第22卷第3期　　湖南工业大学学报　　Vol.22 No.3
2008年5月　　Journal of Hunan University of Technology　　May 2008

Bergman空间到Dirichlet空间的Cesàro算子

易奎英[1,2]，刘竞成[2]

（1. 湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412000；2. 湖南师范大学 数学与计算机科学学院，湖南 长沙 410081）

摘　要：讨论了在 C^n 中单位球上Bergman空间到Dirichlet空间的Cesàro算子的有界性和紧性，得出当 α，$\beta>-1$, $0<p\le q<\infty$ 时，Bergman空间 A_α^p 到Dirichlet空间 D_β^q 的加权Cesàro算子 T_ψ 为有界算子和紧算子的充要条件。

关键词：有界性；紧性；Dirichlet空间；Cesàro算子；Bergman空间

中图分类号：O174.56　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1673-9833(2008)03-0024-03

Cesàro Operator From Bergman Space to Dirichlet Space

Yi Kuiying[1], Liu Jingcheng[2]

（1. School of Science, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan 412000, China

2. School of Mathematics and Computer Science, Hunan Normal University, Changsha 410081, China）

Abstract: The boundedness and compactness for the Cesàro operator T_ψ from Bergman space A_α^p to Dirichlet space D_β^q are discussed on the unit ball of C^n. It can obtain the bounded or compact sufficient and necessary conditions for the extended Cesàro operator T_ψ from Bergman spaces A_α^p to Dirichletspaces D_β^q if α, $\beta>-1$, $0<p\le q<\infty$.

Key words: boundedness; compactness; Dirichlet space; Cesàro operator; Bergman space

0　引言

用 B_n 表示 C^n 中的单位球，$\mathrm{d}v$ 和 $\mathrm{d}\sigma$ 分别表示 B_n 和 ∂B_n 的正规Lebesgue测度，对 $z=(z_1,\cdots,z_n)$，$w=(w_1,\cdots,w_n)$，我们定义 $<z,w>=\sum_{j=1}^{n} z_j\overline{w}_j$，用 $\beta(.,.)$ 表示 B_n 上的Bergman度量，$E(z,r)=\{w\in B_n:\beta(z,w)<r\}$ 表示中心在 z 点半径为 r 的Bergman球；$H(B_n)$ 表示 B_n 上全纯函数全体；H^∞ 表示 B_n 上的有界全纯函数全体。对 $\alpha>-1$，我们定义 $\mathrm{d}v_\alpha(z)=c_\alpha(1-|z|^2)^\alpha\mathrm{d}v(z)$，其中 $c_\alpha=\dfrac{\Gamma(n+1+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha+1)}$。

设 $0<p<\infty$, $\alpha>-1$, B_n 上的加权Bergman空间 A_α^p 是 $H(B_n)$ 满足 $\|f\|_{A_\alpha^p}^p=\int_{B_n}|f(z)|^p\,\mathrm{d}v_\alpha(z)<\infty$ 的函数 f 的全体。

设 $0<q<\infty$, $\beta>-1$, B_n 上的加权Dirichlet空间 D_β^q 是 $H(B_n)$ 中满足 $\|f\|_{D_\beta^q}^q=|f(0)|^q+\int_{B_n}|Rf(z)|^q\,\mathrm{d}v_\beta(z)<\infty$ 的函数 f 的全体，其中记

$$\nabla f(z)=\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}(z),\cdots,\frac{\partial f}{\partial z_n}(z)\right),\quad Rf(z)=\langle\nabla f(z),\bar{z}\rangle。$$

定义　给定 $\psi\in H(B_n)$，$H(B_n)$ 上广义Cesàro算子 T_ψ，

$$T_\psi f(z)=\int_0^1 f(tz)R\psi(tz)\frac{\mathrm{d}t}{t},\quad (f\in H(B_n),z\in B_n)。$$

不管是在单复变还是在多复变领域，研究Cesàro算子和加权Cesàro算子已很长时间了，如文献[1]~[8]。本文在上述基础上给出算子为有界算子 $T_\psi:A_\alpha^p\to D_\beta^q$ 和紧算子的充要条件，文中 C、C' 等表示与变量 z、w 等无关的常量，且不同的位置代表不同的数。

1　有界性

1.1　有关引理及证明

引理1[5]　对任意的 $r>0$, $z,w\in B_n$，$\beta(z,w)<r$，存在正常数 C 使

收稿日期：2007-03-25

基金项目：湖南省自然科学基金资助项目（06JJ50010）

作者简介：易奎英（1968-），女，湖南株洲人，湖南工业大学教师，硕士研究生，主要研究方向为复变函数.

