆 $M-$ 矩阵的充分条件，并且证明了这类五对角矩阵在Hadamard积下的封闭性。

设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$，若 $a_{ij}\leq 0$，$(i\neq j)$，并且 $A^{-1}\geq 0$，则称 A 是 $M-$矩阵。如果 A^{-1} 为 $M-$矩阵，则称 A 为逆 $M-$矩阵。

设矩阵 $A\in C^{n\times n}$，如果对任意的 $|i-j|>2$ 有 $a_{ij}=0$，则称 A 是五对角矩阵。

另外用 $A\circ B$ 记同阶方阵 A 与 B 的按对应元素的乘积，即Hadamard积。

引理1[5-7]　设 n 阶分块非负矩阵

收稿日期：2008-03-21
作者简介：朱辉华（1982-），女，湖南双峰人，广东工业大学教师，硕士，主要研究方向为矩阵论及其应用.

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & b & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix},$$

其中主子阵$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & b \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} b & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$均为逆$M$-矩阵，并且$A_{13}=\dfrac{A_{12}A_{23}}{b}$，$A_{31}=\dfrac{A_{32}A_{21}}{b}$，则$A$是逆$M$-矩阵。

引理 2[5-7]　二阶非负矩阵$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$是逆$M$-矩阵，当且仅当$a>0$，$d>0$，$\det A>0$。

引理 3[5-7]　设二阶非负矩阵

$$A_1=\begin{pmatrix} a_1 & c \\ b_1 & d \end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

中主对角元素全大于零，并且$\det A_1>0$，$\det A_2>0$，则$\det(A_1\circ A_2)>0$。

1　主要结果

文献[5]讨论了三对角逆M-矩阵的判定方法，下面讨论五对角逆M-矩阵的情形。

定理 1　设五阶五对角非负矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & d_1 & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & d_2 & 0 \\ e_1 & c_2 & a_3 & b_3 & d_3 \\ 0 & e_2 & c_3 & a_4 & b_4 \\ 0 & 0 & e_3 & c_4 & a_5 \end{pmatrix}$$满足：

1) $a_i>0,\ i=1,2,\cdots,5$；

2) $\det\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & a_{i+1} \end{pmatrix}>0,\ i=1,2,3,4$；

3) $d_1b_3=0,\ e_1c_3=0,\ d_1d_3=0,\ e_1e_3=0,\ b_2d_2=0,\ c_2e_3=0$；

4) $d_1=\dfrac{b_1b_2}{a_2},\ e_1=\dfrac{c_1c_2}{a_2},\ d_2=\dfrac{b_2b_3}{a_3},\ e_2=\dfrac{c_2c_3}{a_3},\ d_3=\dfrac{b_3b_4}{a_4},$
$e_3=\dfrac{c_3c_4}{a_4}$。

则矩阵A是五对角逆M-矩阵。

证明　首先对矩阵A作如下分块：

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix},$$

容易看出

$$A_{11}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & a_2 \end{pmatrix},\ A_{12}=\begin{pmatrix} d_1 \\ b_2 \end{pmatrix},\ A_{13}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d_2 & 0 \end{pmatrix},$$
$$A_{21}=(e_1\ \ c_2),\ A_{22}=(a_3),\ A_{23}=(b_3\ \ d_3),$$
$$A_{31}=\begin{pmatrix} 0 & e_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_{32}=\begin{pmatrix} c_3 \\ e_3 \end{pmatrix},\ A_{33}=\begin{pmatrix} a_4 & b_4 \\ c_4 & a_5 \end{pmatrix},$$

设$B=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ c_1 & a_2 & b_2 \\ e_1 & c_2 & a_3 \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} a_3 & b_3 & d_3 \\ c_3 & a_4 & b_4 \\ e_3 & c_4 & a_5 \end{pmatrix}$，

由条件1)，2)及引理2，有

$$a_i>0\ (i=1,\cdots,5),\ \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & a_{i+1} \end{pmatrix}\ (i=1,2,3,4)$$

为逆M-矩阵，因为

$$d_1=\frac{b_1b_2}{a_2},\ d_3=\frac{b_3b_4}{a_4},\ e_1=\frac{c_1c_2}{a_2},\ e_3=\frac{c_3c_4}{a_4},$$

利用引理1得，主子阵B，C为逆M-矩阵。又因为

$$d_1b_3=0,\ d_1d_3=0,\ b_2d_3=0,\ d_2=\frac{b_2b_3}{a_3},$$

所以得到$\begin{pmatrix} d_1 \\ b_2 \end{pmatrix}(b_3\ \ d_3)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d_2 & 0 \end{pmatrix}a_3$。

同理有$\begin{pmatrix} c_3 \\ e_3 \end{pmatrix}(e_1\ \ c_2)=\begin{pmatrix} 0 & e_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}a_3$，

即对矩阵A分块后$A_{13}=\dfrac{A_{12}A_{23}}{a_3}$、$A_{31}=\dfrac{A_{32}A_{21}}{a_3}$，由引理1可得$A$为逆$M$-矩阵。

定理 2　设$n(\ge 5)$阶五对角非负矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & d_2 & 0 & \cdots & \vdots \\ e_1 & c_2 & a_3 & b_3 & d_3 & \cdots & \vdots \\ 0 & e_2 & c_3 & a_4 & b_4 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & e_3 & c_4 & a_5 & \cdots & d_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & e_{n-2} & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$满足：

