第22卷第2期 湖南工业大学学报 Vol.22 No.2
2008年3月 Journal of Hunan University of Technology Mar. 2008

一类变系数泛函微分方程的振动性与渐近性

陈志彬，张爱平，李 蓓

（湖南工业大学 治金校区，湖南 株洲 412000）

摘 要：研究了一类具变系数时滞泛函微分方程$x'(t)+P(t)x(t-\tau)-\sum_{j=1}^{n}Q_i(t)x(t-\sigma_i)=g(t)$，当其强迫项$g(t)\equiv 0$时，一切解振动的充分条件；及当其强迫项$g(t)\neq 0$时，有界解的振动性与渐近性。

关键词：强迫项；变系数；泛函微分方程；振动性；渐近性

中图分类号：O175 **文献标识码**：A **文章编号**：1673-9833(2008)02-0029-03

The Oscillatory and Asymptotic Behavior of Functional Differential Equation with One Kind of Variable Coefficient

Chen Zhibin，Zhang Aiping，Li Bei

(Hunan Metallurgical Professional Technology College，Zhuzhou Hunan 412000，China)

Abstract: One kind of delay functional differential equation with variable coefficient $x'(t)+P(t)x(t-\tau)-\sum_{j=1}^{n}Q_i(t)x(t-\sigma_i)=g(t)$ is studied. The whole solutions oscillation is full of condition when it is forcing an item $g(t)\equiv 0$; there is the oscillatory behavior and asymptotic behavior of boundary solution while it is forcing an item $g(t)\neq 0$,

Key words: force an item; variable coefficient; functional differential equation; oscillatory behavior; asymptotic behavior

1 背景知识

本文考虑一类如下的变系数时滞泛函微分方程

$$x'(t)+P(t)x(t-\tau)-\sum_{j=1}^{n}Q_i(t)x(t-\sigma_i)=g(t),\ t\geq t_0 \qquad (1)$$

的振动性与渐近性，其中t_0为某一正数，$\tau\geq\max_{0\leq i\leq n}\{\sigma_i\}$，$P$，$Q_i\in C[[t,\infty),R^+]$，$\tau$，$\sigma_i\in[0,\infty)$。

定义1 如果$x(t)\in C[[t_0-\tau,\infty),R]$，且对于$t\geq t_0$，$x(t)$在$[t_0,\infty]$上连续且可微并满足方程（1），则称$x(t)$为方程（1）的解。

定义2[1] 如果方程（1）的解$x(t)$在半直线$[t_0,+\infty)$上有定义，且有任意大的零点，则称它是振动的；如果方程（1）的一切解都振动，则称该方程是振动的。

在文献[2]中，作者讨论了含两个时滞变系数泛函微分方程的振动性，本文将时滞推广到多个，从而改进了文献[2]中的结论；文献[3]中，作者建立了时滞微分不等式$x'(t)+p(t)x(t-\tau)\leq 0$（$t\geq t_0$）与时滞微分方程$x'(t)+p(t)x(t-\tau)=0$（$t\geq t_0$）之间的比较定理：如果$\liminf_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}p(s)\mathrm{d}s>\frac{1}{e}$成立，则时滞微分方程振动而时滞微分不等式无最终正解，其中τ为正常数，$p(t)>0$为连续函数。我们在下面的讨论中将用到这个结论，并参考了文献[4，5]中处理问题的方法。

收稿日期：2007-11-02

基金项目：湖南省自然科学基金资助项目（060D74）

作者简介：陈志彬（1965-），男，湖南邵阳人，湖南工业大学冶金校区副教授，主要从事泛函微分方程方面的研究.

2　主要结果与证明

引理1　设$a\in(-\infty,0)$，$\tau\in(0,\infty)$，$t_0\in R$，如果函数$x(t)\in C[[t_0-\tau,\infty],R]$且满足不等式

$$x(t)\le a+\max_{t-\tau\le s\le t}\{x(t)\},\ t\ge t_0,\tag{2}$$

则函数$x(t)$不能为非负函数。

证明　假设引理1的结论不成立，即对于$t\ge t_0$时$x(t)\ge 0$，可以断言$x(t)$是一个有界函数，否则存在$t_1\ge t_0$使得

$$x(t_1)=\max_{t-\tau\le s\le t}\{x(t)\}。$$

代入式（2）得：

$$x(t_1)\le a+\max_{t_1-\tau\le s\le t_1}\{x(t)\}=a+x(t_1)<x(t_1)。\tag{3}$$

显然式（3）是一个矛盾不等式，所以$x(t)$是有界函数。

由于函数$x(t)$有界，则令

$$M=\lim_{t\to\infty}\sup x(t),$$

又由式（2）可得：

$$M\le a+M<M,$$

这显然是不可能的，因此$x(t)<0$。

定理1　对于微分方程（1），当$g(t)\equiv 0$时，如果满足下列条件

1）$P(t)\ge\sum_{i=1}^{n}Q_i(t+\sigma_i-\tau)$，且$P(t)\not\equiv\sum_{i=1}^{n}Q_i(t+\sigma_i-\tau)$；