$$C^{-1}\le \frac{1-|z|^2}{1-|w|^2}\le C \text{且} C^{-1}\le\frac{1-|z|^2}{|1-\langle z,w\rangle|}\le C。$$

引理2[5] 设$r>0$, $\alpha>-1$, $0<p<\infty$，则存在正常数$C>0$使得

$$|f(z)|^p\le\frac{C}{(1-|z|^2)^{n+1+\alpha}}\int_{E(z,r)}|f(w)|^p\,dv_\alpha(w)$$

对所有的$f\in H(B_n)$和所有的$z\in B_n$成立。

引理3[5] 设$\alpha>-1$, $0<p<\infty$。则

$$|f(z)|\le\frac{\|f\|_{A^p_\alpha}}{(1-|z|^2)^{\frac{n+1+\alpha}{p}}}$$

对所有的$f\in A^p_\alpha$和$z\in B_n$成立。

1.2 主要结论

定理1 设$0<p\le q<\infty$, $\psi\in H(B_n)$, $\alpha>-1$, $\beta>-1$，则$T_\psi:A^p_\alpha\to D^q_\beta$是有界算子的充要条件为：

$$\sup_{z\in B_n}\frac{|R\psi(z)|(1-|z|^2)^{\frac{n+1+\beta}{q}}}{(1-|z|^2)^{\frac{n+1+\alpha}{p}}}<\infty。$$

证明 当$0<p\le q<\infty$时，若

$$\sup_{z\in B_n}\frac{|R\psi(z)|(1-|z|^2)^{\frac{n+1+\beta}{q}}}{(1-|z|^2)^{\frac{n+1+\alpha}{p}}}=M<\infty,$$

则对任意的$f\in A^p_\alpha$，由$R(T_\psi(f))(z)=f(z)R\psi(z)$[4]、引理3和$T_\psi f(0)=0$得

$$\|T_\psi f(z)\|^q_{D^q_\beta}=$$
$$c_\beta\int_{B_n}|R(T_\psi(f))(z)|^q(1-|z|^2)^\beta\,dv(z)+|T_\psi f(0)|^q=$$
$$c_\beta\int_{B_n}|f(z)R\psi(z)|^q(1-|z|^2)^\beta\,dv(z)=$$
$$c_\beta\int_{B_n}|R\psi(z)|^q|f(z)|^{q-p}|f(z)|^p(1-|z|^2)^\beta\,dv(z)\le$$
$$c_\beta\int_{B_n}|R\psi(z)|^q|f(z)|^p\left(\frac{\|f\|^p_{A^p_\alpha}}{(1-|z|^2)^{n+1+\alpha}}\right)^{\frac{q-p}{p}}\times$$
$$(1-|z|^2)^\beta\,dv(z)\le$$
$$C\|f\|^{q-p}_{A^p_\alpha}\int_{B_n}\left(\frac{|R\psi(z)|^q(1-|z|^2)^{(n+1+\beta)}}{(1-|z|^2)^{\frac{(n+1+\alpha)q}{p}}}\right)\times$$
$$|f(z)|^p(1-|z|^2)^\alpha\,dv(z)=CM^q\|f\|^q_{A^p_\alpha},$$

所以T_ψ是$A^p_\alpha\to D^q_\beta$的有界算子。

若T_ψ是$A^p_\alpha\to D^q_\beta$的有界算子，则存在常数C使得对任意的$f\in A^p_\alpha$，有$\|T_\psi(f)\|_{D^q_\beta}\le C\|f\|_{A^p_\alpha}$，则取$a\in B_n$，令

$f_a(z)=\left\{\frac{(1-|a|^2)}{(1-\langle z,a\rangle)^{n+1+\alpha}}\right\}^{\frac{1}{p}}$，则 $f\in A^p_\alpha$，且$\|f_a\|_{A^p_\alpha}\le C'$（$C'$与$a$无关）。

再由引理1、引理2以及$T_\psi(f)(0)=0$得

$$\frac{|R\psi(a)|^q(1-|a|^2)^{\frac{(n+1+\beta)q}{q}}}{(1-|a|^2)^{\frac{(n+1+\alpha)q}{p}}}\le$$
$$C\frac{(1-|a|^2)^\beta}{(1-|a|^2)^{\frac{(n+1+\alpha)q}{p}}}\int_{E(a,r)}|R\psi(z)|^q\,dv(z)\le$$
$$C\int_{E(a,r)}|R\psi(z)|^q\left\{\frac{(1-|a|^2)}{(1-\langle z,a\rangle)^{n+1+\alpha}}\right\}^{\frac{q}{p}}\times$$
$$(1-|z|^2)^\beta\,dv(z)\le$$
$$C\int_{B_n}|R\psi(z)f_a(z)|^q(1-|z|^2)^\beta\,dv(z)\le$$
$$C\int_{B_n}|R(T_\psi(f_a))(z)|^q(1-|z|^2)^\beta\,dv(z)\le$$
$$C\|T_\psi(f_a)\|^q_{D^q_\beta}\le C\|f_a\|^q_{A^p_\alpha}\le C(C')^q,$$