1) $a_i>0,\ i=1,2,\cdots,n$；

2) $\det\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & a_{i+1} \end{pmatrix}>0,\ i=1,2,3,\cdots,n-1$；

3) $d_ib_{i+2}=0,\ e_ic_{i+2}=0,\ d_id_{i+2}=0,\ e_ie_{i+2}=0,\ i=1,2,\cdots,n-4,$
$b_id_i=0,\ c_ie_{i+1}=0,\ i=2,3,\cdots,n-3$；

4) $d_i=\dfrac{b_ib_{i+1}}{a_{i+1}},\ e_i=\dfrac{c_ic_{i+1}}{a_{i+1}},\ i=1,2,\cdots,n-2$。

则矩阵A是五对角逆M-矩阵。

证明　用数学归纳法证明，当时n=5，由定理1知

结论成立。假设 $n=k$ 时，$\boldsymbol{A}$ 是逆 $\boldsymbol{M}-$ 矩阵，当 $n=k+1$ 时，

$$\text{设}\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & d_2 & 0 & \cdots & \vdots \\ e_1 & c_2 & a_3 & b_3 & d_3 & \cdots & \vdots \\ 0 & e_2 & c_3 & a_4 & b_4 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & e_3 & c_4 & a_5 & \cdots & d_{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & b_{k-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & e_{k-3} & c_{k-2} & a_{k-1} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix} a_{k-1} & b_{k-1} & d_{k-1} \\ c_{k-1} & a_k & b_k \\ e_{k-1} & c_k & a_{k+1} \end{pmatrix},$$

由归纳假设知 $\boldsymbol{A}_1$ 是逆 $\boldsymbol{M}-$ 矩阵。又因为

$$\det\begin{pmatrix} a_{k-1} & b_{k-1} \\ c_{k-1} & a_k \end{pmatrix}>0,\ \det\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & a_{k+1} \end{pmatrix}>0,$$

$$d_{k-1}=\frac{b_{k-1}b_k}{a_k},\ e_{k-1}=\frac{c_{k-1}c_k}{a_k},$$

由引理 1 知主子阵 $\boldsymbol{A}_2$ 也是逆 $\boldsymbol{M}-$ 矩阵，而由如上分块形式，有

$$\boldsymbol{A}_{12}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ d_{k-3} \\ b_{k-2} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_{13}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ d_{k-2} & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_{22}=a_{k-1},\ \boldsymbol{A}_{23}=(b_{k-1}\ \ d_{k-1}),$$

因为

$$d_{k-3}b_{k-1}=0,\ d_{k-3}d_{k-1}=0,\ b_{k-2}d_{k-1}=0,\ d_{k-2}=\frac{b_{k-2}b_{k-1}}{a_{k-1}},$$

所以有

$$\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{23}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ d_{k-3} \\ b_{k-2} \end{pmatrix}(b_{k-1}\ \ d_{k-1})=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ d_{k-2} & 0 \end{pmatrix}a_{k-1}=\boldsymbol{A}_{13}a_{k-1},$$

即 $\boldsymbol{A}_{13}=\frac{\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{23}}{b}$，同理有 $\boldsymbol{A}_{31}=\frac{\boldsymbol{A}_{32}\boldsymbol{A}_{21}}{b}$，即对矩阵分块后有

$\boldsymbol{A}_{13}=\frac{\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{23}}{b}$，$\boldsymbol{A}_{31}=\frac{\boldsymbol{A}_{32}\boldsymbol{A}_{21}}{b}$，利用引理1知，矩阵为逆矩阵。

若 n 阶五对角矩阵 $\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$ 满足定理 2 中的 4 个条件，则容易检验 Hadamard 积 $\boldsymbol{A}_1\circ\boldsymbol{A}_2$ 是五对角矩阵，而且也满足定理 2 中的 4 个条件。所以，我们有下面的结论：

定理 3　设 $n\geq 5$ 阶五对角非负矩阵 $\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$ 都满足定理 2 中的 4 个条件，则 Hadamard 积 $\boldsymbol{A}_1\circ\boldsymbol{A}_2$ 是五对角逆 $\boldsymbol{M}-$ 矩阵。

参考文献：

[1] 杨传胜，杨尚骏. 逆矩阵在Hadamard积下的封闭性[J]. 安徽大学学报：自然科学版，2000，24(4)：15-19.

[2] 杨尚骏，范益政. 三对角逆矩阵[J]. 安徽大学学报：自然科学版，2001，25(3)：1-6.

[3] 杨传胜，徐成贤，黄廷祝. 三对角逆矩阵[J]. 高等学校计算数学学报，2002，24(2)：179-185.

[4] 陈景良，陈向晖. 特殊矩阵[M]. 北京：清华大学出版社，2001.

[5] 王伟贤，王志伟. 三对角逆矩阵的判定[J]. 高等学校计算数学学报，2005，27(3)：274-278.

[6] 杨传胜，徐成贤. 非负不可约矩阵的广义Perron补矩阵[J]. 数学进展，2005，34(3)：361-366.

[7] 余德浩. 微分方程数值解[M]. 北京：科学出版社，2003.

（责任编辑：罗立宇）