2）当$t\ge t_0+\tau$时，$\sum_{i=1}^{n}\int_{t-\tau}^{t-\sigma_i}Q_i(s+\sigma_i)\mathrm{d}s\le 1$；

3）$\liminf_{t\to\infty}\int_{t-\tau}^{t}\left[P(s)-\sum_{i=1}^{n}Q_i(s+\sigma_i-\tau)\right]\mathrm{d}s>\frac{1}{e}$；

则微分方程（1）是振动的。

证明　假设定理中的结论不成立，即方程（1）有最终正解$x(t)$，取$t_1\ge t_0+\tau-\min_{1<i<n}\{\sigma_i\}$，当$t\ge t_1$时，令

$$z(t)=x(t)-\sum_{i=1}^{n}\int_{t-\tau+\sigma_j}^{t}Q_i(s)x(s-\sigma_j)\mathrm{d}s,$$

方程（1）改写为

$$z'(t)+\left[P(t)-\sum_{i=1}^{n}Q_i(t+\sigma_i-\tau)\right]x(t-\tau)=0。\tag{4}$$

由定理1中的条件1）与式（4）可得

$$z'(t)\le 0,\ z'(t)\not\equiv 0。\tag{5}$$

于是存在序列$\{t_n\}_1^{\infty}$使得$z'(t_n)<0$，可以断言$z(t)\ge 0$；否则，存在$t_2\ge t_1$使得$z(t_2)<0$；对于$t\ge t_1+\tau$，由于$z'(t)\le 0$但不恒为零，可得，存在$t_2,t_3\in[t_1+\tau,\infty]$且$t_2\le t_3$，使得$z(t_3)<0$，而$t\ge t_3$时，有$z(t)\le z(t_3)$。

当$t\ge t_3$时，可推得如下不等式成立：

$$x(t)=z(t)+\sum_{i=1}^{n}\int_{t-\tau}^{t-\sigma_i}Q_i(s+\sigma_i)x(s)\mathrm{d}s\le z(t_3)+$$
$$\sum_{i=1}^{n}\int_{t-\tau}^{t-\sigma_i}Q_i(s+\sigma_i)\max_{t-\tau\le s\le t-\min\{\sigma\cdots\sigma_n\}}\{x(s)\}\mathrm{d}s\le$$
$$z(t_3)+\max_{t-\tau\le s\le t}\{x(s)\};$$

再根据引理1知$x(t)<0$，这与$x(t)$是最终正解矛盾，于是可得$z(t)\ge 0$成立；又因为$z(t)\le x(t)$，所以由式（4）可得：

$$z'(t)+\left[P(t)-\sum_{i=1}^{n}Q_i(t+\sigma_i-\tau)\right]z(t-\tau)\le 0。\tag{6}$$

根据定理1中的条件3）可得式（6）无最终正解，即$z(t)\ge 0$不成立。

综合以上的证明可知：得到两个相矛盾的结论，因此原假设不成立，故方程（1）的解是振动的，定理1证毕。

定理2　对于微分方程（1），当$g(t)\ne 0$时，如果满足下列条件

1）当$t\ge t_0+\tau$时，$P(t)\ge\sum_{i=1}^{n}Q_i(t+\sigma_i-\tau)$；

2）$\int_{t_0}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}Q_i(s)\mathrm{d}s<\infty$；

3）存在函数$G(t)\in C^1[[t_0,\infty),R]$，使得$G'(t)=g(t)$，且$\lim_{t\to\infty}G(t)=\beta$（$\beta$为确定常数）；

4）$\int_{t_0}^{\infty}P(s)\mathrm{d}s=\infty$。

则方程（1）的有界解$x(t)$振动或$\lim_{t\to\infty}x(t)=0$。

证明　假设$x(t)$是方程（1）在$[T,\infty)$，$T\ge t_0$上的有界非振动解，不防设$x(t)>0(t>t_1\ge T)$；对于$x(t)<0$的情况可以类似讨论。

当$t>t_1+\tau$时，令

$$z(t)=x(t)-\sum_{j=1}^{n}\int_{t-\tau+\sigma_j}^{t}Q_i(s)x(s-\sigma_j)\mathrm{d}s-G(t),$$

$$z'(t)=x'(t)-\sum_{j=1}^{n}Q_j(t)x(t-\sigma_j)+$$
$$\sum_{j=1}^{n}Q_j(t-\tau+\sigma_j)x(t-\tau)-G'(t)=$$
$$-\left(P(t)-\sum_{j=1}^{n}Q_i(t-\tau+\sigma_j)\right)x(t-\tau)\le 0,$$