由a的任意性得

$$\sup_{z\in B_n}\frac{|R\psi(z)|(1-|z|^2)^{\frac{n+1+\beta}{q}}}{(1-|z|^2)^{\frac{n+1+\alpha}{p}}}<\infty。$$

2 紧性

定理2 设$0<p\le q<\infty$, $\psi\in H(B_n)$, $\alpha,\beta>-1$，则$T_\psi:A^p_\alpha\to D^q_\beta$是紧算子的充要条件为：$\psi\in D^q_\beta$且

$$\lim_{|z|\to1}\frac{|R\psi(z)|(1-|z|^2)^{\frac{n+1+\beta}{q}}}{(1-|z|^2)^{\frac{n+1+\alpha}{p}}}=0。$$

证明 若$\psi\in D^q_\beta$且

$$\lim_{|z|\to1}\frac{|R\psi(z)|(1-|z|^2)^{\frac{n+1+\beta}{q}}}{(1-|z|^2)^{\frac{n+1+\alpha}{p}}}=0,$$

则对任给的$\varepsilon>0$存在$r_0>0$，当$|z|>r_0$时有

$$\frac{|R\psi(z)|(1-|z|^2)^{\frac{n+1+\beta}{q}}}{(1-|z|^2)^{\frac{n+1+\alpha}{p}}}<\varepsilon。\qquad(1)$$

设$\{f_m\}\in A^p_\alpha$是在B_n的任意紧子集上一致趋于0的有界序列，则存在K对所有的m有

$$\int_{B_n}|f_m(z)|^p(1-|z|^2)^\alpha\,dv(z)\le K。\qquad(2)$$

且存在$M>0$，当$m>M$, $|z|>r_0$时，有

$$|f_m(z)|<\varepsilon。\qquad(3)$$

因此由引理1、引理3以及式（1）~（3）得，当$m>M$时有

$$\|T_\psi(f_m)\|^q_{D^q_\beta}=|T_\psi(f_m)(0)|^q+$$
$$c_\beta\int_{B_n}|R(T_\psi(f_m))(z)|^q(1-|z|^2)^\beta\,dv(z)=$$
$$c_\beta\int_{B_n}|f_m(z)R\psi(z)|^q(1-|z|^2)^\beta\,dv(z)\le$$

$$C\int_{r_0 B_n}|f_m(z)R\psi(z)|^q\left(1-|z|^2\right)^{\beta}\mathrm{d}v(z)+$$
$$C\int_{B_n-r_0B_n}|R\psi(z)|^q|f_m(z)|^p\left[\frac{\|f_m\|_{A_\alpha^p}^p}{(1-|z|^2)^{n+1+\alpha}}\right]^{\frac{q-p}{p}}\times$$
$$\left(1-|z|^2\right)^{\beta}\mathrm{d}v(z)\le$$
$$C\varepsilon^q\int_{r_0B_n}|R\psi(z)|^q\left(1-|z|^2\right)^{\beta}\mathrm{d}v(z)+$$
$$C\|f_m\|_{A_\alpha^p}^{q-p}\int_{B_n-r_0B_n}\left[\frac{|R\psi(z)|^q\left(1-|z|^2\right)^{n+1+\beta}}{\left(1-|z|^2\right)^{\frac{n+1+\alpha}{p}q}}\right]\times$$
$$|f_m(z)|^p\left(1-|z|^2\right)^{\alpha}\mathrm{d}v(z)\le$$
$$C\varepsilon^q\int_{B_n}|R\psi(z)|^q\left(1-|z|^2\right)^{\beta}\mathrm{d}v(z)+$$
$$C\varepsilon^q\|f_m\|_{A_\alpha^p}^{q-p}\int_{B_n-r_0B_n}|f_m(z)|^p\left(1-|z|^2\right)^{\alpha}\mathrm{d}v(z)\le$$
$$C\varepsilon^q\left(\|\psi\|_{D_\beta^q}^q+\|f_m\|_{A_\alpha^p}^q\right)\le C\varepsilon^q\left(\|\psi\|_{D_\beta^q}^q+K^{\frac{q}{p}}\right)。$$

由上式可得

$$\|T_\psi(f_m)\|_{D_\beta^q}^q=|T_\psi(f_m)(0)|^q+c_\beta\int_{B_n}|R(T_\psi(f_m)(z))|^q\times$$
$$\left(1-|z|^2\right)^{\beta}\mathrm{d}v(z)\to 0\ (m\to\infty),$$

因此$T_\psi:A_\alpha^p\to D_\beta^q$是紧算子。

若$T_\psi:A_\alpha^p\to D_\beta^q$是紧算子，则$T_\psi$必为有界算子。取$f=1$得$T_\psi(1)=\int_0^1 R\psi(tz)\frac{\mathrm{d}t}{t}=\psi(z)-\psi(0)$，所以$\psi\in D_\beta^q$。对任意的$\{f_m\}\in A_\alpha^p$且在$B_n$的任意紧子集上一致趋于0的有界序列有

$$|T_\psi(f_m)(0)|^q+\int_{B_n}|R(T_\psi(f_m)(z))|^q\times$$
$$(1-|z|^2)^{\beta}\mathrm{d}v(z)\to 0\ (m\to\infty)。\tag{4}$$

因此任取$\{a_m\}\in B_n$，且$|a_m|\to 1,(m\to\infty)$，令$f_m(z)=\left\{\frac{\left(1-|a_m|^2\right)}{(1-\langle z,a_m\rangle)^{n+1+\alpha}}\right\}^{\frac{1}{p}}$，则$\{f_m\}$在$B_n$的任意紧子集上一致趋于0，且$\{f_m\}\in A_\alpha^p$，$\|f_m\|_{A_\alpha^p}\le C$（$C$与$m$无关），因此由引理1、引理2及$T_\psi(0)=0$得

$$\frac{|R\psi(a_m)|^q\left(1-|a_m|^2\right)^{\frac{(n+1+\beta)q}{q}}}{\left(1-|a_m|^2\right)^{\frac{(n+1+\alpha)q}{p}}}\le$$
$$C\frac{\left(1-|a_m|^2\right)^{\beta}}{\left(1-|a_m|^2\right)^{\frac{(n+1+\alpha)q}{p}}}\int_{E(a_m,r)}|R\psi(z)|^q\mathrm{d}v(z)\le$$
$$C\int_{E(a_m,r)}|R\psi(z)|^q\left\{\frac{\left(1-|a_m|^2\right)}{(1-\langle z,a_m\rangle)^{n+1+\alpha}}\right\}^{\frac{q}{p}}\times$$
$$\left(1-|z|^2\right)^{\beta}\mathrm{d}v(z)\le$$
$$C\int_{B_n}|f_m(z)R\psi(z)|^q\left(1-|z|^2\right)^{\beta}\mathrm{d}v(z)\le$$
$$C\int_{B_n}|R(T_\psi(f_m)(z))|^q\left(1-|z|^2\right)^{\beta}\mathrm{d}v(z)=$$
$$C\|T_\psi(f_m)\|_{D_\beta^q}^q\to 0\quad(m\to\infty).$$

由式（4）有

$$\lim_{|z|\to 1}\frac{|R\psi(z)|\left(1-|z|^2\right)^{\frac{n+1+\beta}{q}}}{\left(1-|z|^2\right)^{\frac{n+1+\alpha}{p}}}=0。$$

参考文献：

[1] Siskakis A. Composition Semigroups and the Cesàro Operator on HP[J]. J. London Math. Soc.，1987，36：153-164.

[2] Xiao J. Cesàro Operators on Hardy, BMOA and Bloch Spaces [J]. Arch. Math.，1997，68：398-406.

[3] Shi J H, Ren G B. Boundedness of the Cesàro Operator on Mixed Norm Spaces[J]. Proc. Amer. Math. Soc.，1998，126：3553-3560.

[4] Hu Z J. Extended Cesàro Operators on the Bloch Space in the Unit Ball of C^n[J]. Acta Math. Sci.，2003，23B（4）：561-566.

[5] Zhang X J. Extended Cesàro Operators on Dirichlet Type Spaces and Bloch Type Spaces of C^n[J]. Chin. Ann. of Math.，2005，26A（1）：139-150.

[6] 李俊锋，张学军. C^n中$F(q)$空间到Bloch型空间之间的Cesàro算子[J]. 湖南师范大学自然科学学报，2008，31（1）：19-22.

[7] Miao J. The Cesàro Operator Is Bounded on HP for $0<P<1$ [J]. Proc. Amer. Math. Soc.，1992，116：1077-1079.

[8] Zhu K H. Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball [M]. New York： Springer，2004.

（责任编辑：罗立宇）