由$z'(t)\le 0$及$z(t)$的有界性得$\lim_{t\to\infty}z(t)=\alpha$（$\alpha$为定数）。

对于$\alpha+\beta$有3种可能：

i）$\alpha+\beta<0$；

ii）$\alpha+\beta>0$；

iii）$\alpha+\beta=0$。

下面证明只有第iii）种可能才成立，而i）、ii）两种可

能不成立。

i）当$\alpha+\beta<0$时，由定理2中的条件2）得

$$0>\lim_{t\to\infty}\left[z(t)+G(t)\right]=$$

$$\lim_{t\to\infty}\left[x(t)-\sum_{j=1}^{n}\int_{t-\tau-\sigma_j}^{t}Q_j(s)x(s-\sigma_j)\mathrm{d}s\right]\geq$$

$$\lim_{t\to\infty}x(t)-\limsup_{t\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\int_{t-\tau-\sigma_j}^{t}Q_j(s)x(s-\sigma_j)\mathrm{d}s\geq 0,$$

即得不等式$0>\alpha+\beta\geq 0$，这是不可能成立的。

ii）当$\alpha+\beta>0$时，取$t_2>t_1+\tau$且在区间$[t_2,\infty)$上对下式

$$z'(t)=-\left[P(t)-\sum_{i=1}^{n}Q_i(t+\sigma_i-\tau)\right]x(t-\tau)$$

积分得

$$\int_{t_2}^{\infty}\left[P(t+\tau)-\sum_{j=1}^{n}Q_j(t+\sigma_j)\right]x(t)\mathrm{d}s<\infty, \tag{7}$$

而由定理2中的条件2）、4）得

$$\int_{t_2}^{\infty}\left[P(t+\tau)-\sum_{j=1}^{n}Q_j(t+\sigma_j)\right]\mathrm{d}s=\infty, \tag{8}$$

综合式（7）、式（8）可知

$$\liminf_{t\to\infty}x(t)=0, \tag{9}$$

又因为

$$0<\lim_{t\to\infty}\left[z(t)+G(t)\right]=$$

$$\liminf_{t\to\infty}\left[x(t)-\sum_{j=1}^{n}\int_{t-\tau+\sigma_j}^{t}Q_j(s)x(s-\sigma_j)\mathrm{d}s\right]\leq\liminf_{t\to\infty}x(t),$$

于是有

$$\liminf_{t\to\infty}x(t)>0, \tag{10}$$

在条件$\alpha+\beta>0$时，得到式（9）、（10）两式同时成立是不可能的。

由以上证明可得$\alpha+\beta=0$是成立的，于是有

$$0=\left[z(t)+G(t)\right]=$$

$$\limsup_{t\to\infty}\left[x(t)-\sum_{j=1}^{n}\int_{t-\tau+\sigma_j}^{t}Q_j(s)x(s-\sigma_j)\mathrm{d}s\right]\geq$$

$$\limsup_{t\to\infty}x(t)-\limsup_{t\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\int_{t-\tau-\sigma_j}^{t}Q_j(s)x(s-\sigma_j)\mathrm{d}s,$$

再根据定理2中的条件2）得：

$$\limsup_{t\to\infty}x(t)\leq 0,$$

于是有

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=0。$$

定理证毕。

例1　由定理2可知，微分方程

$$x'(t)+(t-1)x(t-1)-\frac{2}{(2t-1)^2}x\left(t-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{(4t-1)^3}x\left(t-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{t^4}+\frac{1}{(t-1)^2}-\frac{64}{(4t-1)^3}-\frac{16}{(2t-1)^5},\ (t>1)$$

的一切有界解$x(t)$振动或$\lim_{t\to\infty}x(t)=0$。例如$x(t)=\frac{1}{t^3}$是这个方程的有界解，且$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^3}=0$。

参考文献：

[1] 厉　亚，黄立宏，孟益民. 二阶非线性泛函微分方程解的振动准则[J]. 湖南大学学报，2006，33(2)：128-130.

[2] Gyori I，Ladas G. Oscillation theory of delay differential equations with applications[M]. Oxford：clarendon Press Oxford，1991.

[3] 李森林，温立志. 泛函微分方程[M]. 长沙：湖南科学技术出版社，1987.

[4] 王宏洲，俞元洪. 一阶中立型时滞微分方程的强迫振动[J]. 数学物理学报，2007，27A(1)：90-96.

[5] Mao W, Wan A. Oscillatory and asymptotic behavior of nonlinear impulsive delay fifferential equations[J]. Ac-ta Math. Appl. Sinica，English Series, 2006，22(3)：387-396.

[6] 唐先华. 具变系数时滞微分方程解的振动性[J]. 数学研究，1998，31(3)：290-293.

（责任编辑：廖友媛）